Тема 2. Фрактальна 3D-графіка

Лабораторне заняття 3. Вивчення математичних основ фракталів

Мета роботи: моделювання алгебраїчних фракталів у середовищі Mathcad.

3.1. Фрактальна 3D-графіка

Слово "фрактал" з'явилося завдяки геніальному вченому Бенуа Мандельброту [8, 15]. Він увів цей термін у сімдесятих роках минулого століття, запозичивши слово *fractus* із латини, де воно буквально означає ламаний або роздрібнюваний. Сьогодні під словом "фрактал" найчастіше прийнято мати на увазі графічне зображення структури, яка в більшому масштабі подібна сама до себе.

Французький математик Лейбніц побудував фрактал на основі простої формули, проітерованой циклом зворотного зв'язку. Це означає, що конкретне значення числа знаходиться на основі попереднього.

Мандельброт був першим, хто використовував комп'ютер для прорахунку класичного фрактала. Обробивши послідовність, що складається з великої кількості значень, Бенуа переніс результати на графік (рис. 2.1).

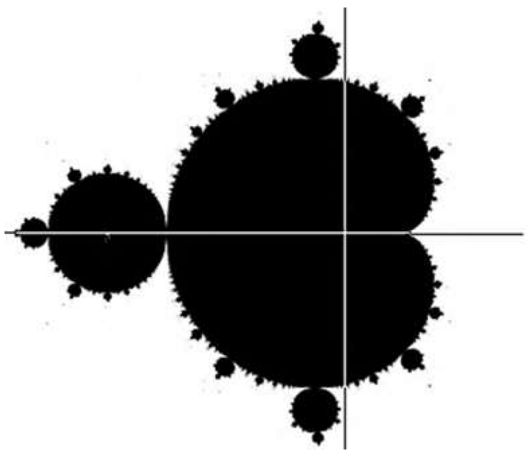


Рис. 2.1. **Фрактал Мандельброта**

Фрактали дозволяють описувати цілі класи зображень, для детального опису яких потрібно відносно мало пам'яті. Програмні засоби для роботи з фрактальною графікою призначені для автоматичної генерації зображень шляхом математичних розрахунків. Створення фрактальної художньої композиції полягає не у малюванні або оформленні, а у програмуванні. Таким чином, для створення конкурентоспроможних і комерційних фракталів потрібне знання чисельних методів.

Математичною основою фрактальної графіки є фрактальна геометрія. У сучасній науково-технічній літературі розглядається велика кількість різних методів синтезу фрактальних зображень [5]. Для того щоб розібратися в них, треба їх класифікувати. Існують класифікації, наприклад, рукотворні та природні. До рукотворних належать ті фрактали, які були придумані вченими, вони за будь-якого масштабу мають фрактальні властивості. На природні фрактали накладається обмеження на область існування, тобто максимальний і мінімальний розміри, за яких в об'єкта спостерігаються фрактальні властивості. Уся рукотворна множина фракталів поділяється на геометричні, алгебраїчні і стохастичні.

Геометричні фрактали – найнаочніші, тому що в них відразу видно самоподібність. Прикладом таких кривих слугує трикутник Серпінського. Побудова трикутника Серпінського заснована на методі Iterated Function System (IFS) [5,8]. IFS – це сукупність стискальних афінних перетворень. Як відомо, афінние перетворення охоплює масштабування, поворот і паралельне перенесення. Афінне перетворення вважається стискальним, якщо коефіцієнт масштабування менший від одиниці.

Декілька різних варіантів реалізації трикутника Серпінського наведено на рис. 2.2. Перший є класичним трикутником Серпінського, інший імітує "комаху" і третій – архітектурну споруду.

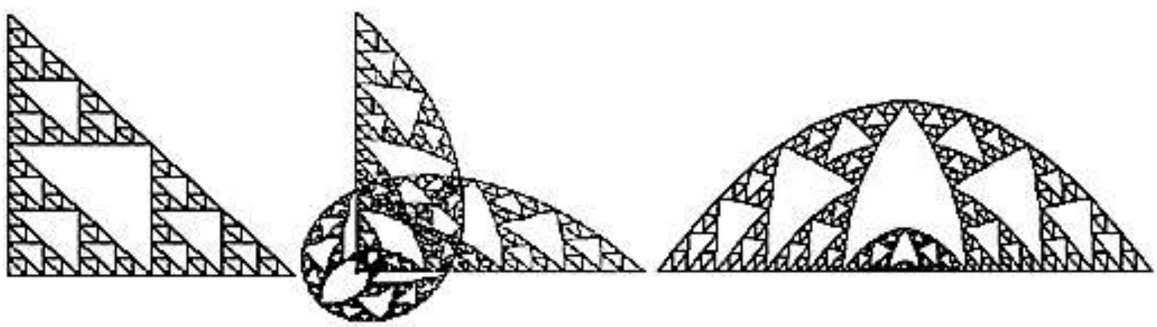


Рис. 2.2. **Варіанти трикутника Серпінського**

Для побудови алгебраїчних фракталів використовуються ітерації нелінійних відображень, задаються простими формулами алгебри.

Прикладами алгебраїчних фракталів є безлічі Мандельброта і Жюліа (рис. 2.3).

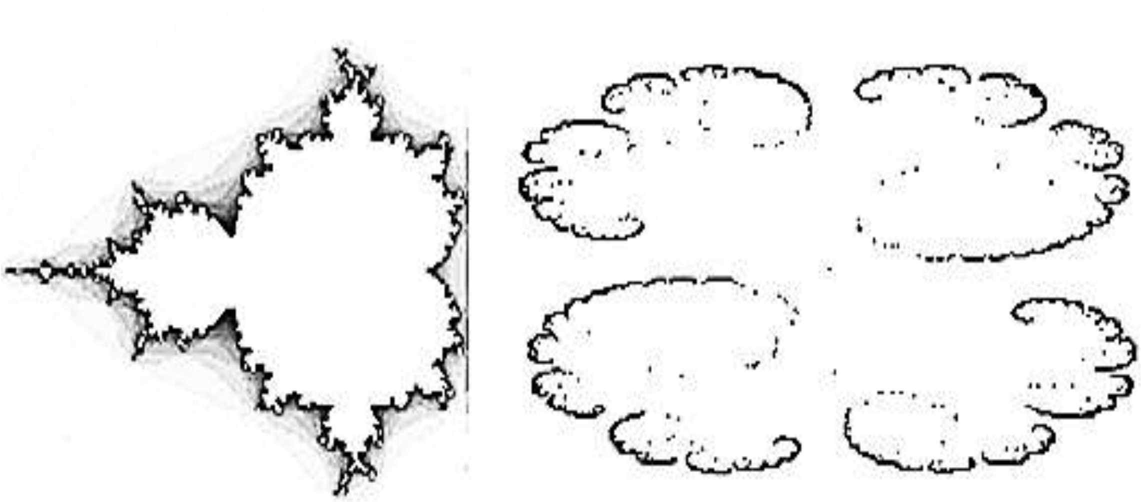


Рис. 2.3. **Множини Мандельброта і Жюліа**

Алгоритм побудови алгебраїчних фракталів досить простий і заснований на створенні фрактальних об'єктів на площині. Сутнисть методу полягає в тому, що одне комплексне число $Z_n = x_n + iy_n$ перетвориться в інше комплексне число $Z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ за ітераційними правилами, представлено формулою $Z_n + 1 = f(Z_n)$, де $f(Z_n)$ – певна нелінійна функція Z_n, n – номер ітерації.

Ще одним відомим класом фракталів є стохастичні фрактали, які отримують у тому випадку, коли в ітераційному процесі випадковим чином змінюють які-небудь його параметри. У цьому разі виходять об'єкти, дуже схожі на природні, – несиметричні дерева, порізані берегові лінії і тощо. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються під час моделювання рельєфу місцевості та поверхні моря.

Алгоритм побудови стохастичних фракталів ще називають грою в "хаос", як початкову множину вибирають одну точку:

x_0 – початкова точка (з довільними координатами)

$x_1 = T_1(x_0)$ або $T_2(x_0)$ або $T_3(x_0)$

…

$x_n = T_1(x_n - 1)$ або $T_2(x_n - 1)$ або $T_3(x_n - 1)$.

На кожному кроці, замість того щоб застосовувати відразу три перетворення $T_1(S)$, $T_2(S)$, $T_3(S)$, застосовується тільки одне, вибране випадковим чином. Таким чином, на кожному кроці виходить рівно одна точка. Виявляється, що після певного перехідного процесу точки, згенеровані алгоритмом, точно заповнюють фрактальное зображення.

Чудовою властивістю алгоритмів, заснованих на теорії IFS, є те, що їхній результат (атрактор) абсолютно не залежить від вибору початкової множини E_0 або початкової точки x_0. У разі детермінованого алгоритму це означає, що як E_0 можна взяти будь-яку компактну множину на площині: гранична множина, як і раніше, співпадатиме із заданим фрактальним зображенням. У разі застосування алгоритму побудови стохастичних фракталів вибір початкової точки x_0 не впливає на формування заданого фрактального зображення.

Для рівномірного розподілу точок по екрану в алгоритмі побудови стохастичних фракталів афінне перетворення слід вибирати з імовірністю (2.1):

$$P_i = \frac{\det(A_i)}{\sum_{j=1}^{m} \det(A_j)}, \quad 2.1$$

де A_i – матриця відповідного афінного перетворення (i = 1, 2, …, m).

Очевидно, що $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

За допомогою алгоритму побудови стохастичних фракталів створюються складні фрактали (рис. 2.4).

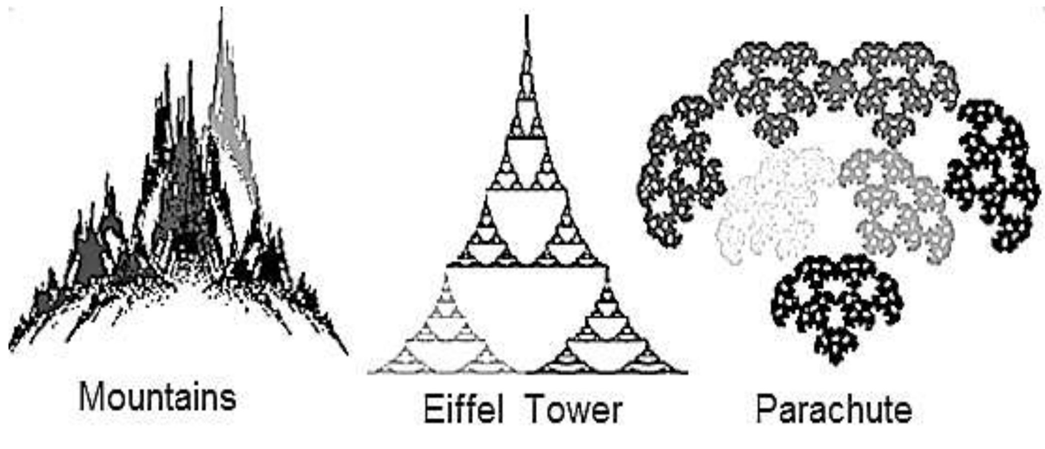


Рис. 2.4. **Стохастичні фрактали**

Завдання 3.1. Генерація алгебраїчного фрактала в середовищі Mathcad

Параметри генерації алгебраїчного фрактала:

N – розмір фрактального зображення в пікселях по x і y;

rl, ru, il, iu – границі комплексної площині для ітерації;

mi – максимальна кількість ітерацій для кожної точки;

b – радіус обмеження.

Лістинг генерації матриці комплексних чисел наведено на рис. 2.5.

$$N := 1000 \quad ru := -0.75 \quad iu := -0.75 \quad b := 2$$

$$rl := 0.75 \quad il := 0.75 \quad mi := 500$$

$$i := 0..N \quad j := 0..N$$

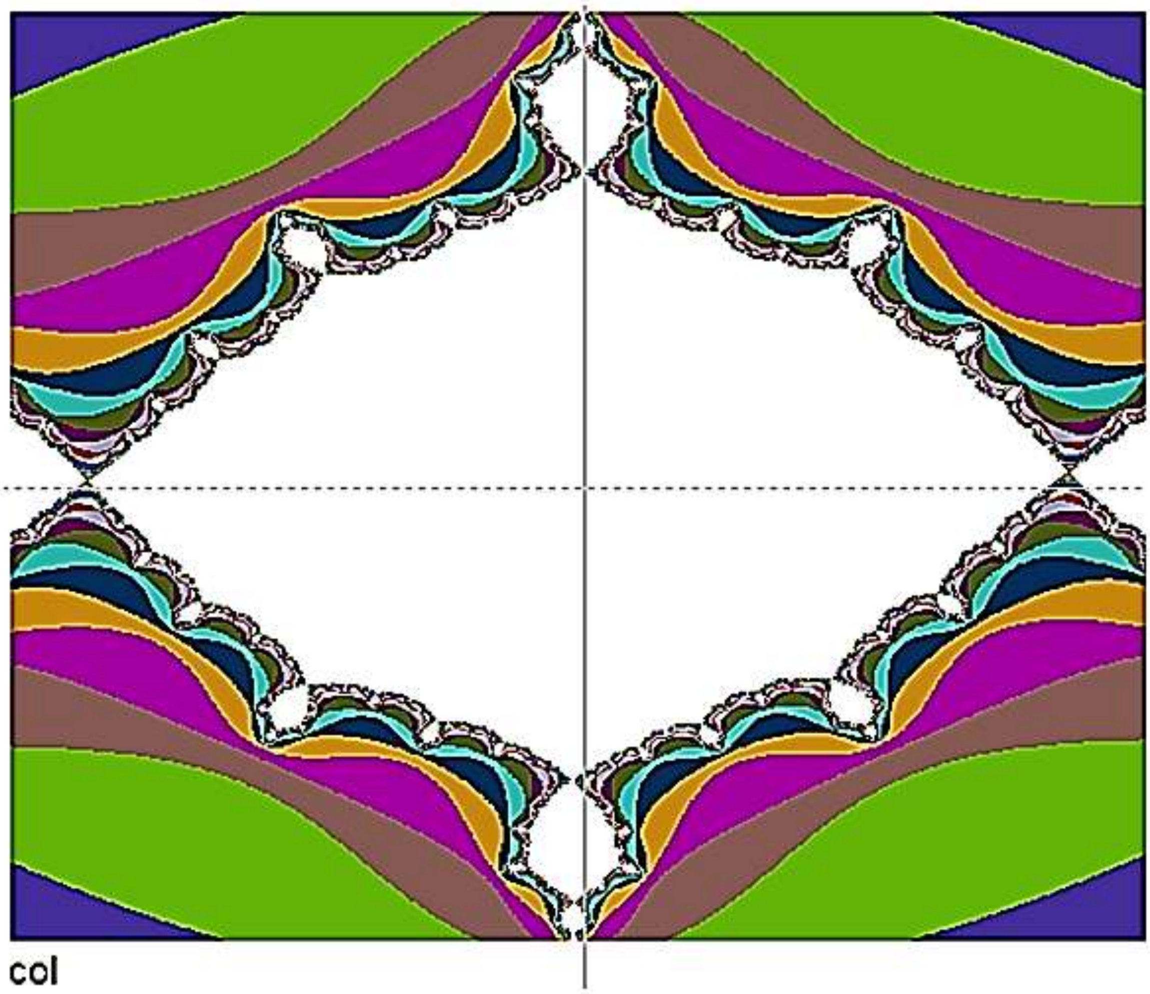
$$im_{i,j} := rl + \frac{(ru - rl)}{N} \cdot j + \left[il + \frac{(iu - il)}{N} \cdot i \right] \cdot i$$

```
Z := | c ← −1.07 + 0.0166i
     | for  i ∈ 0 .. N
     |    for  j ∈ 0 .. N
     |       | z ← im[i,j]
     |       | for  iter ∈ 1 .. mi
     |       |    | z ← z^2 + c
     |       |    | if  |z| > b
     |       |    |    | iterations[i,j] ← iter
     |       |    |    | break
     | return  iterations
```

Рис. 2.5. **Лістинг генерації матриці комплексних чисел**

Для додання кожній точці фрактала певного кольору використовується процедура Mathcad представлена на рис. 2.6. Процедура використовує вбудовану функцію mod (можна використати ln або log).

```
col := | for  i ∈ 0 .. N
       |    for  j ∈ 0 .. N
       |       | R_{i,j} ← mod(Z_{i,j}·33, 225)
       |       | G_{i,j} ← mod(Z_{i,j}·135, 225)
       |       | B_{i,j} ← mod(Z_{i,j}·77, 225)
       |              ⎛R⎞
       |  return      ⎜G⎟
       |              ⎝B⎠
```



col

Рис. 2.6. **Процедура Mathcad для розфарбування фрактала**

Заптання для самоперевірки

1. Що таке фрактал?
2. Як класифікуються фрактали?
3. Які фрактали називаються геометричними?