Тема 22. Сітьові моделі, моделі теорії черг

22.1. Мережі Петрі

Мережі Петрі – це апарат для моделювання динамічних дискретних систем (переважно асинхронних паралельних процесів) [12]. Мережа Петрі визначається як четвірка $\langle P, T, I, O \rangle$, де P і T – скінченні множини позицій і переходів, I і O – множини вхідних і вихідних функцій. Іншими словами, мережею Петрі є дводольний орієнтований граф, в якому ***позиціям*** відповідають вершини, що зображуються кружечками, а ***переходам*** – вершини, що зображуються потовщеними рисками; функціям I відповідають дуги, направлені від позицій до переходів, а функціям O – дуги, направлені від переходів до позицій (рис. 8.1).

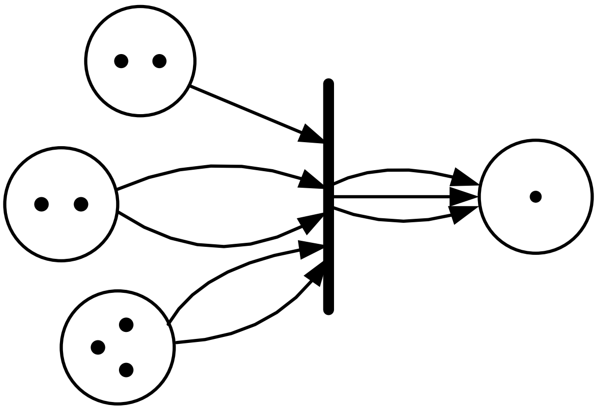

Рис. 8.1. **Фрагмент мережі Петрі**

Як і в системах масового обслуговування, в мережах Петрі вводяться об'єкти двох типів: динамічні, які зображуються ***мітками (маркерами)*** всередині позицій, і статичні, яким відповідають вершини мережі Петрі.

Розподіл маркерів за позиціями називають ***маркуванням***. Маркери можуть переміщатися в мережі. Кожну зміну маркування називають ***подією***, причому кожна подія пов'язана з певним переходом. Вважається, що події відбуваються миттєво і різночасно при виконанні деяких умов.

Кожній умові в мережі Петрі відповідає певна позиція. Здійсненню події відповідає ***спрацьовування*** (збудження або запуск) переходу, при якому маркери з вхідних позицій цього переходу переміщаються у вихідні позиції. Послідовність подій утворює модельований процес.

Правила спрацьовування переходів (див. рис. 8.1) конкретизують таким чином: перехід спрацьовує, якщо для кожної з його вхідних позицій виконується умова $N_i > K_i$, де N_i – число маркерів в i-й вхідній позиції, K_i – число дуг, що йдуть від i-ї позиції до переходу; при спрацьовуванні переходу число маркерів в i-й вхідній позиції зменшується на K_i, а в j-й вихідній позиції збільшується на M_j, де M_j – число дуг, що пов'язують перехід з j-ю позицією.

На рис. 8.1 показаний приклад розподілу маркерів за позиціями перед спрацьовуванням, це маркування записують у вигляді (2,2,3,1). Після спрацьовування переходу маркування приймає вигляд (1,0,1,4).

Можна вводити ряд додаткових правил і умов в алгоритми моделювання, отримуючи той або інший різновид мереж Петрі. Так, перш за все, корисно ввести модельний час, щоб моделювати не тільки послідовність подій, але і їх прив'язку до часу. Це здійснюється наданням переходам ваги – тривалості (затримки) спрацьовування, яку можна визначати, використовуючи алгоритм, що задається при цьому. Отриману модель називають ***часовою мережею Петрі.***

Якщо затримки є випадковими величинами, то мережу називають ***стохастичною***. У стохастичних мережах можливе введення ймовірності спрацьовування збуджених переходів. Так, на рис. 8.2 наведено фрагмент мережі Петрі, що ілюструє конфліктну ситуацію, – маркер у позиції p може запустити або перехід t_1 або перехід t_2. У стохастичній мережі передбачається імовірнісний вибір переходу, що спрацьовує, в таких ситуаціях.

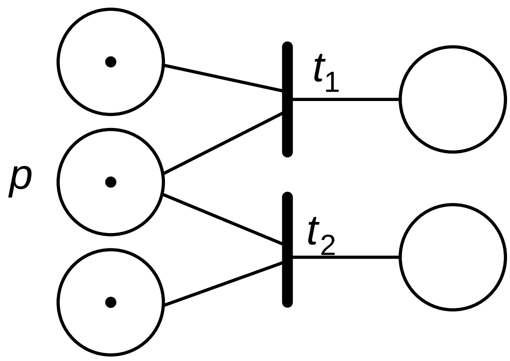

Рис. 8.2. **Конфліктна ситуація**

Якщо затримки визначаються як функції деяких аргументів, якими можуть бути кількість маркерів в яких-небудь позиціях, стани деяких переходів і тому подібне, то мережу називають ***функціональною***.

У багатьох задачах динамічні об'єкти можуть бути декількох типів, і для кожного типу потрібно вводити (чи запроваджувати свої алгоритми поведінки в мережі. У цьому випадку кожен маркер повинен мати хоча б один параметр, що позначає тип маркера. Такий параметр зазвичай називають кольором; колір можна використовувати як аргумент у функціональних мережах. Мережу Петрі при цьому називають ***кольоровою***.

Серед інших різновидів мереж Петрі слід згадати ***інгібіторні*** мережі, що характеризуються тим, що в них можливі заборонні (інгібіторні) дуги. Наявність маркера у вхідній позиції, пов'язаній з переходом інгібіторною дугою, означає заборона спрацьовування переходу.

Введені поняття пояснимо на таких простих прикладах.

Приклад 1. Необхідно описати з допомогою мережі Петрі функціонування системи з підприємств A, B і C. Підприємства A і B поставляють вузли $X1$ і $X2$ відповідно, а на підприємстві C відбувається збирання, у кожен складальний вузол входить один вузол $X1$ і два вузли $X2$. На рис. 8.3 підприємствам A, B і C відповідають переходи t_1, t_2 і t_3.

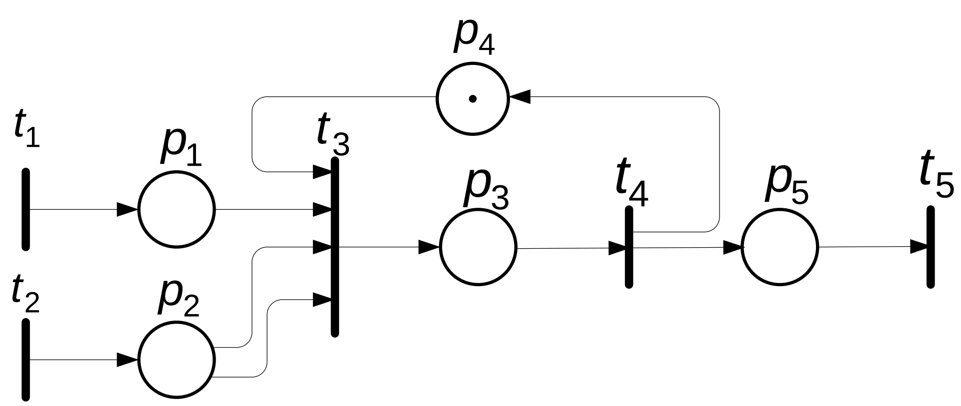

Рис. 8.3. **Мережа Петрі для приклада 1**

Спрацювання переходу t_3 відбувається тільки в тому випадку, якщо, по-перше, в позиції p_1 є мітка, а в позиції p_2 – не менше двох міток, що означає надходження від підприємств A і B відповідних комплектуючих, і, по-друге, є мітка в позиції p_4, що означає, що підприємство C закінчило збирання попереднього виробу і готове приступити до збирання наступного. Поки черговий виріб не буде зібраний, мітки в p_4 не буде, отже, запити, що надійшли у вхідні позиції p_1 і p_2, змушені чекати спрацювання переходу t_4. Переходам t_1, t_2 і t_3 поставлені у відповідність процедури обчислення затримок спрацювання. Затримки в перших двох переходах дорівнюють інтервалам часу між появами готових вузлів, затримка в t_3 дорівнює часу збирання виробу.

Приклад 2. Потрібно описати за допомогою мережі Петрі процеси виникнення і усунення несправностей в деякій технічній системі, що складається з M однотипних блоків; в запасі є один справний блок; відомі статистичні дані про інтенсивності виникнення відмов і тривалість таких операцій, як пошук несправностей, заміна і ремонт блоку, який відмовив. На рис. 8.4 представлена відповідна мережа Петрі. Відзначимо, що при числі міток у позиції, що дорівнює M, можна в ній не ставити M точок, а записати в позиції значення M.

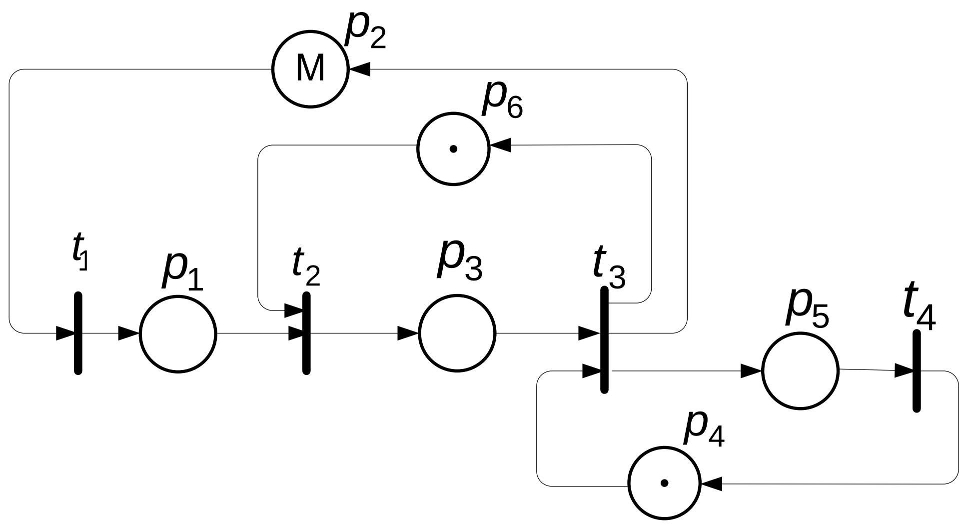

Рис. 8.4. **Мережа Петрі для приклада 2**

У нашому прикладі значення M в позиції p_2 відповідає числу наявних у системі блоків. Переходи відображають такі події: t_1 – відмова блоку, t_2 – пошук несправного блоку, t_3 – його заміна, t_4 – закінчення ремонту.

Очевидно, що при непустій позиції p_2 перехід t_1 спрацьовує, але з затримкою, що дорівнює обчисленому випадковому значенню модельованого відрізку часу між відмовами. Після виходу маркера з t_1 він потрапляє через p_1 в t_2, якщо є мітка в позиції p_6, це означає, що обслуговуюча систему бригада фахівців вільна і може приступити до пошуку несправності, що виникла. У переході t_2 мітка затримується на час, що дорівнює випадковому значенню тривалості пошуку несправності. Далі маркер опиняється в p_3 і якщо є запасний блок (маркер у p_4), то запускається перехід t_3, з якого маркери вийдуть в p_2, p_5 і p_6 через відрізок часу, необхідний для заміни блока. Після цього в t_4 імітується відновлення несправного блока.

Дана модель описує функціонування системи в умовах, коли відмови можуть виникати і в робочому, і в несправному станах системи. Тому не виключені ситуації, при яких більш ніж один маркер опиниться в позиції p_1 .

22.2. Ланцюги Маркова

Марківські випадкові процеси названі за ім'ям видатного російського математика А. А. Маркова (1856 – 1922), який вперше почав вивчення імовірнісного зв'язку випадкових величин і створив теорію, яку можна назвати "динамікою ймовірності". Надалі основи цієї теорії стали початковою базою загальної теорії випадкових процесів, а також таких важливих прикладних наук, як теорія дифузійних процесів, теорія надійності, теорія масового обслуговування (теорія черг) і т. д. Нині теорія марківських процесів і її застосування широко застосовуються в найрізноманітніших сферах [12].

Завдяки порівняній простоті і наглядності математичного апарату, високій достовірності і точності отримуваних розв'язків, особливої уваги марківські процеси набули у фахівців, які займаються дослідженням операцій і теорією прийняття оптимальних рішень [12].

Перш ніж дати опис загальної схеми ланцюгів Маркова, розглянемо простий приклад.

Приклад 3. Припустимо, що мова йде про послідовні кидання монети при грі "в орлянку"; монета кидається в умовні моменти часу $t = 0, 1, 2\ldots$ і на кожному кроці гравець може виграти ± 1 з однаковою ймовірністю $1/2$. Таким чином, в момент t його сумарний виграш є випадковою величиною $\xi(t)$ з можливими значеннями $i = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$. За умови, що $\xi(t) = k$, на наступному кроці виграш буде вже дорівнювати $\xi(t+1) = k \pm 1$, приймаючи вказані значення $i = k \pm 1$ з однаковою ймовірністю $1/2$. Умовно можна сказати, що тут з відповідною ймовірністю відбувається перехід зі стану $\xi(t) = k$ у стан $\xi(t+1) = k \pm 1$.

Узагальнюючи цей приклад, можна уявити собі систему із зліченим числом можливих "фазових" станів, яка з плином дискретного часу $t = 0,1,2\ldots$ випадково переходить зі стану у стан. Нехай $\xi(t)$ є її стан у момент t в результаті ланцюжка випадкових переходів:

$$\xi(0) \to \xi(1) \to \xi(2) \to \ldots \to \xi(t) \to \ldots \tag{8.1}$$

Формально позначимо всі можливі стани через $\{\xi_i\}$. Припустимо, що при відомому стані $\xi(t) = \xi_k$ на наступному кроці система переходить у стан $\xi(t+1) = \xi_i$ з умовною ймовірністю

$$p_{ki} = P(\xi(t+1) = \xi_i \mid \xi(t) = \xi_k) \tag{8.2}$$

незалежно від її поведінки у минулому, точніше, незалежно від ланцюжка переходів (8.1) до моменту t:

$$P(\xi(t+1) = \xi_i \mid \xi(0) = \xi_m, \ldots, \xi(t) = \xi_k) = P(\xi(t+1) = \xi_i \mid \xi(t) = \xi_k)\ \forall t,k,i\,. \tag{8.3}$$

Умова (8.3) називається ***марківською властивістю***.

Таку імовірнісну схему називають ***однорідним ланцюгом Маркова зі зліченим числом станів***. Її однорідність полягає в тому, що визначені в (8.2) ***перехідні ймовірност*і** p_{ki} $(\sum_i p_{ki} = 1,\ \forall k)$, не залежать від часу.

При цьому матриця $P = \{p_{ki}\}$ називається ***матрицею ймовірності переходу*** за один крок і не залежить від номера кроку. Ясно, що $P = \{p_{ki}\}$ – квадратна матриця з невід'ємними елементами й одиничними сумами по рядках. Така матриця (скінченна або нескінченна) називається ***стохастичною матрицею.*** Будь-яка стохастична матриця може служити матрицею перехідних ймовірностей.

Ланцюгом Маркова першого порядку називається одна з форм марківських процесів, для якої кожний конкретний стан залежить тільки від безпосередньо попереднього (описаний вище). Ланцюгом Маркова другого і вищих порядків називається процес, в якому поточний стан залежить від двох і більше попередніх.

Математичні моделі, що використовують ланцюги Маркова, є перехідними між детермінованими і чисто випадковими моделями.

Багато природних процесів можна вважати марківськими. Припустимо, що є серія щотижневих спостережень за рівнем води в річці, яка потрапляє в одну з трьох градацій – низький, нормальний, високий. За цими даними складена табл. 8.1 частот переходу від одного стану до іншого.

Таблиця 8.1

Від стану	До стану			Сума по рядку
	низький	нормальний	високий	
низький	12	6	0	18
нормальний	5	80	15	100
високий	0	14	16	30

Якщо поділити кожне число на суму по відповідному рядку, отримаємо ймовірність переходу від одного стану до іншого. Це, безумовно, буде не дійсне значення ймовірності, а її статистична оцінка. Ці оцінки наведені в табл. 8.2

Таблиця 8.2

Від стану	До стану			Сума по рядку
	низький	нормальний	високий	
низький	0,67	0,33	0,00	1,00
нормальний	0,05	0,80	0,15	1,00
високий	0,00	0,47	0,53	1,00

Тоді матриця ймовірностей переходу має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 & 0.00 \\ 0.05 & 0.80 & 0.15 \\ 0.00 & 0.47 & 0.53 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що якщо побудована матриця ймовірності переходу, то тим самим побудована модель випадкового процесу (системи), а значить можна зробити прогноз про майбутній стан системи.

Такий метод прогнозування (побудований на основі ланцюгів Маркова) може бути використаний для прогнозу значення множини показників, які змінюються в часі одночасно, але безпосередньо функціональні зв'язки між ними не встановлені зважаючи на відсутність інформації або крайньої складності цих зв'язків. Прикладом може служити прогноз потреб галузей народного господарства в ресурсах. При реалізації такого прогнозу встановлюється на перспективу сама структура споживання ресурсів різними галузями [2**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Так, нехай $a = (a_i)$ – набір n прогнозованих показників, T – інтервал спостережень за значеннями показників, $A_T = (a_{it})$ – матриця розмірності $n \times T$ значень i-го показника у момент часу t $(t = \overline{1, T})$. Тоді, якщо відома матриця переходів $P = \{ p_{kj} \}$ (розмірності $n \times n$), то прогноз обчислюється як

$$A_{T+1} = P A_T; \; A_{T+2} = P^2 A_T; \; \ldots \; A_{T+k} = P^k A_T .$$

Висновки

1. Мережі Петрі і ланцюги Маркова можуть використовуватися як для моделювання систем масового обслуговування, так й інших систем.
2. Для розширення сфери застосування мереж Петрі при моделюванні систем вводяться різноманітні різновиди цих мереж.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення мережі Петрі.
2. Як можна зробити прогноз про майбутній стан складної стохастичної системи на основі ланцюгів Маркова?