Задача 1. (Класична формула обчислення ймовірності, комбінаторні формули)

У коробці 4 червоних та 6 зелених олівців. З неї випадково випали 5 олівців. Яка ймовірність, що два з них виявляться червоними, а три зелених?

Розв'язання

Позначимо через подію A – випали 2 червоних і 3 зелених олівця.

Для використання класичної формули ймовірності –

$$p(A)=\frac{m}{n},$$

визначимо m – число результатів випробування, сприятливих для події A, та n – число всіх рівноможливих елементарних подій випробування.

За умовами випробування – випадково випадають 5 олівців з коробки, в якій усього 10 олівців. З того, що нам **неважливий порядок елементів, а лише склад**, робимо висновок, що число всіх рівноможливих елементарних подій дорівнює числу **сполучень з 10 елементів по 5**:

$$n=C_{10}^{5}.$$

Визначимо, які комбінаторні формули необхідно використати для обчислення число результатів випробування, сприятливих для події A. З того, що у події A – випали 2 червоних і 3 зелених олівця, також **не важливий порядок випадіння олівців, а лише тільки склад**, ми також будемо використовувати формулу для обчислення **числа сполучень**. Так кількість можливих варіантів випадіння 2 червоних олівців з 4 існуючих в коробці олівців такого кольору дорівнює C_4^2, а кількість можливих варіантів випадіння 3 зелених олівців з 6 існуючих в коробці олівців такого кольору дорівнює C_6^3. І при цьому. Звідки m – число результатів випробування, сприятливих для події A

дорівнює:

$$m = C_4^2 \cdot C_6^3.$$

І ми вже можемо підставити у формулу для обчислення шуканої ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{4! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 10!} = 0,47619$$

Задача 2. (Формула повної ймовірності, Формула Байєса)

На склад надходить продукція 3 фабрик. Продукція першої фабрики складає 25%, другої – 45% і третьої – 30%. Відомо, що ймовірність браку продукції, виробленою першою фабрикою, дорівнює 0,2, другою – 0,2, третьою – 0,1.

а) Яка ймовірність, що випадково обраний зі складу продукт виявиться без браку?

б) Перевіряючий навмання обрав продукт зі складу, який виявився без браку. Яка ймовірність, що він був вироблений на першій фабриці?

Розв'язання

Спочатку визначимо всі події:

A_1 – продукт вироблений на першій фабриці;

A_2 – продукт вироблений на другій фабриці;

A_3 – продукт вироблений на третій фабриці;

B – випадково обраний зі складу продукт без браку.

Перейдемо до пунктів задачі.

а) Для визначення ймовірності, що випадково обраний зі складу продукт виявиться без браку, необхідно використати формулою повної ймовірності:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + P(A_3) \cdot P(B / A_3).$$

Знайдемо всі ймовірності подій, що входять до формули:

$$P(A_1)=\frac{25}{100}=0{,}25\,(\text{з умов задачі}-25\%);$$
$$P(A_2)=\frac{45}{100}=0{,}45\,(\text{з умов задачі}-45\%);$$
$$P(A_3)=\frac{30}{100}=0{,}3\,(\text{з умов задачі}-30\%);$$
$$P(B/A_1)=1-0{,}2=0{,}8\,(\text{з умов задачі});$$
$$P(B/A_2)=1-0{,}2=0{,}8\,(\text{з умов задачі});$$
$$P(B/A_3)=1-0{,}1=0{,}9\,(\text{з умов задачі}).$$

Звідки шукана ймовірність

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+P(A_3)\cdot P(B/A_3)=$$
$$=0{,}25\cdot 0{,}8+0{,}45\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}83.$$

б) Для визначення ймовірності того, що навмання обраний продукт зі складу, який виявився без браку, був вироблений на першій фабриці, скористуємось формулою Байєса:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+P(A_3)\cdot P(B/A_3)}=$$
$$=\frac{0{,}25\cdot 0{,}8}{0{,}83}\approx 0{,}241.$$

Задача 3. (Формула Бернуллі)

Серед виробів, виготовлених на верстаті-автоматі, загалом буває 60% виробів першого сорту. Яка ймовірність того, що серед 6 на удачу відібраних виробів буде рівно 4 вироби першого сорту?

Розв'язання

Умови задачі задовольняють умовам схеми незалежних випробувань.

Позначимо через подію A – на удачу обраний виріб першого сорту, відповідно ймовірність появи події A:

$$p = P(A) = \frac{60}{100} = 0,6.$$

А отже ймовірність події, протилежної до A:

$$q = P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

За умовами задачі серія незалежних випробувань складається з $n = 6$ відбирань виробів, а число появи виробів першого сорту, що нас цікавить, $m = 4$. Використовуючи формулу Бернуллі $p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, отримаємо шукану ймовірність:

$$p_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^2 = 0,31104.$$

Задача 4. (Дискретна випадкова величина)

Ймовірність того, що аудитор зробить помилку при перевірці бухгалтерського балансу, дорівнює 0,05. Аудитору на перевірку надано 2 баланси. Скласти таблицю розподілу дискретної випадкової величини – числа правильних висновків, багатокутник розподілу, визначити функцію розподілу ймовірностей та побудувати її графік.

Розв'язання (подібний приклад у Практичному 3)
