9. Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь

9.1. Постановка крайової задачі

Крайова задача для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку виду

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{9.1}$$

полягає в такому: знайти функцію $y=y(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$, що задовольняє рівняння (9.1) і крайові умови

$$\begin{cases} \phi_1(y(a),y'(a))=0 \\ \phi_2(y(b),y'(b))=0 \end{cases}, \tag{9.2}$$

де F, ϕ_1, ϕ_2 – задані неперервні функції відповідної кількості аргументів.

Крайова задача (9.1), (9.2) називається **лінійною**, якщо всі функції F, ϕ_1, ϕ_2 лінійні відносно y, y', y''. Таким чином, лінійна крайова задача для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку полягає в такому: знайти функцію $y=y(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$, що задовольняє лінійне рівняння виду

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{9.3}$$

і лінійні крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A \\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B \end{cases}, \tag{9.4}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні функції від x;

α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – задані константи, причому $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$, $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$.

Чисельні методи розв'язання задачі (9.1), (9.2), а зокрема і задачі (9.3), (9.4), знаходять розв'язок (тобто функцію $y(x)$ на відрізку $[a,b]$) у табличному вигляді, а саме у вигляді набору точок (x_i, y_i), $i=\overline{0,n}$, де $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$, $i=\overline{1,n}$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, n – задане число розбиття відрізка $[a,b]$, y_i, $i=\overline{0,n}$ – знайдені наближені значення функції $y(x)$ в точках x_i.

9.2. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Варто розглянути **метод кінцевих різниць** розв'язання лінійної крайової задачі (9.3), (9.4).

Слід зазначити, що для пошуку чисельного розв'язку задачі (9.3), (9.4) необхідно знайти всі значення y_i, $i=\overline{0,n}$, тому вони розглядаються як невідомі.

Вводять позначення:

$$p_i = p(x_i),\ q_i = q(x_i),\ f_i = f(x_i),\ i=\overline{1,n}.$$

Замінюють наближено в кожному внутрішньому вузлі x_i похідні $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ кінцево-різницевими формулами (див. розділ 8.2):

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},\ y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях відрізка $[a,b]$ покладають:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1-y_0}{h},\ y'(x_n) \approx \frac{y_n-y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи ці формули, наближено замінюють рівняння (9.3) (в точках x_i, $i=\overline{1,n}$) і крайові умови (9.4) системою рівнянь

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i,\ (i=\overline{1,n-1}); \tag{9.5}$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1\frac{y_1-y_0}{h} = A; \tag{9.6}$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \qquad (9.7)$$

Отримана система (9.5) – (9.7) є лінійною алгебраїчною системою $(n+1)$ рівнянь відносно $(n+1)$ невідомих y_i, $i = \overline{0,n}$. Розв'язавши її, якщо це можливо, і буде отримана таблиця наближених значень шуканої функції $y(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Погрішність методу кінцевих різниць, що оцінюється для величин $|y_i - y(x_i)|$, $i = \overline{0,n}$, має порядок $O(h^2)$ [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Варто додати, що систему (9.5) – (9.7) при розв'язанні краще записати у вигляді

$$\begin{cases} (\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 = Ah \\ (1 - \frac{p_i h}{2}) y_{i-1} + (q_i h^2 - 2) y_i + (1 + \frac{p_i h}{2}) y_{i+1} = f_i h^2 \ (i = \overline{1, n-1}), \\ -\beta_1 y_{n-1} + (\beta_0 h + \beta_1) y_n + = Bh \end{cases} \qquad (9.8)$$

Слід звернути увагу на те, що система лінійних алгебраїчних рівнянь (9.5) має трьохдіагональний вигляд, а саме: в кожне i-те внутрішнє рівняння входять лише 3 невідомі y_{i-1}, y_i, y_{i+1}. Для розв'язання такого виду систем на практиці використовують **метод прогонки** [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Цей чисельний метод, по суті, є модифікацією методу Гауса, пристосованою для прискореного пошуку розв'язку систем трьохдіагонального виду (див. розділ 3.3).

Приклад 9.1. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу $x^2 y'' + xy' = 1$, $y(1) = 0$, $y(1.4) = 0{,}05661$ з числом розбиття відрізка $n = 10$.

Дана крайова задача є лінійною задачею, тому насамперед необхідно привести її до вигляду (9.3), (9.4). Тоді саме диференціальне рівняння запишеться так: $y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^2}$, тобто $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є:

1) задані неперервні функції від x: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$;

2) задані константи α_0, α_1, β_0, β_1, A, B;

3) відрізок $[a,b]$, на якому шукається розв'язок задачі;

4) число розбиття n відрізка $[a,b]$.

```
p1 = function(x) { return(1/x) }
q1 = function(x) { return(0) }
f1 = function(x) { return(1/(x^2)) }
a1 = 1
b1 = 1.4
alpha1 = c(1,0)
beta1 = c(1,0)
A1 = 0
B1 = 0.05661
n = 10
```

Оскільки розв'язання крайової задачі зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, то спочатку необхідно обчислити матрицю коефіцієнтів і вектор-стовпець вільних членів системи рівнянь (9.5).

Процедура обчислення матриці коефіцієнтів і вектора-стовпця вільних членів системи (9.8) і реалізація методу кінцевих різниць для розв'язання лінійної крайової задачі для диференціальних рівнянь другого порядку може бути записана так:

```
LinDEbp = function(p, q, f, a, b, alpha, beta, A, B, n)
{
  h = (b-a)/n
  x = c(1:(n+1))
  for (i in 1:(n+1))
  {
    x[i] = a + (i-1)*h
  }
```

```
    C = matrix(0, nrow=(n+1), ncol=(n+1))
    d = c(1:(n+1))

    C[1,1] = (alpha[1])*h - alpha[2]
    C[1,2] = alpha[2]
    C[(n+1),n] = -beta[2]
    C[(n+1),(n+1)] = (beta[1])*h+beta[2]
    for (i in 2:n)
    {
      C[i,(i-1)] = 1-h*p(x[i])/2
      C[i,i] = (h^2)*q(x[i])-2
      C[i,(i+1)] = 1+h*p(x[i])/2
    }
    d[1] = A*h
    d[n+1] = B*h
    for (i in 2:n)
    {
      d[i] = f(x[i])*h^2
    }
    y = solve(C, d)
    return(cbind(x, y))
  }
```

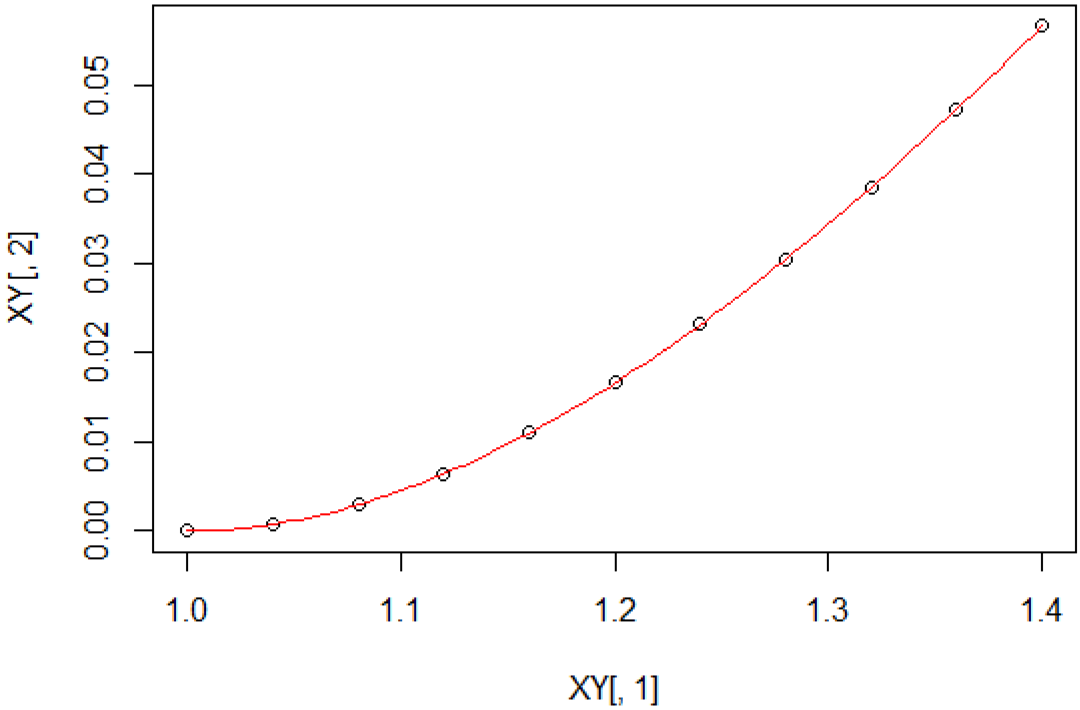
Для розв'язання системи була використана процедура *solve* пакета R, хоча краще було б реалізувати метод прогонки.

Розв'язком крайової задачі є таблично подана функція $y = y(x)$. Результат обчислення з використанням записаних процедур:

```
> n = 10
> XY = LinDEbp(p1, q1, f1, a1, b1, alpha1, beta1, A1, B1, n)
> XY
         x             y
 [1,] 1.00 -6.743312e-17
 [2,] 1.04  7.724224e-04
 [3,] 1.08  2.967076e-03
 [4,] 1.12  6.428724e-03
 [5,] 1.16  1.102204e-02
 [6,] 1.20  1.662857e-02
 [7,] 1.24  2.314416e-02
 [8,] 1.28  3.047698e-02
 [9,] 1.32  3.854571e-02
[10,] 1.36  4.727816e-02
[11,] 1.40  5.661000e-02
```

Аналітичним розв'язком заданого диференціального рівняння другого порядку є функція $YT(x) = 0.5(\ln(x))^2$. Аналітичний і чисельний розв'язки можна подати графічно:

```
> # Будуємо графік чисельного розв'язку
> plot(XY[,1], XY[,2], type="p")
> # Порівнюємо отриманий розв'язок з точним (аналітичним)
> # розв'язком
> n1 = 100
> x = seq(a1,  b1, len=n1)
> y = c(1:n1)
> for(i in 1:n1){ y[i] = 0.5*(log(x[i]))^2 }
> lines(x, y, type="l", col="red")
```



З графіка видно, що чисельний та аналітичний розв'язки збігаються.

9.3. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Варто розглянути тепер крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння

$$y'' = f(x, y, y') \tag{9.9}$$

при лінійних обмеженнях

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases}, \tag{9.10}$$

де $f(x, y, y')$ – задана неперервна функція, α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – задані константи.

Метод кінцевих різниць для задачі (9.9) – (9.10) записується таким чином.

Знову необхідно знайти всі наближені значення y_i, $i = \overline{0, n}$, функції $y = y(x)$ у рівновіддалених вузлах $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$, $i = \overline{1, n}$ з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$, де n – задане число розбиття відрізка $[a, b]$.

Треба замінити наближено в кожному внутрішньому вузлі x_i похідні $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ симетричними кінцево-різницевими формулами (див. розділ 8.2):

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},\ y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях відрізка $[a, b]$ покласти:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h},\ y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи ці формули, наближено замінюють рівняння (9.9) (в точках x_i, $i = \overline{1, n}$) і крайові умови (9.10) системою рівнянь

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}),\ (i = \overline{1, n-1}); \qquad (9.11)$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \qquad (9.12)$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \qquad (9.13)$$

Таким чином, отримуємо систему (9.11) – (9.13) $(n+1)$ нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $(n+1)$ невідомих y_i, $i = \overline{0, n}$. Розв'язавши її, і буде отримана таблиця наближених значень шуканої функції $y(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Слід зазначити, що для розв'язання системи (9.11) – (9.13) можна скористатися методом Ньютона (див. розділ 5.2) або методом ітерацій (див. розділ 5.3) [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Приклад 9.2. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу $y'' = \dfrac{1 - xy'}{x^2}$, $y(1) = 0$, $y(1.4) = 0{,}05661$, з числом розбиття відрізка $n = 10$.

Розв'язання в математичному пакеті R

Дана крайова задача може підпадає під вид (9.9) – (9.10).

Відправними даними задачі є:

1) задана неперервна функція $f(x, y, y')$;

2) задані константи α_0, α_1, β_0, β_1, A, B;

3) відрізок $[a, b]$, на якому шукається розв'язок задачі;

4) число розбиття n відрізка $[a, b]$.

```
f2 = function(x, y, yd) { return((1-x*yd)/(x^2)) }
a1 = 1
b1 = 1.4
alpha1 = c(1,0)
beta1 = c(1,0)
A1 = 0
B1 = 0.05661
eps = 0.00001
kmax = 100
n = 10
```

Систему (9.11) – (9.13) треба розв'язати методом ітерацій, тому для розв'язання допоміжної лінійної системи рівнянь необхідно запрограмувати обчислення елементів цієї системи. Тоді процедура розв'язання крайової задачі для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку методом кінцевих різниць може бути записана так:

```
# Програмуємо функцію обчислення норми вектора
Norma = function(x){
  return( sqrt(crossprod(x, x)) )
}
```

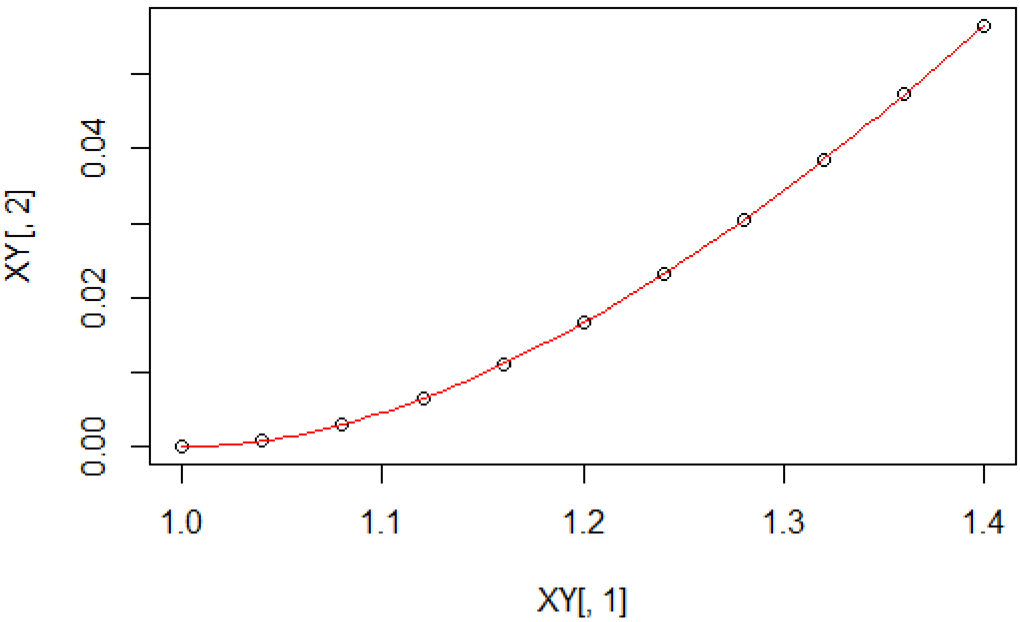
```
# процедура розв'язку лінійного диф. рівняння
# методом кінцевих різниць
nLinDEbp = function(f, a, b, alpha, beta, A, B, n, eps, kmax)
{
  h = (b-a)/n
  x = c(1:(n+1))
  y = c(1:(n+1))

  for (i in 1:(n+1))
    x[i] = a + (i-1)*h
  y[1] = A
  y[n+1] = B
  # Задаємо початкове значення для шуканих y
  for (i in 2:n)
    y[i] = (y[1] + y[n+1])/2

  C = matrix(0, nrow=(n+1), ncol=(n+1))
  d = c(1:(n+1))

  C[1,1] = (alpha[1])*h - alpha[2]
  C[1,2] = alpha[2]
  C[(n+1),n] = -beta[2]
  C[(n+1),(n+1)] = (beta[1])*h+beta[2]
  d[1] = A*h
  d[n+1] = B*h
  for (i in 2:n)
  {
    C[i,(i-1)] = 1
    C[i,i] = -2
    C[i,(i+1)] = 1
  }
  for (k in 0:kmax)
  {
     for (i in 2:n)
     {
         ydi = (y[i+1] - y[i-1])/(2*h)
          d[i] = f(x[i], y[i], ydi)*h^2
     }
     y1 = solve(C, d)
     if(Norma(y1-y) <= eps)
          break
      y = y1
  }
  return(cbind(x, y1))
}
```

Розв'язком крайової задачі є таблично подана функція $y = y(x)$. Результат обчислення з використанням записаних процедур:

```
> n = 10
> XY = nLinDEbp(f2, a1, b1, alpha1, beta1, A1, B1, n, eps, kmax)
> XY
         x            y1
 [1,] 1.00 -2.493665e-17
 [2,] 1.04  7.725171e-04
 [3,] 1.08  2.967249e-03
 [4,] 1.12  6.428928e-03
 [5,] 1.16  1.102222e-02
 [6,] 1.20  1.662868e-02
 [7,] 1.24  2.314420e-02
 [8,] 1.28  3.047695e-02
 [9,] 1.32  3.854565e-02
[10,] 1.36  4.727811e-02
[11,] 1.40  5.661000e-02
```

Аналітичним розв'язком заданого диференціального рівняння другого порядку є функція $YT(x) = 0.5(\ln(x))^2$. Аналітичний і чисельний розв'язки можна подати графічно:

```
> # Будуємо графік чисельного розв'язку
> plot(XY[,1], XY[,2], type="p")
> # Порівнюємо отриманий розв'язок
> # з точним (аналітичним) розв'язком
> n1 =100
> x = seq(a1,  b1, len=n1)
> y = c(1:n1)
> for(i in 1:n1){ y[i] = 0.5*(log(x[i]))^2 }
> lines(x, y, type="l", col="red")
```



З графіка видно, що чисельний та аналітичний розв'язки збігаються.

У прикладах 9.1 і 9.2 була розв'язана одна й та ж крайова задача, але різними методами. Отримані результати співпадають.

9.4. Висновки

1. Математичні моделі процесів та явищ, зокрема моделі динамічних систем, у більшості випадків записуються у вигляді диференціальних рівнянь.
2. Задача Коші і крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь має велике практичне значення.

9.5. Контрольні запитання та завдання

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
2. Сформулюйте постановку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Що є її розв'язком? У якому вигляді подається розв'язок чисельним методом?
3. В чому суть метода кінцевих різниць для лінійної крайової задачі? Які він має оцінки погрішності?
4. Розв'яжіть методом кінцевих різниць крайову задачу $y'' + x^2 y' + (1 - x)y = \dfrac{x}{x^2 + 3}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, з числом розбиття відрізка $n = 25$. Побудуйте графік отриманого розв'язку.
5. Розв'яжіть методом кінцевих різниць нелінійне диференціальне рівняння другого порядку $y'' - 2xy' - 2y^2 = -4x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3.7$ з числом розбиття відрізка $n = 20$. Побудуйте графік отриманого розв'язку.