10. Методи математичної фізики

10.1. Розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними

Інженеру дуже часто доводиться стикатися з задачами, в яких шукана величина залежить від декількох змінних, наприклад, $u = u(t, x, y, z)$. У цьому випадку розв'язувані диференціальні рівняння містять частинні похідні і називаються **диференціальними рівняннями з частинними похідними** [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Рівняннями з частинними похідними описується багато фізичних процесів у таких областях, як механіка суцільних середовищ, термодинаміка, квантова механіка, електродинаміка, теорія пружності і багато ін. Тому розділ математики, що вивчає можливість розв'язання диференціальних рівнянь із частинними похідними називається математичною фізикою, а рівняння – **рівняннями математичної фізики**.

На жаль, дуже багато з таких рівнянь не мають аналітичного розв'язку, і щоб їх розв'язати, доводиться вдаватися до чисельних методів. Якщо для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь існує багато різних методів (див. розділи 10 – 13), то для розв'язання диференціальних рівнянь із частинними похідними доводиться вибирати в основному між методом кінцевих різниць і методом кінцевих елементів.

У цьому розділі питання про чисельне інтегрування диференціальних рівнянь із частинними похідними розглядається з точки зору застосування цих методів для вирішення різних технічних завдань. Дається також класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними, що часто зустрічаються, і вказуються раціональні шляхи їх чисельного розв'язання.

10.1.1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними

Диференціальні рівняння з частинними похідними класифікують або залежно від їх математичної природи (еліптичні, параболічні тощо), або залежно від фізичного змісту розв'язуваних за їх допомогою задач (рівняння дифузії, хвильове рівняння тощо). Для того, щоб користуватися математичною літературою та літературою з прикладних дисциплін, фахівець повинен бути знайомий з обома цими класифікаціями [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Для спрощення викладання слід розглянути випадок, коли шукана величина залежить від двох змінних, тобто $u = u(x, y)$.

З математичної точки зору диференціальні рівняння другого порядку з частинними похідними з двома незалежними змінними

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial u}) = 0 \qquad (10.1)$$

,

класифікуються залежно від співвідношення функцій a, b, c. Ці функції залежать від змінних x і y. Якщо $b^2 - ac < 0$, рівняння називається **еліптичним**, якщо $b^2 - ac = 0$ – **параболічним**, а якщо $b^2 - ac > 0$ – **гіперболічним**. Залежність функцій a, b, c від x і y ускладнює ситуацію, оскільки робить можливим зміну типу рівняння при переході з однієї частини розглянутої області в іншу.

Додатковими умовами для диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними можуть слугувати граничні або початкові умови, а також комбінація тих і інших. Еліптичні рівняння описують усталені (стаціонарні) процеси; задача ставиться в замкнутій області, і в кожній точці межі цієї області задаються граничні умови. Параболічними і гіперболічними рівняннями описуються еволюційні (нестаціонарні) процеси (процеси "поширення"). У таких задачах на одній частині границі ставляться граничні умови, на іншій – початкові; можливі також відкриті області, в які "поширюється розв'язок".

В інженерній практиці найчастіше зустрічаються рівняння з частинними похідними, що наведені в табл. 10.1 [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], де Δ – **оператор Лапласа**. У випадку однієї незалежної змінної x він має вигляд $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, а у випадку двох незалежних змінних x і y – $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Оператор Δ^2 називається **бігармонічним оператором** і у випадку двох незалежних змінних він має вигляд $\Delta^2 u = \dfrac{\partial^4 u}{\partial^4 x} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial^2 x\, \partial^2 y} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial^4 y}$.

Оператори Δ та Δ^2 застосовуються для скорочення запису диференціальних рівнянь.

Таблиця 10.1

Диференціальні рівняння з частинними похідними, що найчастіше зустрічаються в інженерній практиці

Назва рівняння	Математична форма	Приклади практичних задач, де вони зустрічаються
Лапласа (еліптичне)	$\Delta u = 0$	Усталена течія рідини стаціонарних потоках. Стаціонарні теплові поля
Пуасона (еліптичне)	$\Delta u = -k$	Теплопередача з внутрішніми джерела тепла
Теплопровідності або дифузії (параболічне)	$\Delta u = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}$	Нестаціонарна теплопровідність
Хвильове (гіперболічне)	$\Delta u = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Розповсюдження звукових хвиль
Бігармонічне	$\Delta^2 u = F(x, y)$	Деформація пластин

10.1.2. Метод кінцевих різниць для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними

В основі розв’язання рівнянь з частинними похідними методом кінцевих різниць лежить, природно, – різницева апроксимація похідних, яка багато в чому нагадує апроксимацію похідних, що була описана в розділі 13, присвяченому розв’язанню крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Розв’язання здійснюється в три етапи (рис. 10.1). Спочатку в області розв’язку вводять рівномірну сітку "вузлових точок", що відповідає характеру задачі і граничним умовам. Потім розв’язуване рівняння з частинними похідними записують у найбільш зручній системі координат і, представляючи похідні в кінцево-різницевій формі, приводять його до виду різницевого рівняння. Отримане різницеве рівняння використовують надалі для опису функціонального зв'язку між сусідніми вузлами сітки. Різницеве рівняння записують для всіх вузлів сітки і отримують в результаті систему n алгебраїчних рівнянь з n невідомими. На останньому етапі отриману систему алгебраїчних рівнянь розв’язують одним з чисельних методів. На перший погляд, ця процедура, яка складається з трьох етапів, може здатися простою і такою, що прямо проводить до розв'язку, однак насправді це не так – широке розмаїття типів і розмірів сіток, видів рівнянь із частинними похідними, можливих кінцево-різницевих апроксимацій цих рівнянь і методів розв’язання отриманих систем алгебраїчних рівнянь роблять задачу чисельного розв’язання рівнянь із частинними похідними виключно багатогранним і цікавим дослідженням.

Побудова в області розв'язку сітки, яка містить n вузлових точок. Конфігурація сітки має відповідати характеру задачі і граничним умовам

Використання диференціального рівняння з частинними похідними для отримання різницевого виразу, що описує функціональні зв'язки між сусідніми вузлами сітки

Розв'язання отриманої системи n рівнянь з n невідомими з метою отримання наближеного розв'язку у вузлах сітки

Рис. 10.1. **Етапи чисельного розв’язання диференціальних рівнянь із частинними похідними методом кінцевих різниць**

Варто розглянути тепер всі три етапи рішення детальніше.

Етап 1. Сітки, що застосовуються при поданні диференціальних рівнянь **з частинними похідними в** кінцево-різницевій формі.

Усі раніше наведені рівняння з частинними похідними були записані в декартовій системі координат, однак іноді буває зручніше користуватися іншими системами координат, що володіють спеціальними геометричними властивостями і враховують форму фізичного тіла [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Найчастіше в інженерній практиці застосовується декартова, циліндрична та сферична системи координат. На рис. 10.2 показані сітки, які найчастіше застосовують при розв’язанні рівнянь з частинними похідними – прямокутна, полярна, трикутна та скошена. Нерідко доводиться мати справу з областями неправильної форми, наприклад, такими, як зображено на рис. 10.3.

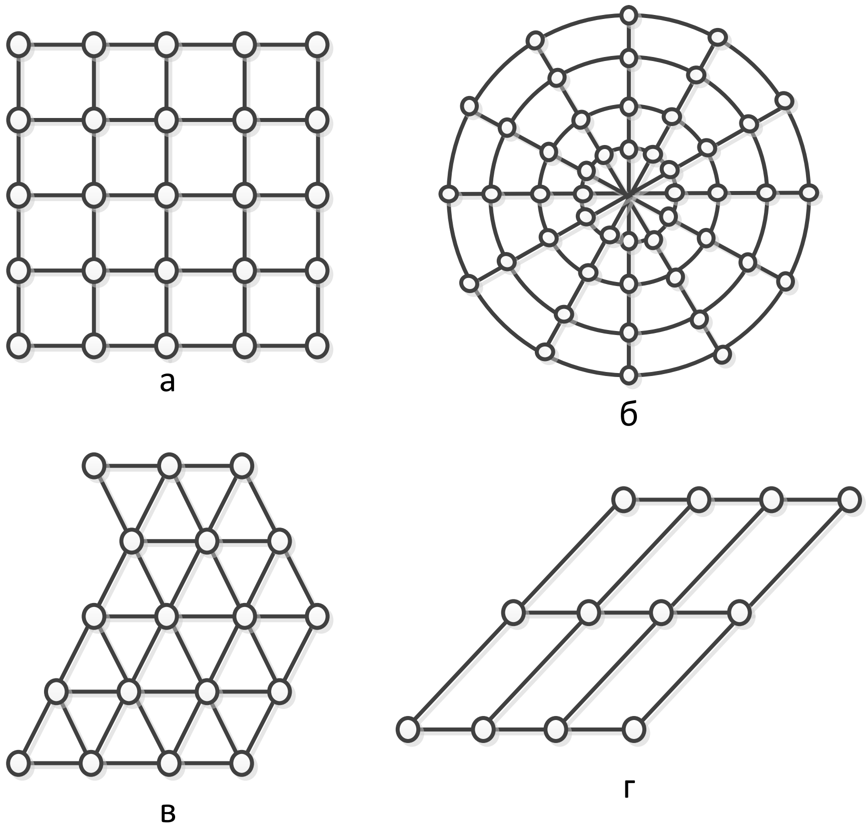


Рис. 10.2. **Види сіток, які найчастіше використовуються при чисельному розв’язанні диференціальних рівнянь в частинних похідних, а – прямокутна, б – полярна, в – трикутна, г – скошена**

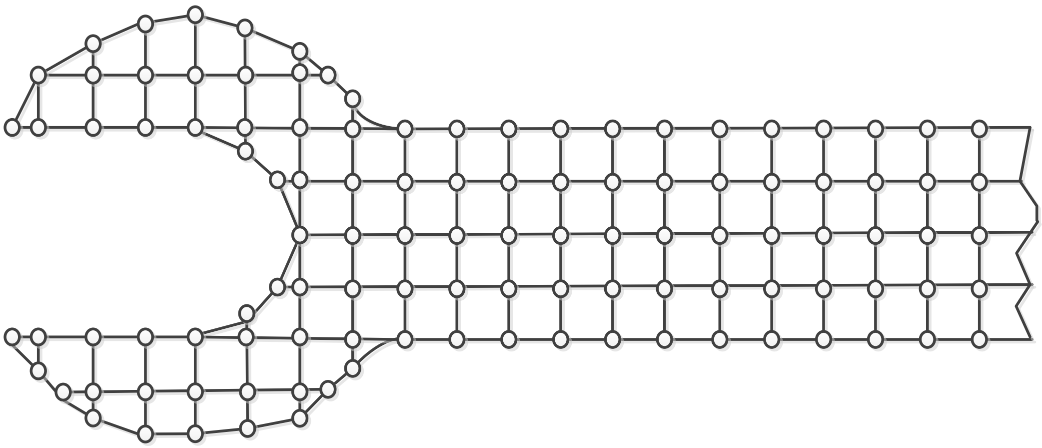


Рис. 10.3. **Приклад задачі з границею складної форми конфігурації**

Етап 2. Подання частинних похідних у кінцево-різницевому вигляді.

Для подання частинних похідних в кінцево-різницевому вигляді застосовують формули, аналогічні формулам чисельного диференціювання, що були розглянуті в розділі 8.2. Вони тільки переписуються для випадку декількох змінних. Для двох змінних на практиці найчастіше застосовують симетричні формули:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \qquad (10.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, \qquad (10.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \qquad (10.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}, \qquad (10.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2}. \qquad (10.6)$$

Тут $u_{k,m}$ – значення функції $u = u(x,y)$ у вузлах, розташованих в околі центральної точки (x_i, y_j), якій відповідає значення $u_{i,j}$.

Етап 3. Чисельні методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь на 3-му етапі методу кінцевих різниць застосовують чисельні методи, що були описані в розділах 2 та 3. Зазвичай матриці такої системи виявляються розрідженними, оскільки в більшій частині розрахункових схем застосовуються лише сусідні вузли, а не всі вузли сітки.

10.1.3. Метод кінцевих елементів для розв'язання диференціальних рівнянь із частинними похідними

Метод кінцевих елементів для опису суцільних середовищ уперше було застосовано в середені 50-х років XX століття. Він широко застосовується в гідродинаміці, теорії поля, при розрахунку складних напружених станів та в інших областях науки і техніки. Хоча метод кінцевих елементів застосовується для розв’язання тих же самих задач, що і метод кінцевих різниць, але базуються вони на різних ідеях. В методі кінцевих різниць виконується різницева апроксімація похідних, що входять в диференціальне рівняння. В той час, як у методі кінцевих елементів фізична задача замінюється кусочно-гладкою моделлю, приблизно так, як це робиться при інтерполяції функції сплайнами (див. розділ 7.6) тільки в об'ємному вигляді.

Для повного розуміння методу кінцевих елементів необхідні достатньо глибокі знання вищої математики (зокрема, знання варіаційного числення), тому обмежимось тільки коротким описом його основ. Щоб було більш зрозуміло, слід розглянути метод кінцевих елементів на прикладі дослідження напруженого стану тіла [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

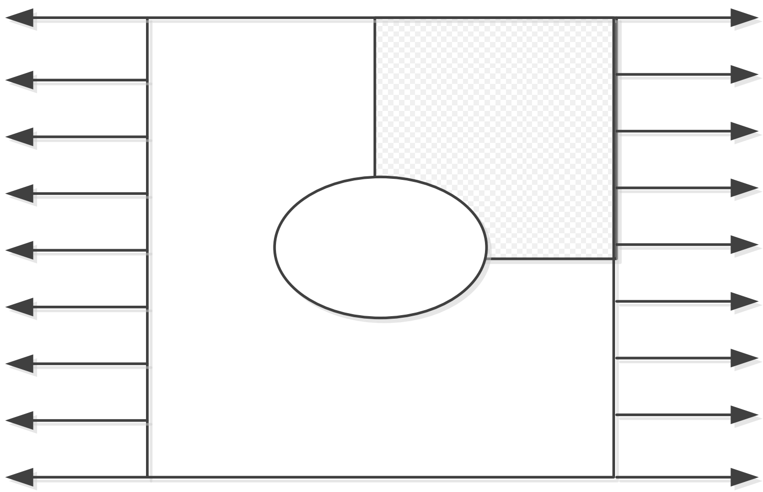
Основні етапи застосування методу кінцевих елементів вказані на рис. 10.4.

Рис. 10.4. **Етапи чисельного розв’язання задач методом кінцевих елементів**

Перший етап полягає в поділі тіла на малі елементи простої форми, що стикаються в точках, які називаються **вузлами**. Поділ на елементи можна виконати багатьма різними способами, оскільки вибір розмірів, форми й орієнтації елементів цілком визначається уявленнями інженера про те, як простіше розв’язати дану задачу. Елементи плоского тіла мають зазвичай трикутну (в цьому разі цей процес називається **тріангуляцією** – розбиття геометричного об'єкта на симплекси) або чотирикутну форму, а елементи тривимірних тіл – форму тетраедрів або гексаедрів. Ті ділянки тіла, для яких із фізичних міркувань потрібно отримати більш детальну інформацію, розбиваються на більшу кількість дрібних елементів. Якщо фізичні властивості тіла змінюються в точці або вздовж лінії, то можна змінювати форму, розміри або орієнтацію елементів на цій ділянці тіла.

На рис. 10.5 показано розбиття рівномірно навантаженої квадратної пластинки з еліптичним отвором у центрі на 26 трикутних кінцевих елементів. Оскільки пластинка має дві осі симетрії, то розглядається тільки одна її чверть. Слід звернути увагу на зменшення розмірів елементів поблизу еліптичного отвору. Це дозволяє отримати більш детальну інформацію про ті ділянки пластинки, на яких великі градієнти напружень.

а



б

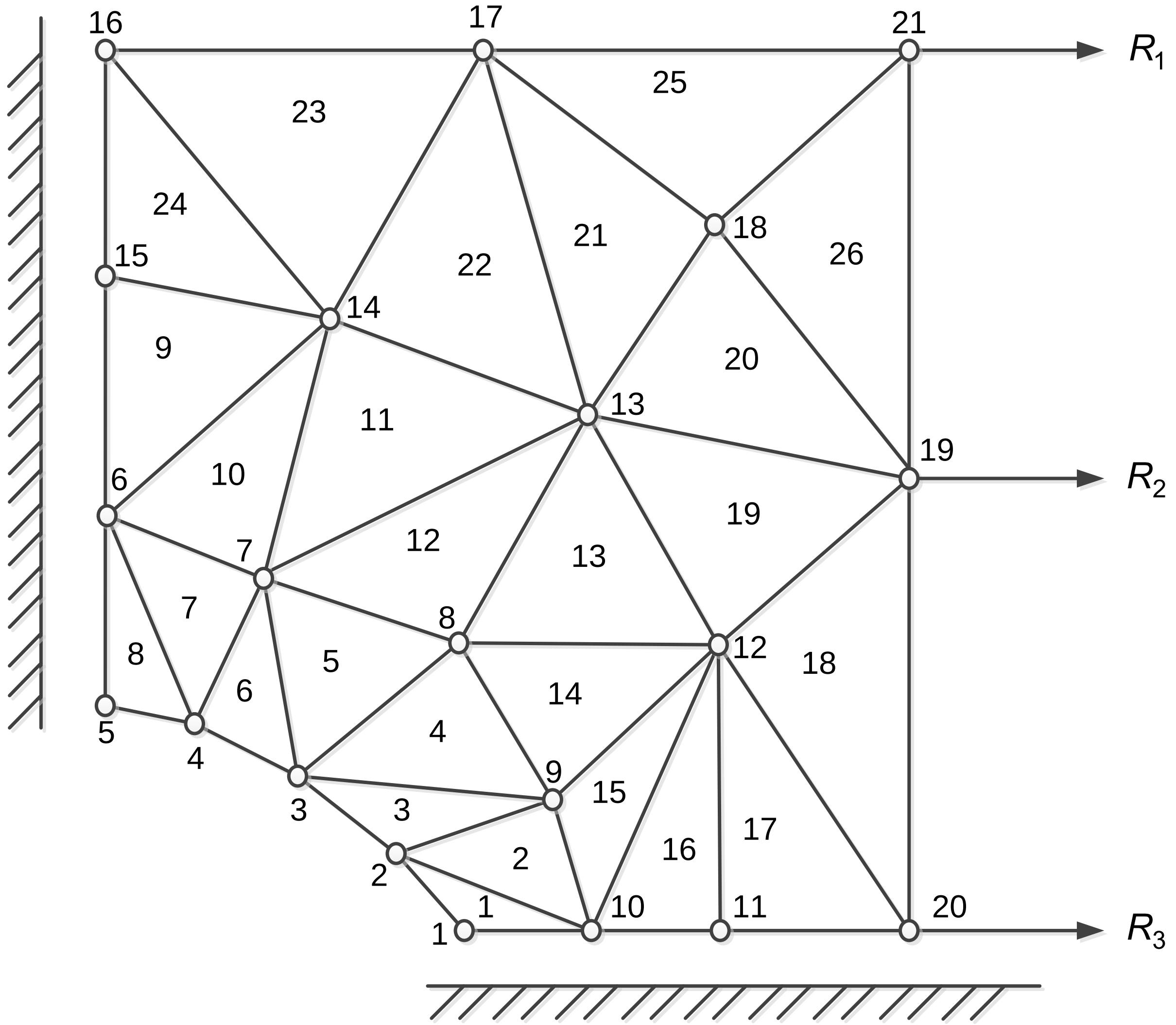


Рис. 10.5. **Розбиття рівномірно навантаженої квадратної пластинки**

Як видно з рис. 10.5, зазвичай нумерують і елементи, і вузли, оскільки це полегшує введення відправних даних у програму розрахунку методом кінцевих елементів. Рівномірне навантаження, в даному випадку, моделюється прикладанням зосереджених сил у вузлах 21, 20 і 19.

Другий етап застосування методу скінченних елементів полягає у виборі будь-якої простої схеми інтерполяції, що дозволяє виразити переміщення в будь-якій точці всередині елемента через його значення у вузлах. Зазвичай переміщення задається яким-небудь простим поліномом. У межах кожного елемента для інтерполяції значень переміщення використовуються поліноми з коефіцієнтами, обумовленими в процесі розв’язання.

На третьому етапі виписуються залежності між напруженнями і деформаціями в вузлах всіх елементів. На цій стадії з великою користю може бути використана концепція матриць і коефіцієнтів впливу. Знаючи співвідношення між напругою і деформаціями елементів, можна побудувати такі ж співвідношення для системи в цілому. При цьому деформації дотичних елементів повинні бути рівні, а сили, що діють у вузлах, повинні складати в сумі зовнішню силу, прикладену в тій же точці. У результаті отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$Ad = b,$$

де A – відома матриця жорсткості системи;

d – шуканий вектор переміщень системи,;

b – відомий вектор навантаження.

Отримана система рівнянь містить досить багато нульових елементів, оскільки не кожен вузол належить кожному елементу. У разі довільної деформації кожен з m вузлів може мати n незалежних переміщень (наприклад, по x і y в плоскому випадку). Тому матриця жорсткості A буде мати розмірність $(nm)\times(nm)$, а вектори деформації і сили – розмірність (nm). Деякі значення переміщень безпосередньо визначаються граничними умовами. Відомі значення переміщень можна виключити із системи рівнянь і тим самим знизити її порядок. Оскільки в даному випадку виходить розріджена система лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, для її розв'язання зручно користуватися методом Гауса – Зейделя (див. розділ 2.6). У результаті отримують значення переміщень для всіх вузлів. Отримавши розподіл переміщень, можна за допомогою звичайних рівнянь теорії пружності знайти розподіл напружень і деформацій.

10.2. Розв'язання параболічних рівнянь

Розглядається **рівняння теплопровідності** (дифузії)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0, \tag{10.7}$$

де $u(x,t)$ – шукана функція двох змінних (x – координата, t – час);

a – коефіцієнт теплопровідності (якщо u – температура) чи коефіцієнт масоперенесення (якщо u – концентрація речовини);

$f(x,t)$ – функція, яка задає внутрішні джерела тепла (викиду речовини).

Рівняння теплопровідності описує: процеси поширення тепла, процеси дифузії.

Для рівняння (10.7) задаються:
початкова умова (при $t = 0$)

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le L, \tag{10.8}$$

і граничні умови (при $x = 0$ и $x = L$)

$$u(0,t) = \psi(t),\ u(L,t) = \xi(t),\ t \ge 0. \tag{10.9}$$

Граничні умови (10.9) також можуть бути задані у вигляді

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(x), \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \xi(x), \tag{10.10}$$

чи комбінації (10.9) і (10.10).

В умовах (10.8) – (10.10) $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $\xi(t)$ – задані функції.

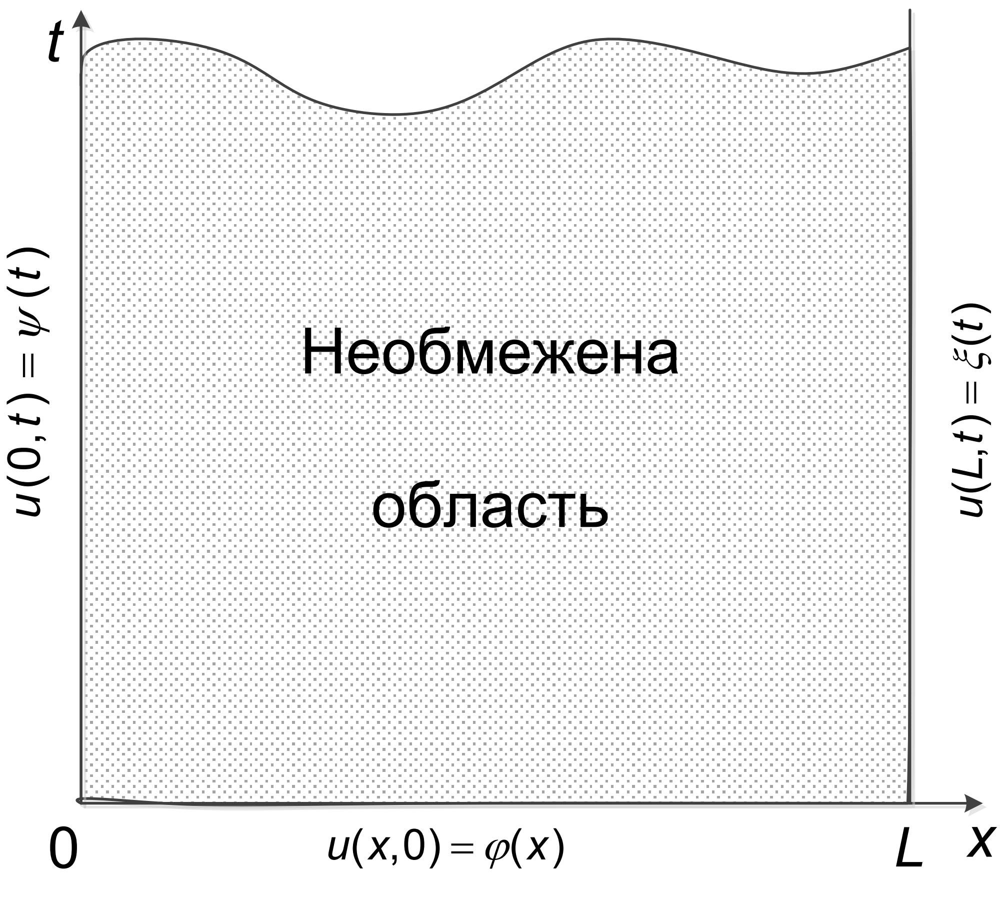


Рис. 10.6. **Область пошуку розв'язку рівняння теплопровідності**

Приклад 10.1. [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Стержень довжиною L з постійним по довжині перетином занурений в ізолюючий матеріал так, що з навколишнім середовищем взаємодіє тільки його лівий торець (див. рис. 10.7). У початковий момент часу весь стержень має рівноважну температуру $T = 0$, а його лівий торець стрибком набуває температури $T = 100^0 C$. Потрібно визначити, як буде змінюватися за часом температура в точках стрижня, розташованих на різних відстанях від його лівого торця.

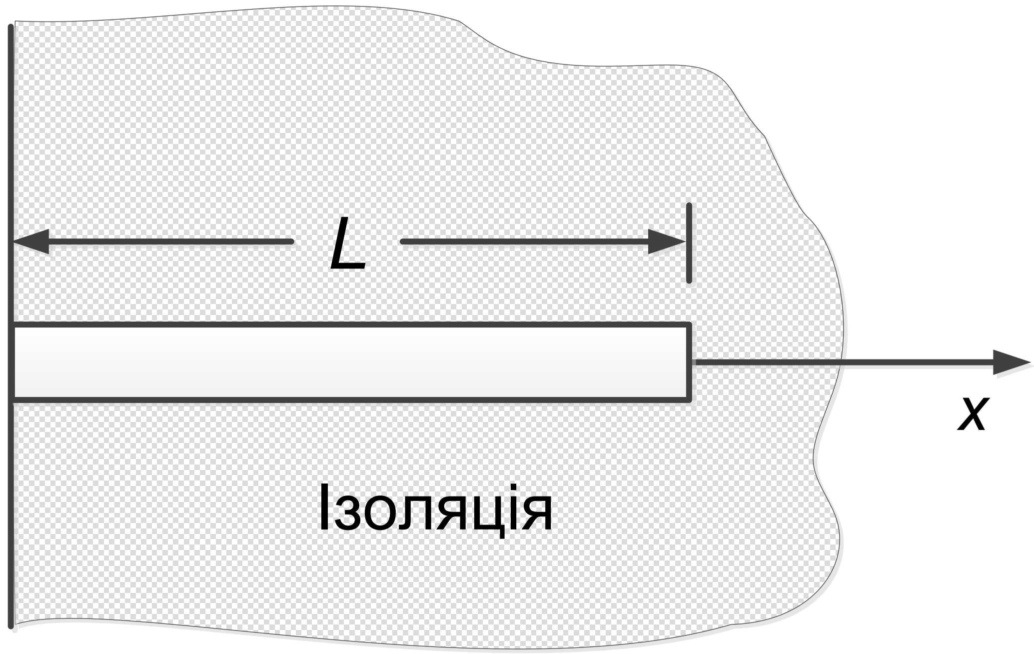


Рис. 10.7. **Стержень з постійним по довжині перетином довжиною L, що занурений в ізолюючий матеріал**

Розв'язання.

Залежність температури $T(x,t)$ від часу і положення по довжині стержня описується рівнянням з частинними похідними (10.7), а з урахуванням відсутності внутрішніх джерел тепла – рівнянням:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

де $0 \le x \le L$, $t > 0$,

a – коефіцієнт теплопровідності стержня, що залежить від теплопровідності, питомої теплоємністі та щільністі матеріалу, з якого він зроблений.

Граничні умови (при $x = 0$ і $x = L$):

$$T(0,t) = 100 = T_{0+},$$

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0 \text{ (температура не змінюється).}$$

Початкові умови (при $t = 0$):

$$T(x,0) = 0 = T_0.$$

Представивши частинні похідні в різницевому вигляді (10.3), (10.4), маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{q} - a^2 \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} = 0. \qquad (10.11)$$

Тут розглянута сітка не квадратна, а прямокута: h – крок по змінній x і q – крок по змінній t.

Прийнявши $r = \dfrac{q\,a^2}{h^2}$, отримуємо рекурентну (по часу) формулу

$$T_{i,j+1} = r\,T_{i+1,j} + (1-2r)T_{i,j} + r\,T_{i-1,j}. \qquad (10.12)$$

Цей кінцево-різницевий вираз справедливий для всіх внутрішніх вузлів і дозволяє явним чином виразити температуру в момент часу $t+q$ через температуру в момент часу t. Таким чином, немає необхідності застосовувати ітераційні методи.

Обирається величина $r = \dfrac{1}{2}$, тоді рівняння (10.12) прийме простіший вигляд:

$$T_{i,j+1} = 0.5(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}).$$

Нехай, наприклад, $a = 1$, $L = 1$ і обраний $h = 0.2$, тоді $q = \dfrac{r\,h^2}{a^2} = 0.02$. На рис. 10.8 показана сітка, що відповідає цим параметрам.

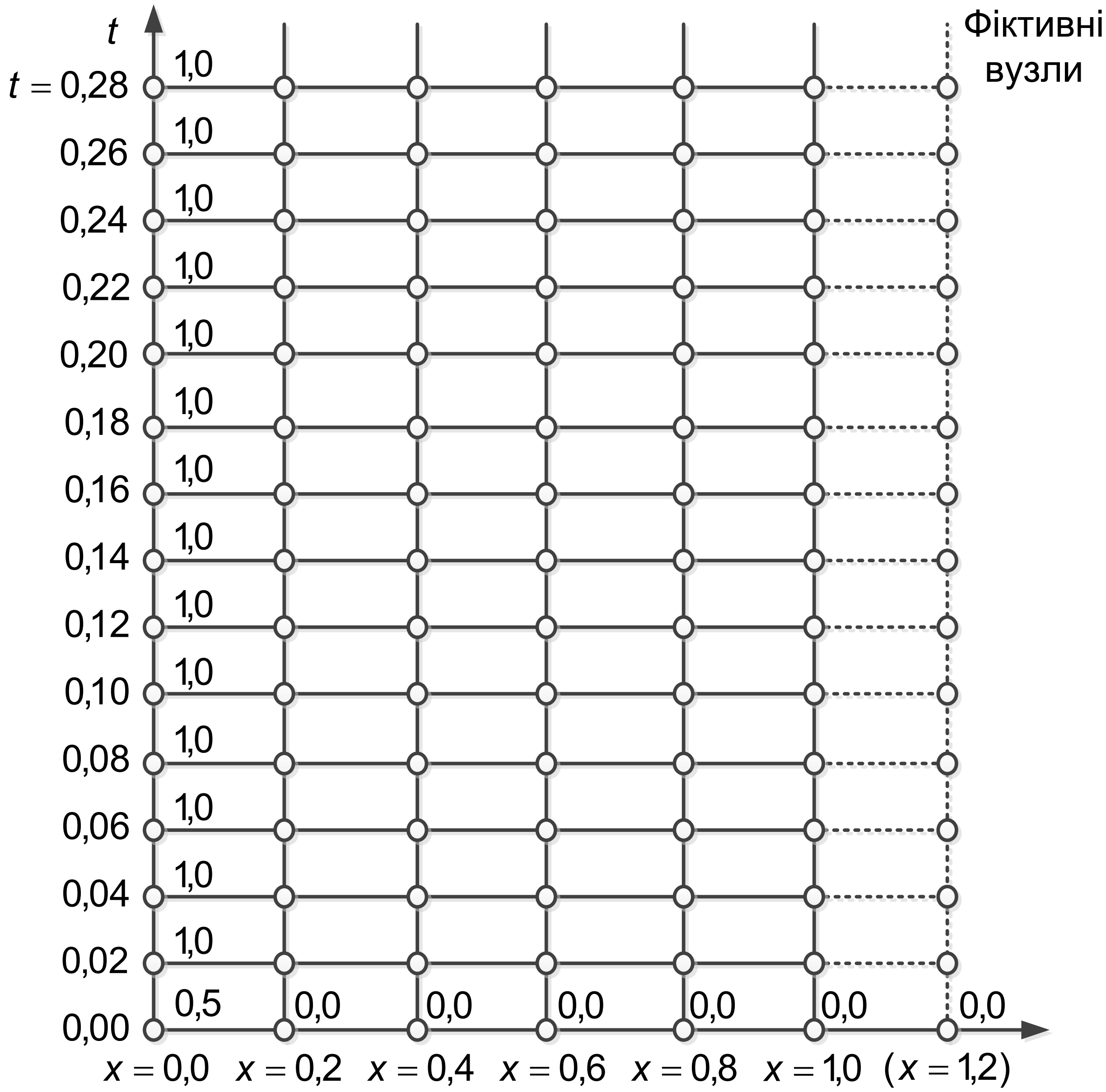


Рис. 10.8. **Сітка для стержня з постійним по довжині перетином довжиною L, що занурений в ізолюючий матеріал**

Оскільки гранична умова і початкова умова в точці початку координат терплять розрив, то температурі тут приписується значення $T(0{,}0) = 50$ – середнє між двома можливими значеннями. Зазвичай саме так чинять при вирішенні подібних завдань. Нульовий нахил дотичної в правій частині стержня моделюється введенням при x = 1,2 лінії фіктивних вузлів, температура в яких дорівнює температурі у вузлах при x = 0,8. За допомогою цієї сітки і рекурентної формули можна отримати розв'язок для будь-якого моменту часу.

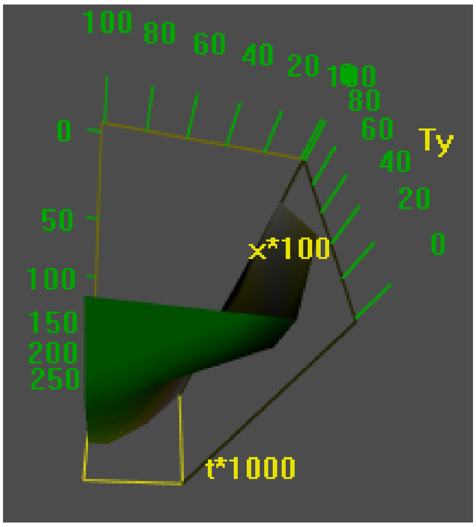
Розв'язання в математичному пакеті *R*

```
# процедура розв'язку параболічного диф. рівняння
# методом кінцевих різниць

# Відправні данні задачі
a = 1
L = 1
T0p = 100
T0 = 0

xL = 0
xR = L
tL = 0
tR = 0.28
h = 0.2
q = h*h/(2*a*a)
nx = (xR - xL)/h
nt = (tR - tL)/q
> T = matrix(0, nrow=(nx+2), ncol=(nt+2))
>
> T[1,1] = (T0p + T0)/2
> for (i in 2:(nx+2))
+     T[i,1] = T0
> for (j in 2:(nt+1))
+     T[1,j] = T0p
>
> for (j in 2:nt)
+ {
+     for (i in 2:(nx+1))
+         T[i,j+1] = 0.5*(T[i+1,j] + T[i-1,j])
+     T[nx+2,j+1] = T[nx,j+1]
+ }
> T
     [,1] [,2] [,3] [,4]  [,5]   [,6]    [,7]     [,8]      [,9]     [,10]
[1,]   50  100  100  100 100.0 100.00 100.000 100.0000 100.00000 100.00000
[2,]    0    0   50   50  62.5  62.50  68.750  68.7500  72.65625  72.65625
[3,]    0    0    0   25  25.0  37.50  37.500  45.3125  45.31250  51.17188
[4,]    0    0    0    0  12.5  12.50  21.875  21.8750  29.68750  29.68750
[5,]    0    0    0    0   0.0   6.25   6.250  14.0625  14.06250  21.87500
[6,]    0    0    0    0   0.0   0.00   6.250   6.2500  14.06250  14.06250
[7,]    0    0    0    0   0.0   6.25   6.250  14.0625  14.06250  21.87500
         [,11]     [,12]     [,13]     [,14]     [,15]
[1,] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[2,]  75.58594  75.58594  78.02734  78.02734  80.16357
[3,]  51.17188  56.05469  56.05469  60.32715  60.32715
[4,]  36.52344  36.52344  42.62695  42.62695  48.12012
[5,]  21.87500  29.19922  29.19922  35.91309  35.91309
[6,]  21.87500  21.87500  29.19922  29.19922  35.91309
[7,]  21.87500  29.19922  29.19922  35.91309  35.91309
```

```
> x1 = seq(xL, xR, by=h)
> t1 = seq(tL, tR, by=q)
> x1 = 100*x1
> t1 = 1000*t1
> # Відрізаються мнимі точки
> T1 = matrix(0, nrow=(nx+1), ncol=(nt+2))
> for (j in 1:(nt+1))
+ {
+    for (i in 1:(nx+1))
+       T1[i,j] = T[i,j]
+ }
> # побудова графіка зміни температури стержня у часі
> library(rgl)
> ylim = range(T1)
> ylen = ylim[2] - ylim[1] + 1
> # height color lookup table
> colorlut = terrain.colors(ylen)
> # assign colors to heights for each point
> col = colorlut[ T1-ylim[1]+1 ]
>
> rgl.surface(x1, t1, T1, coords=1:3, color=col, back="fill")
> axes3d()                    # виведення осей на графік
> title3d('','','x*100','Ty','t*1000') # виведення назв осей
```



10.3. Розв'язання гіперболічних рівнянь

Розглядається **хвилеве рівняння**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0, \qquad (10.13)$$

де $u(x,t)$ – шукана функція двох змінних (x – координата, t – час);

a – швидкість розповсюдження збурювання (u – відхилення від рівноваги);

$f(x,t)$ – функція, яка задає внутрішні джерела енергії.

Хвилеве рівняння описує: малі подовжні коливання стержня, поперечні коливання струни, процеси поширення малих акустичних коливань тощо.

Для рівняння (10.13) задаються:

початкові умови (при $t = 0$)

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x),\ 0 \le x \le L \qquad (10.14)$$

і граничні умови (при $x = 0$ і $x = L$)

$$u(0,t) = \psi(t),\ u(L,t) = \xi(t),\ t \ge 0\,. \qquad (10.15)$$

В умовах (10.14), (10.15) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi(t)$, $\xi(t)$ – задані функції.

Граничні умови (10.15) також можуть бути задані у вигляді

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(x),\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \xi(x), \qquad (10.16)$$

чи комбінації (10.15) і (10.16).

10.4. Розв'язання еліптичних рівнянь

Розглядається **рівняння Пуассона**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)\,,\ (x,y) \in G\,, \qquad (10.17)$$

де $u(x,y)$ – шукана функція двох змінних (x, y – координати);

G – задана область (тіло);

$f(x,t)$ – функція, яка задає внутрішні джерела енергії (чи відтоків).

Якщо $f(x,t) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in G$, то рівняння (10.17) називається **рівнянням Лапласа**.

Рівняння Лапласа і Пуассона описують: потоки ідеальних рідин в стаціонарних потоках, стаціонарний розподіл температури або напруженості електричних і магнітних полів. Рівняння Лапласа описує ці процеси за відсутності внутрішніх джерел енергії (чи відтоків).

Для рівняння (10.10) задаються лише граничні умови (Γ – межа області G):

1) 1-ша крайова задача (**задача Діріхле**):

$$u\big|_{\Gamma} = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \qquad (10.18)$$

2) 2-га крайова задача (**задача Неймана**):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \qquad (10.19)$$

3) 3-тя крайова задача (комбінована):

$$\alpha\, u\big|_{\Gamma} + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \qquad (10.20)$$

В умовах (10.19) і (10.20) n – зовнішня нормаль відносно області G в точці $(x,y) \in \Gamma$, $\phi(x,y)$ – задана функція на межі Γ області G.

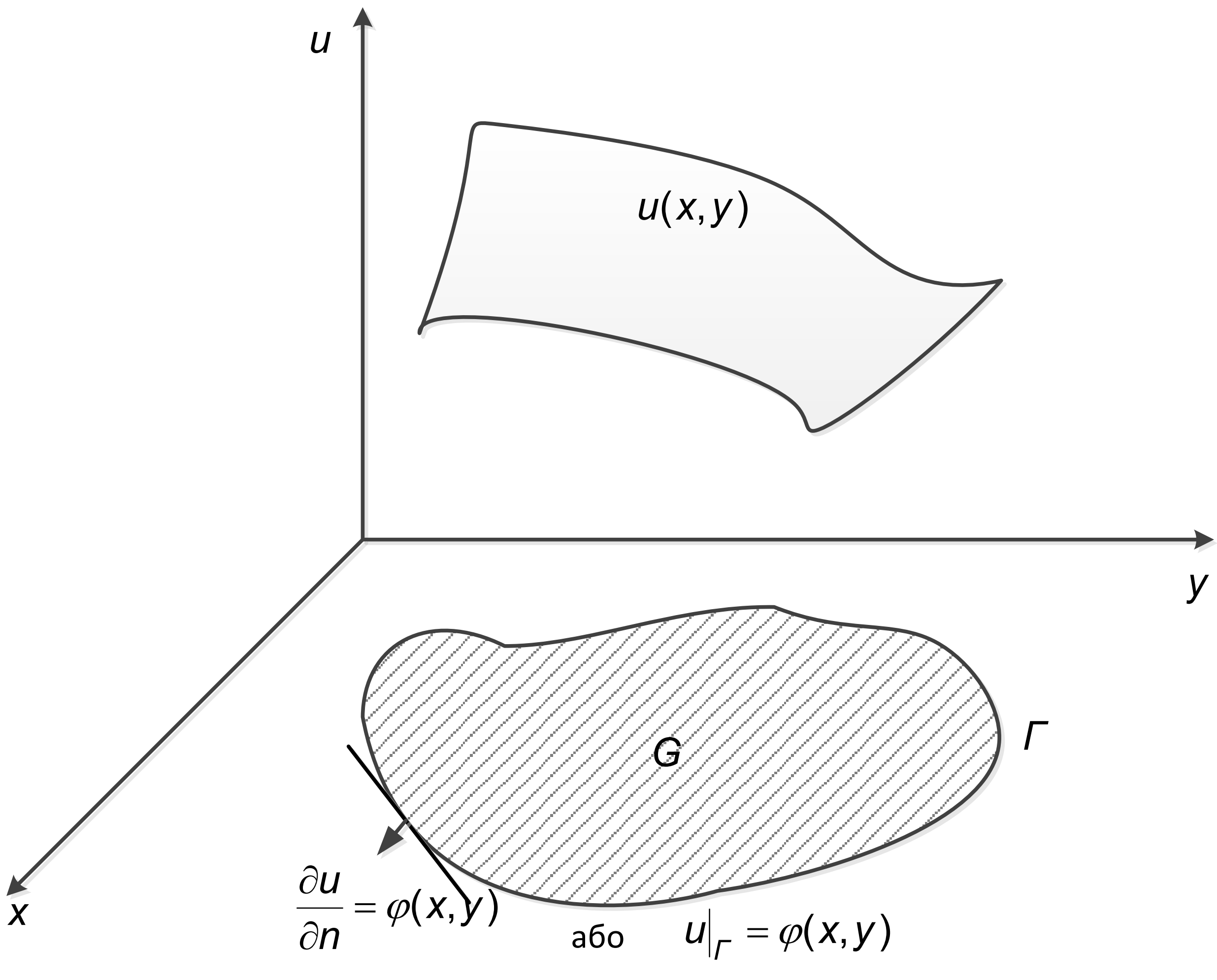


Рис. 10.9. **Розв'язання еліптичного рівняння**

Приклад 10.2 [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Вимагається знайти стаціонарний розподіл температури $u(x, y)$ в квадратній однорідній пластині розміру 1x1, для якої задані такі граничні умови: $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 100$, $u(x,0) = 100x$, $u(x,1) = 100x^2$. Температура вимірюється у градусах Цельсія.

Розв'язання. Оскільки процес стаціонарний і немає внутрішніх джерел тепла, то розподіл температури в пластині описується рівнянням Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Для того, щоб сформулювати і розв'язати задачу методом кінцевих різниць введемо на пластині двовимірну сітку з відстанню між вузлами $h = 0.25$ (рис. 10.10).

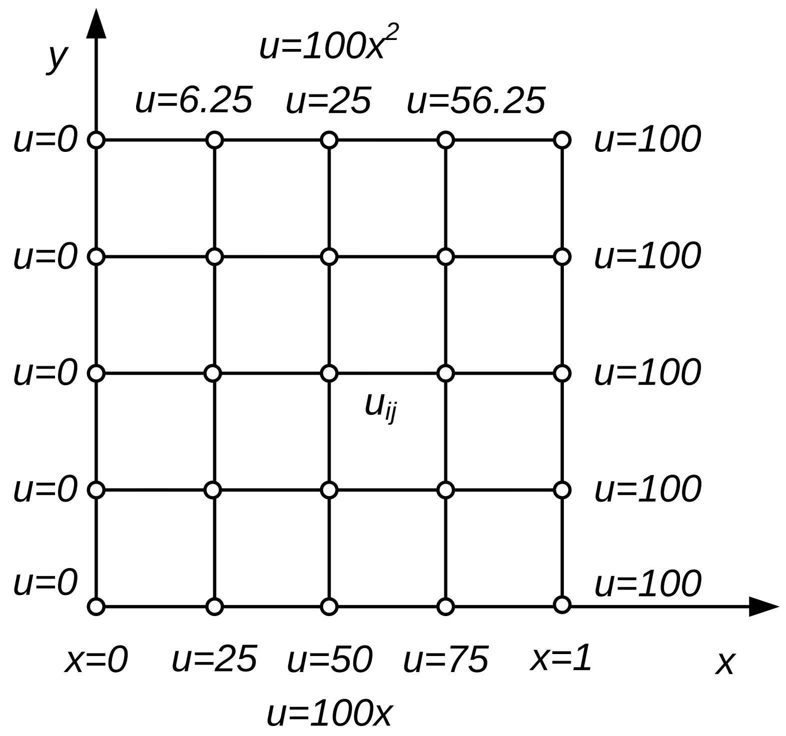


Рис. 10.10. **Двовимірна сітка на пластині**

Сітка складається з 25 вузлів, у 16 з яких температура відома з граничних умов. Таким чином, задача полягає у визначенні температури в 9 внутрішніх вузлах.

Замінюючи у вузлах (i,j) частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ на симетричні кінцево-різницеві формули

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad , \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2},$$

отримуємо співвідношення

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4},$$

з якого й отримується формула для обчислень за методом ітерацій:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}}{4}.$$

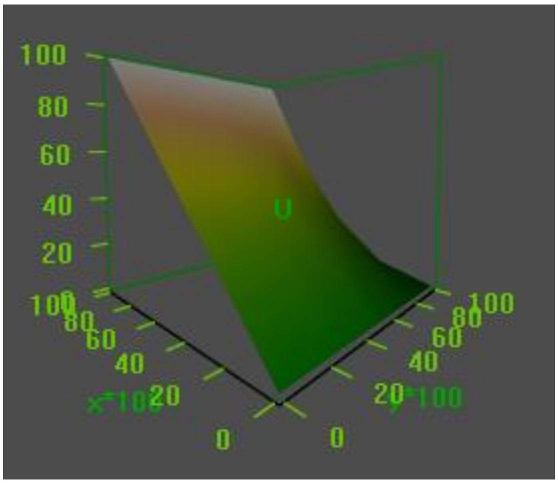
Початкові значення температури $u_{i,j}^{(0)}$ у вузлах (i,j) можна задати за допомогою лінійної інтерполяції.

Розв'язання в математичному пакеті *R*

```
# процедура розв'язку еліптичного диф. рівняння
# методом кінцевих різниць
# Відправні данні задачі
xL = 0
xR = 1
yL = 0
yR = 1
Fi1 = function(x, y){ return( 0 ) }
Fi2 = function(x, y){ return( 100 ) }
Fi3 = function(x, y){ return( 100*x ) }
Fi4 = function(x, y){ return( 100*x*x ) }

h = 0.25
nx = (xR - xL)/h
ny = (yR - yL)/h
x = seq(xL, xR, by=h)
y = seq(yL, yR, by=h)
```

```
> U = matrix(0, nrow=(nx+1), ncol=(ny+1))
>
> for (i in 1:(nx+1))
+    U[i,1] = Fi3(x[i], y[1])
> for (i in 1:(nx+1))
+    U[i,ny+1] = Fi4(x[i], y[ny+1])
> for (j in 1:(ny+1))
+    U[1,j] = Fi1(x[1], y[j])
> for (j in 1:(ny+1))
+    U[nx+1,j] = Fi2(x[nx+1], y[j])
>
> for (j in 2:ny)
+    for (i in 2:nx)
+       U[i,j] = U[i,1]
> U
     [,1] [,2] [,3] [,4]   [,5]
[1,]    0    0    0    0   0.00
[2,]   25   25   25   25   6.25
[3,]   50   50   50   50  25.00
[4,]   75   75   75   75  56.25
[5,]  100  100  100  100 100.00
> kmax = 100
> for (k in 1:kmax)
+ {
+    for (j in 2:ny)
+     for (i in 2:nx)
+      U[i,j] = (U[i-1,j] + U[i+1,j] + U[i,j-1] + U[i,j+1])/4
+ }
> U
     [,1]      [,2]      [,3]      [,4]   [,5]
[1,]    0   0.00000   0.00000   0.00000   0.00
[2,]   25  23.49330  21.09375  16.35045   6.25
[3,]   50  47.87946  44.53125  38.05804  25.00
[4,]   75  73.49330  71.09375  66.35045  56.25
[5,]  100 100.00000 100.00000 100.00000 100.00
> x
[1] 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
> y
[1] 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
> x = x*100
> y = y*100
> # побудова графіка розподілу температури на пластині
> library(rgl)
> ylim = range(U)
> ylen = ylim[2] - ylim[1] + 1
> colorlut = terrain.colors(ylen) # height color lookup table
> col = colorlut[ U-ylim[1]+1 ]   # assign colors to heights for each point
>
> rgl.surface(x, y, U, coords=1:3, color=col, back="fill")
> axes3d()                      # виведення осей на графік
> title3d('','','x*100','U','y*100') # виведення назв осей
```



10.5. Висновки

1. Для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними доводиться вибирати в основному між методом **кінцевих різниць** і методом **кінцевих елементів**.

2. Розмаїття типів і розмірів сіток, видів рівнянь з частинними похідними, можливих кінцево-різницевих апроксимацій цих рівнянь і методів розв'язання отриманих систем алгебраїчних рівнянь роблять задачу чисельного розв'язання рівнянь з частинними похідними методом кінцевих різниць виключно багатогранним дослідженням.

10.6. Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку з двома змінними. Які типи класифікації використовуються для цих рівнянь?

2. Наведіть класифікацію диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома змінними залежно від фізичного сенсу розв'язуваних з їх допомогою задач.

3. Наведіть класифікацію диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома змінними залежно від їх математичної природи.

4. Сформулюйте постановку задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

5. Сформулюйте постановку задачі розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку з двома змінними для рівняння параболічного типу.