ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Тема 2. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад 1. Знайдемо розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 19, \\ -x_1 + 2x_2 = -8 \end{cases}$$

за правилом Крамера.

Обчислимо визначники Δ, Δ_1, Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-5) \cdot (-1) = 4 - 5 = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & -5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 19 \cdot 2 - (-5) \cdot (-8) = 38 - 40 = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 19 \cdot (-1) = -16 + 19 = 3.$$

Звідки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Перевіримо отриманий розв'язок, підставивши у задану систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \equiv 19, \\ -2 + 2 \cdot (-3) \equiv -8. \end{cases}$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

2.1. Знайти розв’язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера:

1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 = -8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ -x_1 - 4x_2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x_1 - 10x_2 = 2, \\ -9x_1 + 11x_2 = 5. \end{cases}$

(*Відповіді:* 1) $x_1 = 1, x_2 = -2$; 2) $x_1 = 4, x_2 = 5$; 3) $x_1 = -4, x_2 = 1$; 4) $x_1 = -3, x_2 = -2$)

Приклад 2. Знайдемо розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3, \\ -3x_1 - x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

за правилом Крамера, методом оберненої матриці, методом Гаусса.

1) За **правилом Крамера** необхідно спочатку обчислити визначники Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 6 + (-4) \cdot 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot (-3) - (-4) \cdot 2 \cdot 6 - (-1) \cdot 3 \cdot (-3) = 56;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -168;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 112;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -56.$$

Після чого значення невідомих x_1, x_2, x_3 обчислюються за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-168}{56} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-56}{56} = -1.$$

2) Для застосування **методу оберненої матриці (або матричного методу)** спочатку запишемо задану систему у матричному вигляді $A \cdot X = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити обернену матрицю A^{-1} до матриці коефіцієнтів A, і помноживши на A^{-1} зліва обидві частини матричної рівності $A \cdot X = B$, отримаємо розв'язок заданої системи:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці A ми вже обчислили, коли застосовували правило Крамера: $|A| = \Delta = 56 \neq 0$, звідки можемо стверджувати, що обернена матриця дійсно існує. Обчислимо всі елементи приєднаною (або союзної) матриці – алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 3 = 21,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -(12 + 9) = -21,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -(-24 - 1) = 25,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -3 & 6\end{vmatrix}=-6-3=-9,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-(1-12)=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-12+3=-9,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-(-3+2)=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3+8=5.$$

І ми можемо виписати обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{56}\cdot\begin{pmatrix}21 & 25 & -9\\ -21 & -9 & 1\\ 7 & 11 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{21}{56} & \frac{25}{56} & \frac{-9}{56}\\ \frac{-21}{56} & \frac{-9}{56} & \frac{1}{56}\\ \frac{7}{56} & \frac{11}{56} & \frac{5}{56}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{25}{56} & \frac{-9}{56}\\ \frac{-3}{8} & \frac{-9}{56} & \frac{1}{56}\\ \frac{1}{8} & \frac{11}{56} & \frac{5}{56}\end{pmatrix}.$$

Розв’язок заданої системи знаходимо наступним чином:

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{25}{56} & \frac{-9}{56} \\ \frac{-3}{8} & \frac{-9}{56} & \frac{1}{56} \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{56} & \frac{5}{56} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\cdot \begin{pmatrix} 21 & 25 & -9 \\ -21 & -9 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{56}\cdot \begin{pmatrix} 21\cdot(-4)+25\cdot(-3)+(-9)\cdot 1 \\ -21\cdot(-4)+(-9)\cdot(-3)+1\cdot 1 \\ 7\cdot(-4)+11\cdot(-3)+5\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 112 \\ -56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

тобто отримали розв’язок:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

---

3) Знайдемо розв’язок системи рівнянь за допомогою **методa Гаусса**. Запишемо розширену матрицю системи

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

та за допомогою елементарних перетворень приведемо її до верхньої трикутної форми, тобто до вигляду $\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Помножимо перший рядок на (-1), бо зручніше, коли на місці (1,1) знаходиться одиниця

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Віднімемо з 2 рядка 1 рядок, помножений на 2, а до 3 рядка додамо1 рядок, помножений на 3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 11 & 9 & 13 \end{array}\right)\sim$$

Для того, щоб на місці (3,2) зробити 0, додамо до 3 рядка 2 рядок, розділений на 5 та помножений на 11

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{56}{5} & -\frac{56}{5} \end{array}\right).$$

Отримали трикутну матрицю і можемо послідовно, починаючи з x_3, знайти всі невідомі

Для знаходження розв'язку повернемось до системи, але вже з матрицею, яку ми привели до трикутної форми

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b_j \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{56}{5} & -\frac{56}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot x_1+4\cdot x_2+1\cdot x_3=4, \\ 0\cdot x_1-5\cdot x_2+1\cdot x_3=-11, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+\frac{56}{5}\cdot x_3=-\frac{56}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+4x_2+x_3=4, \\ -5x_2+x_3=-11, \\ x_3=-1. \end{cases}$$

І так званим зворотним ходом – починаючи з останнього рівняння послідовно знайдемо всі невідомі x_3, x_2, x_1:

$$x_3=-1,$$

$$\downarrow$$

$$x_2=-\frac{1}{5}(-x_3-11)=-\frac{1}{5}(1-11)=\frac{10}{5}=2,$$

$$\downarrow$$

$$x_1=-4x_2-x_3+4=-4\cdot 2-(-1)+4=-3,$$

і ми отримали розв'язок системи рівнянь: $x_1=-3, x_2=2, x_3=-1.$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

2.2. Знайти розв’язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера, методом оберненої матриці, методом Гаусса:

1) $\begin{cases} -2x_1+3x_2-4x_3=22, \\ 2x_1-x_2-2x_3=0, \\ -4x_1+2x_2-3x_3=21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+6x_3=40, \\ -2x_1+2x_2-3x_3=-19, \\ 5x_1-2x_2-x_3=24; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x_1+2x_2+5x_3=1, \\ -2x_1-x_2+3x_3=5, \\ -3x_1-2x_2+5x_3=5. \end{cases}$

Відповіді: 1) $x_1=-2, x_2=2, x_3=-3;$ $|A|=28;$ $A^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{28} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{14} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{vmatrix};$

2) $x_1=3, x_2=-5, x_3=1;$ $|A|=25;$ $A^{-1}=\begin{vmatrix} -\frac{8}{25} & -\frac{17}{25} & \frac{3}{25} \\ -\frac{17}{25} & -\frac{33}{25} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{6}{25} & -\frac{19}{25} & -\frac{4}{25} \end{vmatrix};$

3) $x_1=-4, x_2=6, x_3=1;$ $|A|=11;$ $A^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{20}{11} & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{35}{11} & -2 \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \end{vmatrix}.$