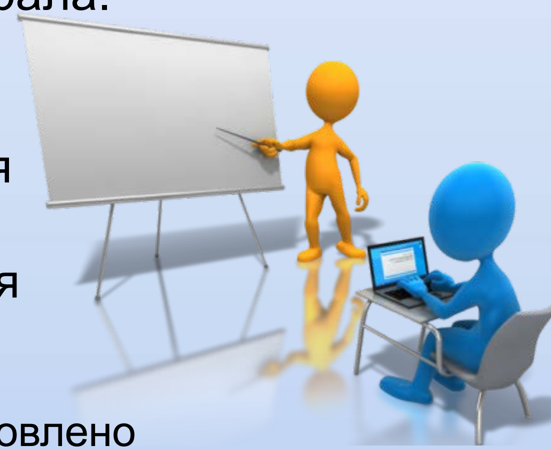
Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Основні питання

1. Поняття невизначеного інтеграла.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця основних елементарних інтегралів
4. Методи інтегрування. Заміна змінної.
5. Методи інтегрування. Інтегрування частинами.
6. Інтегрування раціональних дробів.
7. Інтегрування тригонометричних виразів.
8. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
9. Властивості визначеного інтеграла.
10. Методи інтегрування у визначеному інтегралі.
11. Застосування визначеного інтеграла до розв’язання геометричних задач.
12. Застосування визначеного інтеграла до розв’язання економічних задач.



$$\int f(x)dx$$

Лекцію підготовлено
доцентом кафедри вищої математики та економіко-математичних методів
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
Железняковою Е.Ю.

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Поняття невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для $f(x)$ на множині X, якщо в кожній точці цієї множини $f(x)$ є похідною від $F(x)$: $F'(x)=f(x)$

Приклад. Знайти первісні для функції $f(x)=x^3$

$F(x)=\dfrac{x^4}{4}$, тому що $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)'=x^3$.

При цьому також $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+1$, тому що $\left(\dfrac{x^4}{4}+1\right)'=x^3$.

Таким чином, $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+C$, де C – довільна константа

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Поняття невизначеного інтеграла

Множина всіх первісних для $f(x)$ на області її визначення X називається ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначається:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

де $\int$ – символ (знак) невизначеного інтеграла;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

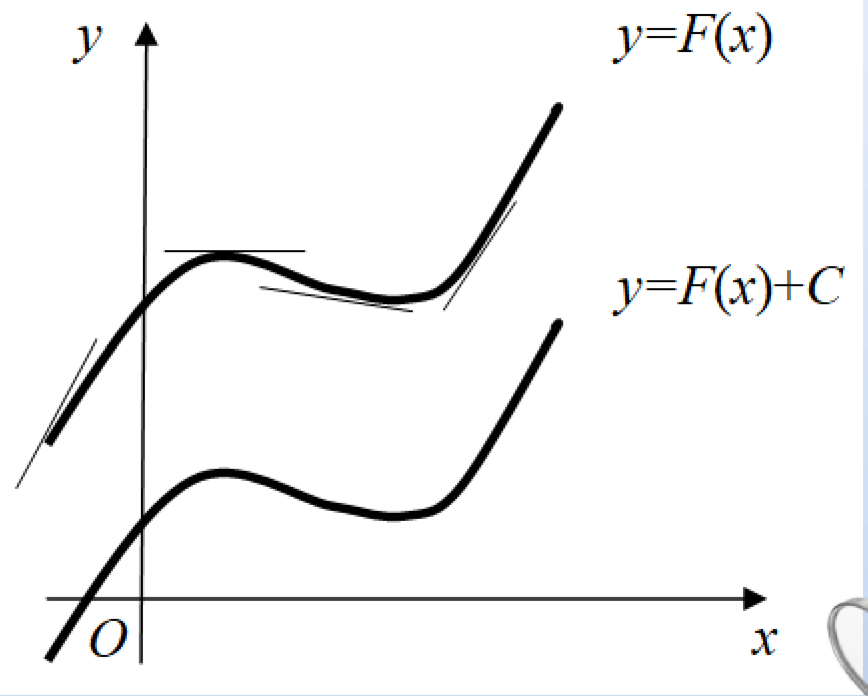
dx – диференціал *змінної інтегрування* x;

$f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз.

З геометричної точки зору будь-яка первісна – це лінія $y = F(x)$, а невизначений інтеграл – сім'я ліній $y = F(x) + C$, яку одержуємо зсувом однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Поняття невизначеного інтеграла



Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла за незалежною змінною дорівнює підінтегральної функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює під-інтегральному виразу:

а) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

б) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Постійний множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

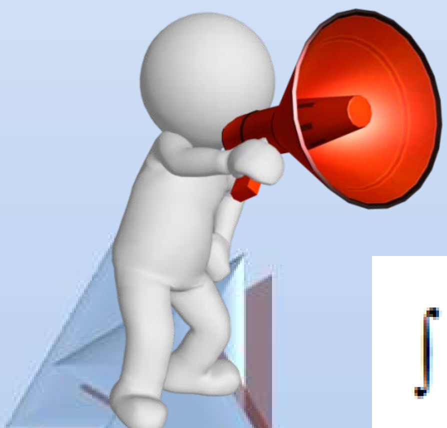
$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Властивості невизначеного інтеграла

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від доданків цієї суми:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx .$$

5. Якщо в підінтегральній функції змінну інтегрування умножити на будь-який постійний множник k, то первісну підінтегральної функції треба поділити на цей множник:



$$\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k} F(kx) + C ,$$

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C .$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1); \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad (\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

4. $\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (\sin x + C)' = \cos x$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad (-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \quad (-\ln|\cos x| + C)' = \operatorname{tg} x$.

8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad (\ln|\sin x| + C)' = \operatorname{ctg} x$.

$\int$

Таблиця основних інтегралів (закінчення)

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0;\ a \neq 1);\quad \left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x.$

10. $\int e^x dx = e^x + C;\quad \left(e^x + C\right)' = e^x.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ \ (-a < x < a);\quad \left(\arcsin\dfrac{x}{a} + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C,\ \ (a \neq 0);\quad \left(\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C\right)' = \dfrac{1}{a^2 + x^2}.$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C;\quad \left(\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C\right)' = \dfrac{1}{x^2 - a^2}.$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;\quad \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Приклади

Знайдіть інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

2. $\int (3x-1)^5 dx = \frac{(3x-1)^6}{3\cdot 6} + C$.

3. $\int (3x^2-1)^2 dx = \int (9x^4 - 6x^2 + 1) dx =$

$= 9\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + \int dx = \frac{9x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + x + C$.

4. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2\cdot 3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 \pm 9}} = \frac{1}{2} \ln\left|2x + \sqrt{4x^2 \pm 9}\right| + C$.

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

Нехай потрібно знайти інтеграл $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$, де підінтегральна функція є неперервною.

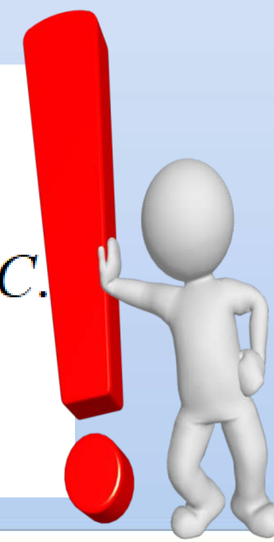
Позначимо $t=\varphi(x)$, тоді:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int f(t)dt \text{, где } dt=\varphi'(x)dx$$

Приклади. Знайдіть інтеграли методом заміни змінної.

1. $\int e^{x^2}xdx.$

$$\int e^{x^2}xdx=\left|\begin{aligned}&t=x^2\\&dt=2xdx\\&xdx=\frac{dt}{2}\end{aligned}\right|=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$



Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

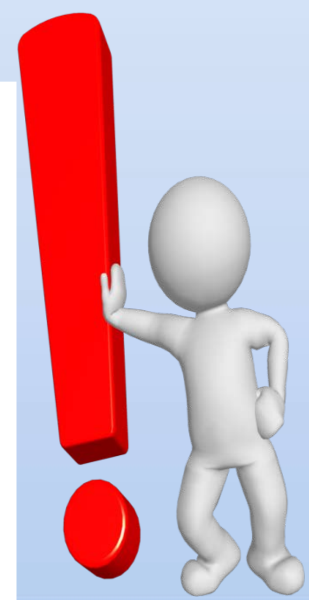
2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+3x+5 \\ dt = (2x+3)dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+3x+5\right| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right)dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1} \right).$$



Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

Таким чином, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\left(t - \ln\left|t+1\right|\right) + C$.

Повернемося до змінної $x:\ x = t^2,\ t = \sqrt{x}$.

Таким чином, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x} - \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C$.

4. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

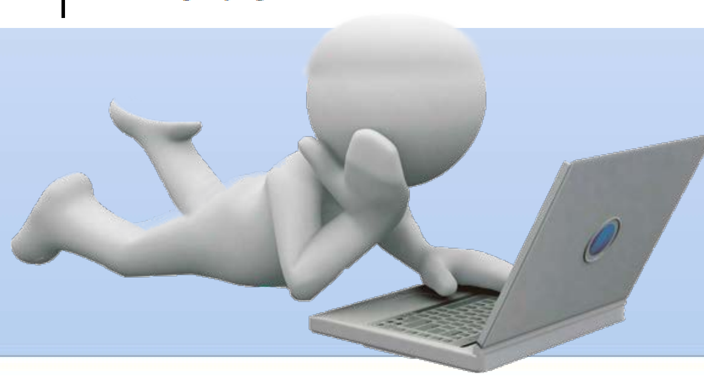
Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

5. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{e^x}{3} + C.$$

6. $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{\sin x}{2} + C.$$



Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$ – диференційовані функції аргументу x.

Тоді
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Інтеграли, що беруть тільки частинами умовно можна поділити на три типи:

1. $\int P_n(x)a^{bx}dx$; $\int P_n(x)e^x dx$; $\int P_n(x)\sin mx\,dx$; $\int P_n(x)\cos mx\,dx$.

В якості u беруть многочлен $P_n(x)$, решта - dv

2. $\int P_n(x)\operatorname{arc\,sin} x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arc\,cos} x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arc\,tg} x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$; $\int P_n(x)\ln x\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен.

$P_n(x)dx = dv$, решта $- u$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

3.Інтеграли виду $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$.

Якщо двічі застосувати формулу інтегрування частинами, то отримаємо вихідний інтеграл.

Приклади.

1. $\int (x+1)\sin 2x dx$.

Нехай $u = x+1,\ dv = \sin 2x dx$

Тоді $du = dx,\ v = \int \sin 2x dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}$.

Остаточно отримаємо:

$$\int (x+1)\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + C.$$

Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

2. $\int \arcsin x dx$.

Нехай $u = \arcsin x,\ dv = dx;\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x$

За формулою інтегрування частинами, маємо:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Нехай $t = 1 - x^2,\ dt = -2x dx$, тоді $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$

Остаточно отримаємо

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

3. $\int e^x \sin x dx$.

В інтегралі позначимо:

$$u = e^x,\ \ du = e^x dx;\ \ dv = \sin x dx,\ \ v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Тоді $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$.

$\int e^x \cos x dx$ ще раз інтегруємо частинами:

Нехай $u = e^x,\ \ du = e^x dx\ \ dv = \cos x dx,\ \ v = \int \cos x dx = \sin x$,

тоді $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$,

Таким чином $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$,

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C,$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування раціональних дробів

Інтегрування неправильного раціонального дробу зводиться до інтегрування цілої частини (многочлена) та правильного раціонального дробу.

Розглянемо інтегрування елементарних дробів типу:

$\dfrac{A}{x-a}$; $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ k – ціле, $k \geq 2$.

$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, якщо $p^2-4q<0$

Інтегрування раціональних дробів

Для обчислення інтегралів $\int \frac{Adx}{x-a}$ та $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}$ необхідно зробити заміну змінної $t = x - a$, а $dt = dx$.

Тоді $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{dt}{t^k} = A\int t^{-k}dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Інтегрування раціональних дробів

Для обчислення інтеграла 3) в знаменнику виділяємо повний квадрат і робимо заміну змінної:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} = \int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

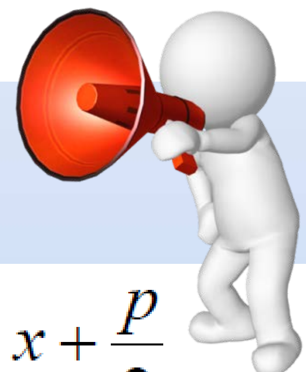
$$x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt.$$

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt = \int \frac{At-\frac{Ap}{2}+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування раціональних дробів

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q} = \int \frac{At\,dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dt,$$ если $q-\frac{p^2}{4}>0.$



Повертаємось до вихідної змінної:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Інтегрування раціональних дробів

Приклад. Обчисліть інтеграл $\int \frac{3x+2}{2x^2+6x+5}dx$

Розв’язання:

З квадратного тричлену виделимо повний квадрат:

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{x^2+3x+\frac{5}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-\frac{9}{4}}dx.$$

Далі, зробимо заміну змінної:

$$x+\frac{3}{2}=t, \quad x=t-\frac{3}{2}, \quad dx=dt$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування раціональних дробів

$$2\int \frac{3t-\frac{9}{2}+2}{t^2+\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{3t-\frac{5}{2}}{t^2+\frac{1}{4}}dt \quad =\frac{3}{4}\int \frac{2t}{t^2+\frac{1}{4}}dt-\frac{5}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4}2\operatorname{arctg}2t+C=$$

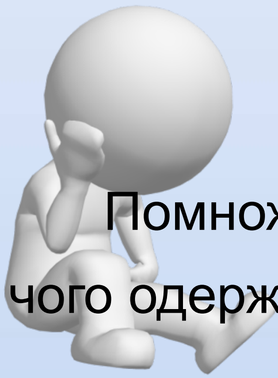
$$=\frac{3}{4}\ln\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}\ \operatorname{arctg}\left(2x+3\right)+C.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування раціональних дробів

Приклад. Обчисліть інтеграл $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx.$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладемо цей дріб на найпростіші дроби:



$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Помножимо обидві частини рівності на знаменник, в результаті чого одержимо:

$$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-1).$$

Знаходимо коефіцієнти A, B, C. Спочатку в обидві частини підставимо корені знаменника: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$:

$$\begin{array}{l|ll} x=1 & 1+1=A, & A=2, \\ x=2 & 2+1=C, & C=3. \end{array}$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування раціональних дробів

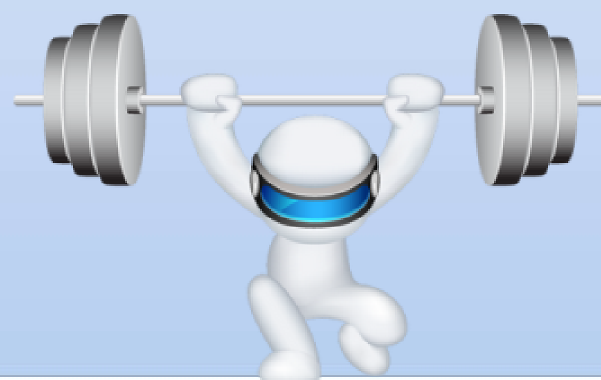
Залишилося знайти B. Для цього прирівняємо коефіцієнти, наприклад при x^2, у многочленів лівої і правої частин рівності:

$$x^2 \,\big|\, 0 = A + B \Rightarrow B = -2.$$

Отже,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x-2} +$$

$$+3\int \frac{dx}{(x-2)^2} = 2\ln|x-1| - 2\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C.$$



Інтегрування раціональних дробів

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}dx$.

Розв’язання.

Під знаком інтеграла знаменник правильного дробу має лише один дійсний корінь $x=0$, а рівняння $x^2+4=0$ не має дійсних коренів, тоді розклад вихідного дробу на суму елементарних матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Знову помножимо обидві частини рівності на знаменник $x(x^2+4)$:

Інтегрування раціональних дробів

$$x-1=A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)x=Ax^2+4A+Bx^2+Cx=(A+B)x^2+Cx+4A.$$

Визначаємо коефіцієнти :

$$\begin{array}{l|llll} x=0 & 0-1=4A & \Rightarrow & A=-1/4, \\ x^2 & 0=A+B & \Rightarrow & B=-A=1/4, \\ x & 1=C & \Rightarrow & C=1. \end{array}$$

Отже, вихідний інтеграл запишеться у вигляді суми двох інтегралів від найпростіших дробів, які легко беруться:

$$\int\frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4}dx=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо способи, за допомогою яких беруться інтеграли виду

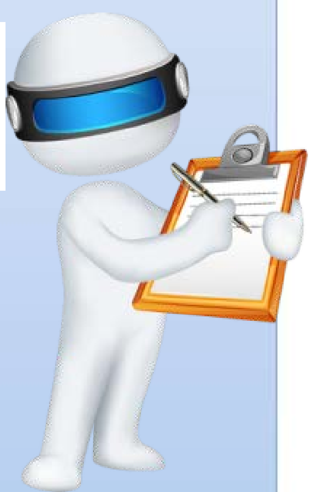
$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx .$$

Загальний підхід до інтегрування таких функцій полягає у застосуванні підстановки $t = \mathrm{tg}(x/2)$, яку називають *універсальною тригонометричною підстановкою*.

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, t \Rightarrow \left(x = 2\,\mathrm{arctg}\, t,\;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right)$$

Тоді

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

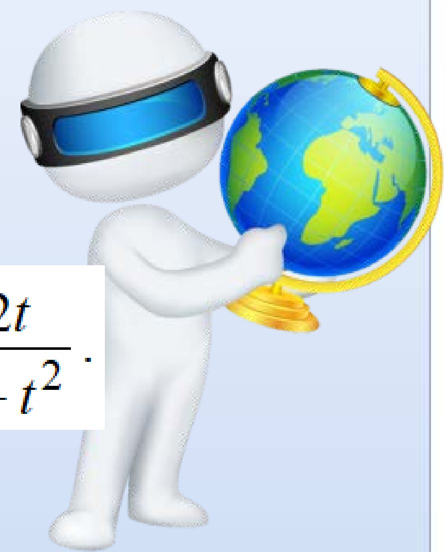


Заданий інтеграл набуває вигляду:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

Інтегрування тригонометричних виразів

Приклад. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.



Зробимо підстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тоді одержимо

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4(1-t^2)}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 5\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C.$$

Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегрування функцій, непарних (парних) відносно синуса або (і) косинуса.

Функція $R(\sin x, \cos x)$ називається *непарною* відносно функції $\sin x$ ($\cos x$), якщо виконується умова:

$$R(-\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x,\ \cos x)$$
$$(R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x,\ \cos x))$$

тобто знак функції змінюється на протилежний, якщо в ній замінити або $\sin x$ на $(-\sin x)$, або $\cos x$ на $(-\cos x)$.

Функція $R(\sin x, \cos x)$ називається *парною* відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$, якщо виконується умова:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

тобто функція не змінюється, якщо в ній одночасно замінити $\sin x$ і $\cos x$ на $(-\sin x)$ і $(-\cos x)$ відповідно.

Інтегрування тригонометричних виразів

Правило введення нової змінної.

Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$:

1) **непарна** відносно функції $\sin x$ $(\cos x)$, то виконується підстановка $t = \cos x$ $(t = \sin x)$ і застосовується тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) **парна** відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$, то виконується підстановка $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$ і застосовуються тотожності:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування тригонометричних виразів

Приклад. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x\left(1+\sin^2 x\right)}$.

Оскільки підінтегральна функція непарна відносно функції $\cos x$, тому виконуємо підстановку $t=\sin x$:

$$\int \frac{dx}{\cos x\left(1+\sin^2 x\right)} = \left| \begin{array}{c} t=\sin x,\ \ dt=\cos x\,dx \\ 1+\sin^2 x = 1+t^2 \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} =$$

$$= -\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \right) dt .$$

Закінчити розв’язання самостійно.

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування тригонометричних виразів

Приклад. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x,\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ 1+\sin^2 x = \left(2t^2+1\right)\big/\left(t^2+1\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{\left(\sqrt{2}\,t\right)^2+1}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,t\right)\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)\right)+C\,.$$

Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегрування добутку цілих степенів синуса і косинуса

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx,\ \ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z},\ \text{крім}\ \ m = n = 0\,.$$

Якщо: 1) m – непарне, покладаємо $t = \cos x$;

2) n – непарне, покладаємо $t = \sin x$;

3) m і n – парні, покладаємо $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

У третьому випадку часто замість запропонованих підстановок використовують формули зниження степеня (тригонометричних функцій):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x).$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування тригонометричних виразів

Приклад. Обчисліть інтеграл:

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \sin^4 x \sin x dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int t^4 \left(1 - t^2\right)^2 dt = -\int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt = -\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + c =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c .$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Інтегрування тригонометричних виразів

Приклад. Обчисліть інтеграл:

$$\int \cos^4 5x dx = \int \left(\cos^2 5x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 10x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 10x + \cos^2 10x\right) dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 20x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{160}\sin 20x + c =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{160}\sin 20x + c.$$

Застосування інтегрального числення до розв'язання задач економіки

Приклад. Нехай задана функція граничного доходу залежно від обсягу продукції: $R'(x)=25-0{,}08x$. Знайти функцію доходу та закон попиту на продукцію.

Розв'язання. Оскільки $R'(x)=25-0{,}08x$, то

$$R=\int(25-0{,}08x)\,dx=25x-0{,}04x^2+C.$$

Дохід дорівнює нулю, якщо не реалізовано жодного виробу, тому маємо: $R(0)=0$, звідки $C=0$.

Отже, функція доходу така: $R(x)=25x-0{,}04x^2$.

Якщо ціна одиниці продукції p, то дохід визначається за формулою $R=px$. Отже, якщо поділити дохід на x, знайдемо функцію попиту:

$$P(x)=\frac{R(x)}{x}=25-0{,}04x.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Нехай невід'ємна функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, де a і b – скінченні числа.

1. Задача про знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай плоска фігура обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$. Ця геометрична фігура називається *криволінійною трапецією*.

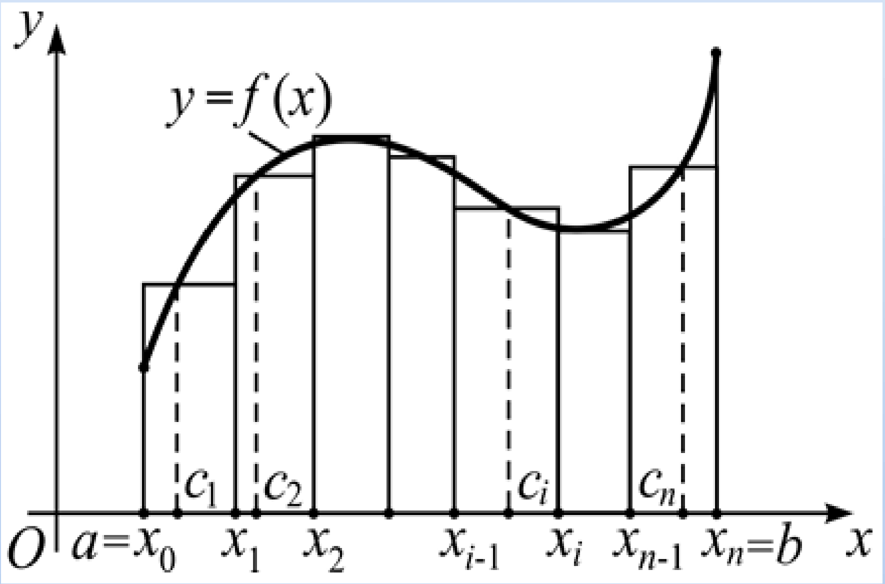
Необхідно визначити її площу. Для розв'язання задачі виконаємо такі дії:

1) ***розіб'ємо*** відрізок $[a, b]$ довільно чином на n частин точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$;

2) ***виберемо*** на кожному з часткових відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, довільну точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Довжину часткового відрізка $[x_{i-1}, x_i]$ позначимо через Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;



Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

3) ***обчислимо*** значення функції $f(x)$ у точках c_i і складемо суму добутків цих значень з довжинами часткових відрізків:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_i)\Delta x_i + \ldots f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,.$$

Сума S_n називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Геометричний зміст цієї суми очевидний – це сума площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ та висотами $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$;

4) ***знайдемо*** границю S_n за умови, що $n \to \infty$ та найбільша (максимальна) довжина частинних відрізків $\max \Delta x_i$ прямує до нуля.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (за умови – $\max \Delta x_i \to 0$ при $n \to \infty$), то її приймають за числове значення площі S криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0,\\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

2. Задача про знаходження обсягу продукції. Нехай функція $z = f(t)$ описує залежність продуктивності праці z деякого виробництва від часу t.

Необхідно знайти обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу $[0,T]$.

Якщо продуктивність не змінюється протягом часу, тобто $f(t)$ – стала величина, то обсяг продукції ΔU, що вироблена за проміжок часу $[t, t+\Delta t]$, обчислюється за формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$. Використовуючи наближену рівність $\Delta U = f(c)\Delta t$, де $c \in [t,\ t+\Delta t]$, яка буде тим більш точною, чим меншим буде Δt, виконаємо такі дії:

1) розіб'ємо відрізок $[0,T]$ на проміжки часу $[t_{i-1},\ t_i]$, $i = \overline{1,n}$, точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T;$$

2) виберемо на кожному з відрізків $[t_{i-1},\ t_i]$, $i = \overline{1,n}$, довільну точку $c_i \in [t_{i-1},\ t_i]$;

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

3) обчислимо продуктивність праці у кожній точці $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, тобто $f(c_i)$, для кожного проміжку часу; визначимо обсяг продукції Δu_i, виробленої за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, як добуток $\Delta U_i = f(c_i)\Delta t_i$, якщо на кожному проміжку часу Δt_i вважати продуктивність праці сталою величиною; тоді повний обсяг продукції U_n наближено визначається як інтегральна сума для функції $z = f(t)$ на відрізку $[0,T]$:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i;$$

4) знайдемо границю U_n, якщо $\max \Delta t_i$ прямує до нуля та $n \to \infty$, і одержимо обсяг продукції, виробленої за проміжок часу $[0,T]$:

$$U = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Слід зазначити, що при розв'язанні цих двох різних задач, були виконані одні й ті самі дії, і ми прийшли до одного і того ж підсумку – виникає необхідність визначити границю інтегральної суми.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n для функції $f(x)$, знайдена за умови, що $\max \Delta x_i \to 0$ при необмеженому зростанні числа точок розбиття ($n \to \infty$), яка не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від вибору точок $c_1, c_2, ..., c_n$, то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0,\\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i ,$$

де a, b – межі інтегрування (a – нижня, b – верхня);
$f(x)$ – підінтегральна функція;
dx – диференціал ***змінної інтегрування***;
$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

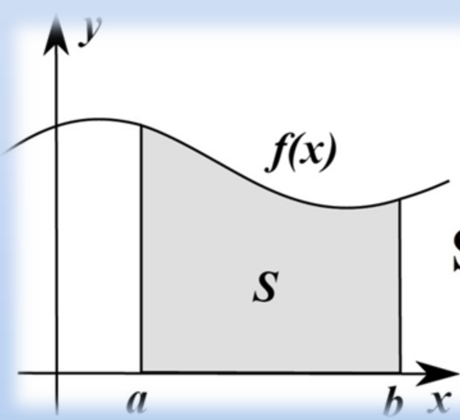
Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Функція $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a, b]$ існує визначений інтеграл, називається *інтегрованою* на цьому відрізку.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо функція $f(x)$ невід'ємна на скінченному відрізку $[a, b]$, де $a < b$, то визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0,\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, відрізком $[a, b]$ і прямими $x = a$ та $x = b$.



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Властивості визначеного інтеграла

1. Для будь-якої інтегровної функції визначений інтеграл з рівними межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то має місце формула:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

тобто, якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний.

3. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx, \text{ де } \quad k = \mathrm{const}$$

Властивості визначеного інтеграла

4. Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ інтегровні на $[a,b]$, то інтеграл від їх суми або різниці дорівнює відповідно сумі або різниці інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx .$$

Властивість поширюється на будь-яке скінченне число доданків.

5. Якщо відрізок інтегрування розбито на дві частини, то визначений інтеграл дорівнює сумі інтегралів на цих частинах:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx , \quad a < c < b$$

6. Якщо на відрізку інтегрування $[a,b]$ значення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ пов'язані нерівністю $f(x) \le (\ge)\, \varphi(x)$, то такою самою, за знаком, нерівністю пов'язані визначені інтеграли від цих функцій:

$$f(x) \le (\ge)\, \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le (\ge) \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Властивості визначеного інтеграла

7. Якщо M і m – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[a,b]$, тобто $m \le f(x) \le M$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

8. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на ньому знайдеться така точка $\xi \in [a,b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Таких точок на проміжку $[a,b]$ може бути декілька.

Ця властивість називається **Теорема про середнє.**

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема (*основна формула інтегрального числення*). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a,b]$ є різницею значень будь-якої з її первісних функцій $F(x)$ у точках b і a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Для позначення приросту первісної на відрізку $[a,b]$ вводять ***символ подвійної підстановки*** $\Big|_a^b$, який зручно використовувати при розв'язанні прикладів:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Методи обчислення визначеного інтеграла

1. Безпосереднє визначене інтегрування. Оскільки обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона – Лейбніца передбачає спочатку взяття невизначеного інтеграла, а потім виконання арифметичних дій, то це означає, що принципових відмінностей у методах знаходження невизначеного й обчислення визначеного інтегралів немає, отже, ***безпосереднє обчислення визначеного інтеграла*** передбачає безпосереднє невизначене інтегрування (знаходження однієї з первісних).

Приклади. Обчисліть інтеграли.

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$

2. $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Методи обчислення визначеного інтеграла

2. Обчислення інтеграла методом підстановки.

Нехай треба знайти інтеграл $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, який безпосередньо обчислити не можна, де підінтегральна функція – неперервна. Припустимо, що $t=\varphi(x)$, тоді $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$,

де $dt=\varphi'(x)dx$, $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\varphi(b)$. Нехай $\int_\alpha^\beta f(t)dt=F(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$,

де $dF(t)=F'(t)dt=f(t)dt$, тоді

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))\Big|_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))=F(\beta)-F(\alpha).$$

Відзначимо, що при обчисленні визначеного інтеграла методом підстановки немає необхідності повертатися до вихідної змінної, замість цього треба знаходити межі інтегрування за новою змінною.

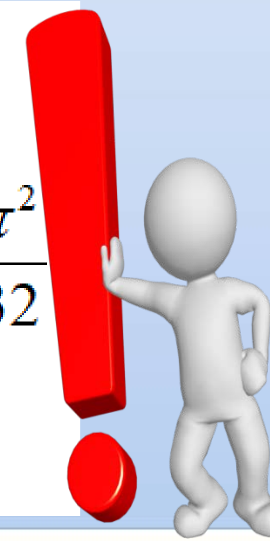
Методи обчислення визначеного інтеграла

Приклади. **Обчисліть інтеграли**

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx = \left| \begin{matrix} t = x^3, & x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ dt = 3x^2 dx, & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1) \approx 0{,}57 .$$

$$\int_0^1 \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \int_0^{\pi/4} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0\right) = \frac{\pi^2}{32}$$



Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Методи обчислення визначеного інтеграла

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=1+x^2 \\ dt=2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\ln|t|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Таким чином, $\int_0^1 \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2}\ln 2.$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

3. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Якщо у визначеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку $u \cdot dv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні на відрізку $[a, b]$ функції, то виконується співвідношення:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Приклади. Обчисліть інтеграли

$$\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+1), & du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = \left(x\ln(x+1)\right)\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx =$$

$$= (e-1)\ln e - \int\limits_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = e - 1 - (x - \ln|x+1|)\Big|_0^{e-1} = e - 1 - e + 1 + \ln e = 1.$$

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

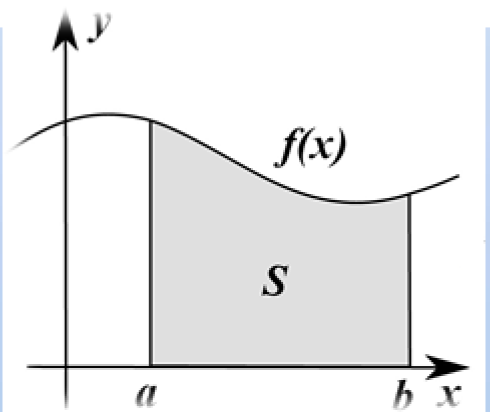
Обчислення площі геометричної фігури

Обчислення площі плоскої фігури в декартових координатах спирається на геометричний зміст визначеного інтеграла.

Розглянемо декілька випадків обчислення площ геометричних фігур.

1. За геометричним змістом визначений інтеграл від неперервної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$ та $x = b$, за умови, що функція $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ є невід'ємною. Тобто для $y = f(x) \geq 0$ маємо:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

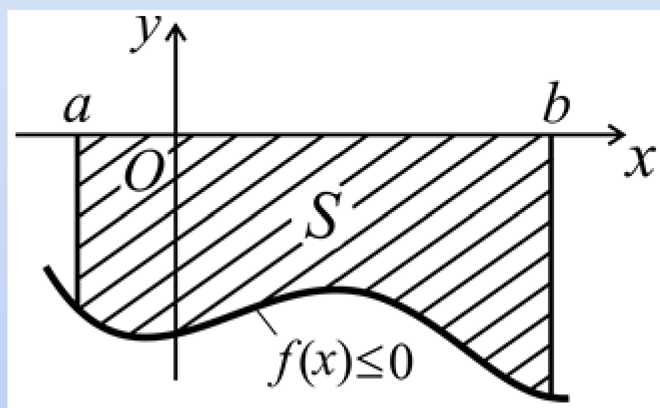


Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

2. Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ недодатна, тобто $f(x) \le 0$, то визначений інтеграл від неї також буде числом недодатним, бо він є границею інтегральної суми, а значить зберігає знак підінтегральної функції. Тоді для $f(x) \le 0$ площа криволінійної трапеції дорівнюватиме:

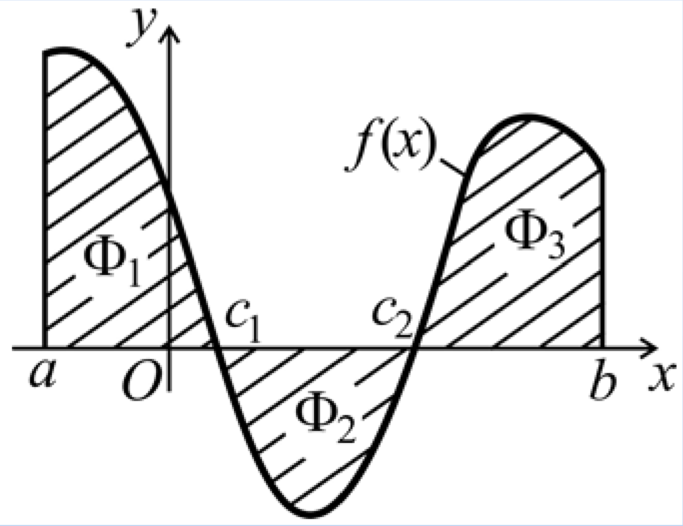
$$S = -\int_a^b f(x)dx .$$



Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

3. Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ змінює знак, проходячи через точки $x = c_1$, $x = c_2$, то для знаходження площі фігури, обмеженої графіком такої функції і віссю Ox, відрізок $[a,b]$ треба розбити на три проміжки $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$, $[c_2,b]$, на яких знак функції залишається сталим, і застосувати формули $S = \int_a^b f(x)dx$ та $S = -\int_a^b f(x)dx$.

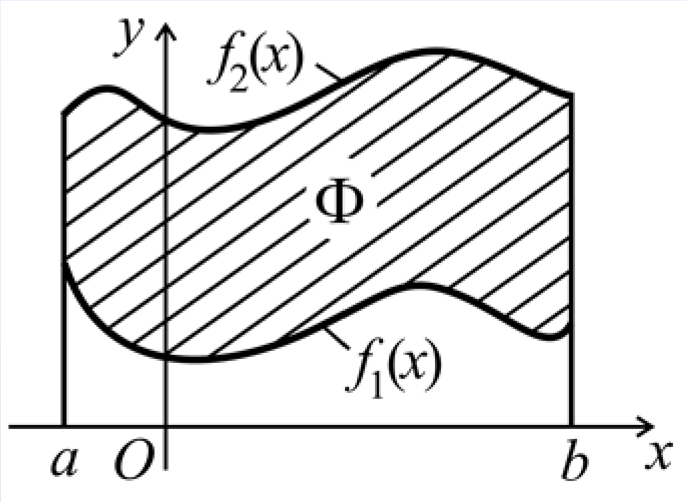


Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

4. Якщо треба визначити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, заданими на відрізку $[a, b]$, причому $f_1(x) \le f_2(x)$, то ця площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx .$$

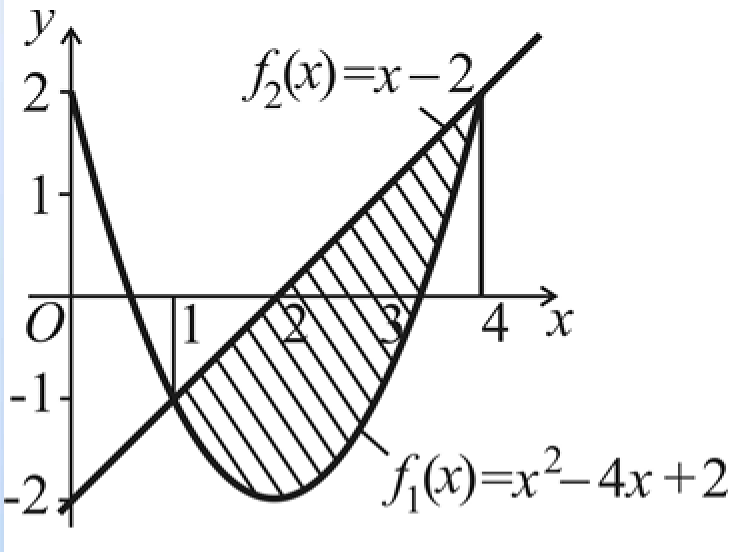


Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

Приклад. Знайдіть площу фігури, що обмежена лініями:

$$y = x^2 - 4x + 2, \quad y = x - 2$$



Для визначення меж інтегрування знаходимо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2, \\ y = x - 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Звідки отримуємо: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 4. \end{array}\right.$

Тоді $S = \int\limits_1^4 \big((x-2) - (x^2 - 4x + 2)\big)dx =$

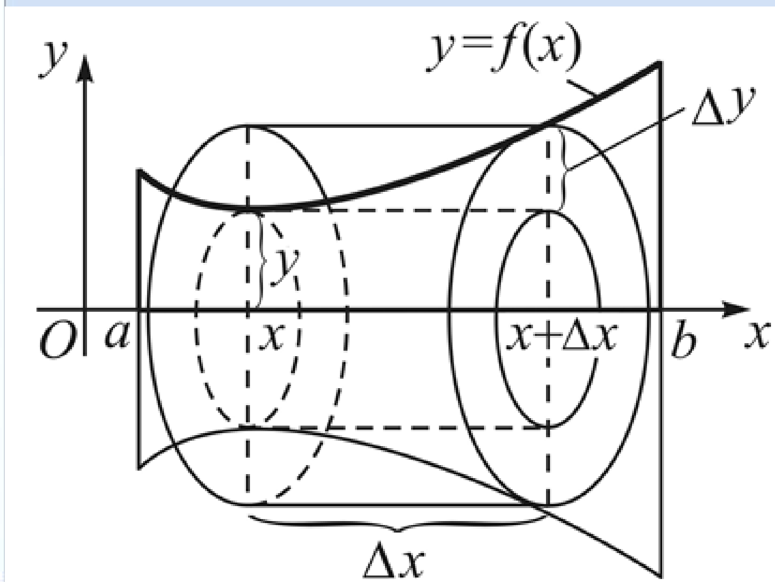
$$= \int\limits_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = 4{,}5 \ \text{(кв. од.)}.$$

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

Обчислення об’єму тіла обертання

Нехай на проміжку $[a,b]$ задана неперервна функція $y=f(x)$. Треба визначити об’єм тіла, що утворилось при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, навколо осі Ox. Таке тіло має назву ***тіла обертання***.

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



Якщо у співвідношенні для V_x формально замінити x на y, то одержимо формулу об’єму тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x=\varphi(y)$ ($\varphi(y)$ – функція, обернена до $f(x)$), $x=0$, $y=c$, $y=d$:

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Лекція 7. Інтегральне числення функції однієї змінної

Застосування визначеного інтеграла у геометричних задачах

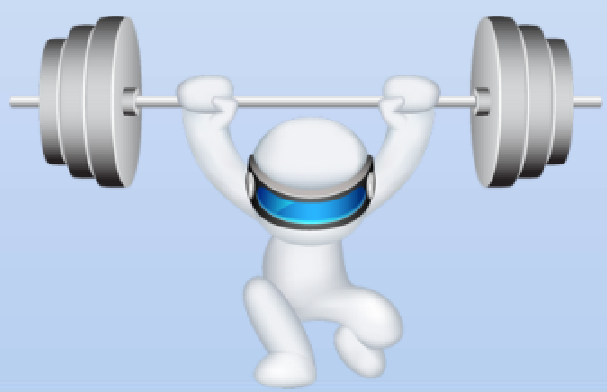
Обчислення об’єму тіла обертання

Приклад.

Знайдемо об’єм кулі радіуса R. Її можна розглядати як результат обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої півколом $y=\sqrt{R^2-x^2}$ на відрізку $[-R, R]$.

Об’єм цієї кулі можна знайти за формулою:

$$V_x=\pi\int_{-R}^{R} f^2(x)dx = 2\pi\int_{0}^{R}(R^2-x^2)dx = 2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. од.).}$$



Застосування визначеного інтеграла до розв’язання економічних задач

Приклад. Знайти обсяг продукції, що вироблятиме мале підприємство за перші три години роботи, якщо функція продуктивності праці має вигляд:

$$f(x)=x^2+e^{-x}.$$

Розв’язання. Обсяг продукції обчислюється за формулою $P=\int_0^T f(x)dx$.

Отже,

$$P=\int_0^3\left(x^2+e^{-x}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-e^{-x}\right)\Bigg|_0^3=9-e^{-3}+e^0=10-e^{-3}\approx 9{,}95 \text{ (ум. од.)}.$$

Застосування визначеного інтеграла до розв’язання економічних задач

Приклад. Знайти обсяг продукції, виробленої за другу годину, якщо відома функція продуктивності $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

Розв’язання. Для знаходження обсягу продукції обчислимо визначений інтеграл:

$$P = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{3} \approx 3,3 \text{ (ум. од.).}$$

Дякую за увагу!