ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Тема 1. Елементи теорії матриць і визначників

Ознайомимось з функціями математичного пакету Octave для знаходження визначників та обернених матриць.

Розглянемо матрицю з **Практичного заняття 2 №1.9 (5):**

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Визначимо матрицю A:

```
A=[-2 1 0;3 2 1;2 2 1]
A =

  -2   1   0
   3   2   1
   2   2   1
```

2. Обчислимо визначник матриці A. Для цього в командному рядку необхідно ввести:

```
A1=det(A)
A1 = -1.0000
```

3. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Для цього в командному рядку необхідно ввести:

```
A2=inv(A)
A2 =

  -5.5511e-17   1.0000e+00  -1.0000e+00
   1.0000e+00   2.0000e+00  -2.0000e+00
  -2.0000e+00  -6.0000e+00   7.0000e+00
```

Зауваження. Якщо значення елементів матриці A^{-1} є нецілими числами, то можна записати їх у вигляді звичайних дробів, використовуючи функцію rats(A1).

4. Перевіримо правильність обчислення оберненої матриці:

```
A*A2
ans =

   1.0000         0         0
        0    1.0000    0.0000
        0         0    1.0000

A2*A
ans =

   1.0000         0         0
  -0.0000    1.0000         0
   0.0000         0    1.0000
```

Означення рангу матриці та методи його визначення

Означення. *Рангом матриці A* називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Ранг матриці A позначається $rangA$ (можна ще $r(A)$ або RgA).

Метод облямівки мінорів

1. Знайти ненульовий елемент матриці (якщо такого не існує, то ранг матриці дорівнює нулю).
2. Обчислити мінори другого порядку, які облямовують обраний елемент.
3. Якщо серед обчислених мінорів другого порядку існує відмінний від нуля, необхідно розглянути всі мінори третього порядку, які його облямовують. Продовжувати доти, поки всі мінори, які облямовують ненульовий мінор, наприклад l-го порядку, не будуть дорівнювати нулю. У цьому випадку ранг матриці дорівнюватиме l.

Приклад 1. Використовуючи метод облямівки мінорів, знайти ранг матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Відразу можна побачити, що мінор, побудований на рядках з номерами 1, 2 та стовпцях 1, 2, є відмінний від нуля:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0.$$

Розглянемо всі мінори, які облямовують обраний мінор:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ -1\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\ 1\end{matrix} & \begin{matrix}2\\ 2\end{matrix}\\ \begin{matrix}2 & 3\end{matrix} & 0 & 0 & 4\\ \begin{matrix}3 & 4\end{matrix} & -1 & 1 & 6\end{pmatrix}:$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\ 1\end{matrix} & \begin{matrix}2\\ 2\end{matrix}\\ \begin{matrix}\mathbf{2} & \mathbf{3}\end{matrix} & \mathbf{0} & 0 & 4\\ \begin{matrix}3 & 4\end{matrix} & -1 & 1 & 6\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ -1\end{matrix} & \begin{matrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{1}\end{matrix} & \begin{matrix}2\\ 2\end{matrix}\\ \begin{matrix}\mathbf{2} & \mathbf{3}\end{matrix} & 0 & \mathbf{0} & 4\\ \begin{matrix}3 & 4\end{matrix} & -1 & 1 & 6\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \mathbf{4} \\ -1 & 1 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ \mathbf{-1} & 1 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & \mathbf{1} & 6 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & \mathbf{6} \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Всі шість мінорів, які облямовують обраний ненульовий мінор другого порядку, дорівнюють нулю, тобто ранг матриці дорівнює двом:

$$rangA = 2.$$

Кожну матрицю можна привести до трапецеїдальної за допомогою **елементарних перетворень рядків та стовпців**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ відмінні від нуля.

Саме на цьому базується другий **метод обчислення рангу матриці**. З того, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, а ранг трапецеїдальної матриці дорівнює кількості ненульових рядків, для пошуку рангу матриці необхідно:

1. За допомогою елементарних перетворень привести задану матрицю до трапецеїдальної.

2. Кількість ненульових рядків в отриманій трапецеїдальній матриці буде дорівнюватиме рангу заданої матриці.

Приклад 2. Використовуючи метод елементарних перетворень, знайти ранг матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Приведемо матрицю до трапецеїдальної за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кількість ненульових рядків в отриманій трапецеїдальній матриці дорівнює двом, тобто ранг заданої матриці $rang A = 2$.

Задачі для практичного заняття

2.1. Використовуючи два методи, знайти ранг матриці:

$$1)\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix};\ 3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад 3. Знайдемо розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 19, \\ -x_1 + 2x_2 = -8 \end{cases}$$

за правилом Крамера.

Обчислимо визначники Δ, Δ_1, Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - (-5)\cdot(-1) = 4 - 5 = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & -5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 19\cdot 2 - (-5)\cdot(-8) = 38 - 40 = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8) - 19\cdot(-1) = -16 + 19 = 3.$$

Звідки:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-2}{-1}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{3}{-1}=-3.$$

Перевіримо отриманий розв'язок, підставивши у задану систему:

$$\begin{cases}2\cdot 2-5\cdot(-3)\equiv 19,\\ -2+2\cdot(-3)\equiv -8.\end{cases}$$

Задачі для практичного заняття

2.2. Знайти розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера та методом оберненої матриці:

1) $\begin{cases}3x_1+x_2=1,\\ -2x_1-4x_2=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-2x_1+3x_2=7,\\ 3x_1-4x_2=-8;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x_1+3x_2=-5,\\ -x_1-4x_2=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}6x_1-10x_2=2,\\ -9x_1+11x_2=5.\end{cases}$

(*Відповіді:* 1) $x_1=1, x_2=-2$; 2) $x_1=4, x_2=5$; 3) $x_1=-4, x_2=1$; 4) $x_1=-3, x_2=-2$)

Приклад 4. Знайдемо розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}-x_1-4x_2-x_3=-4,\\ 2x_1+3x_2+3x_3=-3,\\ -3x_1-x_2+6x_3=1\end{cases}$$

за правилом Крамера, методом оберненої матриці, методом Гаусса.

1) За **правилом Крамера** необхідно спочатку обчислити визначники Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -4 & -1\\ 2 & 3 & 3\\ -3 & -1 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot3\cdot6+(-4)\cdot3\cdot(-3)+(-1)\cdot2\cdot(-1)-(-1)\cdot3\cdot(-3)-(-4)\cdot2\cdot6-(-1)\cdot3\cdot(-3)=56;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1\\ -3 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 6\end{vmatrix}=-168;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -4 & -1\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 1 & 6\end{vmatrix}=112;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -4 & -4\\ 2 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-56.$$

Після чого значення невідомих x_1, x_2, x_3 обчислюються за формулами:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-168}{56}=-3,$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{112}{56}=2,$$

$$x_3=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-56}{56}=-1.$$

2) Для застосування **методу оберненої матриці (або матричного методу)** спочатку запишемо задану систему у матричному вигляді $A\cdot X=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1\\ 2 & 3 & 3\\ -3 & -1 & 6\end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити обернену матрицю A^{-1} до матриці коефіцієнтів *A,* і помноживши на A^{-1} зліва обидві частини матричної рівності $A \cdot X = B$, отримаємо розв'язок заданої системи:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці *A* ми вже обчислили, коли застосовували правило Крамера: $|A| = \Delta = 56 \neq 0$, звідки можемо стверджувати, що обернена матриця дійсно існує. Обчислимо всі елементи приєднаною (або союзної) матриці – алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ матриці *A*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 3 = 21,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -(12+9) = -21,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2+9 = 7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -(-24-1) = 25,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -6-3 = -9,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(1-12) = 11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12+3 = -9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-3+2) = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3+8 = 5.$$

І ми можемо виписати обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{56}\cdot\begin{pmatrix}21 & 25 & -9\\ -21 & -9 & 1\\ 7 & 11 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{21}{56} & \frac{25}{56} & \frac{-9}{56}\\ \frac{-21}{56} & \frac{-9}{56} & \frac{1}{56}\\ \frac{7}{56} & \frac{11}{56} & \frac{5}{56}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{25}{56} & \frac{-9}{56}\\ \frac{-3}{8} & \frac{-9}{56} & \frac{1}{56}\\ \frac{1}{8} & \frac{11}{56} & \frac{5}{56}\end{pmatrix}.$$

Розв’язок заданої системи знаходимо наступним чином:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{25}{56} & \frac{-9}{56}\\ \frac{-3}{8} & \frac{-9}{56} & \frac{1}{56}\\ \frac{1}{8} & \frac{11}{56} & \frac{5}{56}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{56}\cdot\begin{pmatrix}21 & 25 & -9\\ -21 & -9 & 1\\ 7 & 11 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{56}\cdot\begin{pmatrix}21\cdot(-4)+25\cdot(-3)+(-9)\cdot 1\\ -21\cdot(-4)+(-9)\cdot(-3)+1\cdot 1\\ 7\cdot(-4)+11\cdot(-3)+5\cdot 1\end{pmatrix}=\frac{1}{56}\cdot\begin{pmatrix}-168\\ 112\\ -56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ -1\end{pmatrix},$$

тобто отримали розв’язок:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

3) Знайдемо розв’язок системи рівнянь за допомогою **метода Гаусса**. Запишемо розширену матрицю системи

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

та за допомогою елементарних перетворень приведемо її до верхньої трикутної форми, тобто до вигляду $\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)\sim$$

Помножимо перший рядок на (-1), бо зручніше, коли на місці (1,1) знаходиться одиниця

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)\sim$$

Віднімемо з 2 рядка 1 рядок, помножений на 2, а до 3 рядка додамо1 рядок, помножений на 3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 11 & 9 & 13 \end{array}\right)\sim$$

Для того, щоб на місці (3,2) зробити 0, додамо до 3 рядка 2 рядок, розділений на 5 та помножений на 11

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{56}{5} & -\frac{56}{5} \end{array}\right).$$

Отримали трикутну матрицю і можемо послідовно, починаючи з x_3, знайти всі невідомі

Для знаходження розв'язку повернемось до системи, але вже з матрицею, яку ми привели до трикутної форми

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b_j \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{56}{5} & -\frac{56}{5} \end{array}\right)} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} 1\cdot x_1+4\cdot x_2+1\cdot x_3=4, \\ 0\cdot x_1-5\cdot x_2+1\cdot x_3=-11, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+\frac{56}{5}\cdot x_3=-\frac{56}{5}, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+4x_2+x_3=4, \\ -5x_2+x_3=-11, \\ x_3=-1. \end{array}\right.$$

І так званим зворотним ходом – починаючи з останнього рівняння послідовно знайдемо всі невідомі x_3, x_2, x_1 :

$$x_3 = -1,$$
$$\downarrow$$
$$x_2 = -\frac{1}{5}(-x_3 - 11) = -\frac{1}{5}(1 - 11) = \frac{10}{5} = 2,$$
$$\downarrow$$
$$x_1 = -4x_2 - x_3 + 4 = -4 \cdot 2 - (-1) + 4 = -3,$$

і ми отримали розв’язок системи рівнянь: $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -1.$

Задачі для практичного заняття

2.3. Знайти розв’язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера, методом оберненої матриці, методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 22, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 21; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 40, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -19, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 24; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Відповіді: 1) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -3;\ |A| = 28;\ A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{28} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{14} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{vmatrix};$

2) $x_1 = 3, x_2 = -5, x_3 = 1;\ |A| = 25;\ A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{8}{25} & -\frac{17}{25} & \frac{3}{25} \\ -\frac{17}{25} & -\frac{33}{25} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{6}{25} & -\frac{19}{25} & -\frac{4}{25} \end{vmatrix};$

3) $x_1 = -4, x_2 = 6, x_3 = 1;\ \ |A| = 11;\ \ A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{20}{11} & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{35}{11} & -2 \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \end{vmatrix}.$