МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ І МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Харків, вид. ХНЕУ ім..С.Кузнеця, 2017

Вступ

Сучасним основним методом дослідження будь-яких систем є метод моделювання, а саме спосіб теоретичного аналізу і практичних дій, спрямований на розробку і використання моделей . Сьогодні багатьма вченими вважається, що розвиток будь-якої науки можна трактувати в загальному сенсі як теоретичне моделювання. Особливе значення набувають моделі у вивченні закономірностей масових процесів, які недоступні безпосередньому спостереженню і не підлягають експериментуванню. Це відноситься, перш за все, до процесів та явищ в економіці, які формуються і розвиваються під впливом нескінченної кількості взаємопов'язаних факторів і за своєю складністю переважають над технічними, хімічними та ін.

У загальному розумінні модель використовується як умовний образ, сконструйований для спрощення реального об'єкта в процесі його вивчення. Під час розробки моделей дотримуються основних методологічних принципів: адекватності, динамізму й евристичності. Принцип адекватності висловлює матеріальна вимога до процесу моделювання: необхідність об'єктивної відповідності моделі оригіналу як умова об'єктивної істинності знання. На відміну від принципу адекватності, принцип динамізму вказує на мінливість всіх основних елементів процесу моделювання: у процесі змін цілей дослідження, зміни об'єкта, модель повинна пристосовуватися до нових умов і завдань. Принцип заміщення стверджує посередницьку функцію моделі в дослідженні. Особливо важливо це тоді, коли можна провести модельний експеримент. Принцип евристичності націлює на розширене відтворення знань. Цими методологічними принципами керуються під час розробки моделей різних типів.

Математичне моделювання є ідеальним науковим знаковим формалізованим моделюванням, за якого опис об'єкта здійснюється мовою математики, а дослідження моделі виконується за допомогою математичних методів.

На разі немає загальноприйнятої класифікації моделей. Розрізняють: матеріальні; знакові моделі, а саме графічні та математичні; матеріально-ідеальні. Існує багато визначень математичної моделі. Згідно з математичною енциклопедією «модель – інтерпретація формальної мови». Й далі: «математична модель – наближений опис якого-небудь класу явищ зовнішнього світу, виражений за допомогою математичної символіки» .

Також під математичною моделлю прийнято розуміти сукупність співвідношень – рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів і т. д., що визначають характеристики стану об'єкта моделювання, параметри функціонування і розвитку його. Ще математична модель визначається як гомоморфне відображення у вигляді впорядкованої сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відносин, графіків, умовний образ об'єкта, складений для спрощення його дослідження.

В економіці найчастіше використовується економічно-математична модель. Вона виражає економічну систему за допомогою формально-математичних термінів, логічна структура якої визначається як об'єктивними властивостями, так і суб'єктивним цільовим чинником дослідження, для якого цей вираз здійснюється. Економіко-математичне моделювання має зворотний вплив на дослідника, вимагаючи від нього чіткості формулювання дослідницьких завдань, суворої логічності у побудові гіпотез і концепцій.

Економіко-математичні моделі класифікуються:

за способом відображення дійсності: аналогові, концептуальні, структурні, інформаційні, функціональні;

за ознакою цільового призначення: теоретико-аналітичні, прикладні;

щодо практичного призначення: балансові, дескриптивні, імітаційні, рівноваги, нерівноваги, прескриптивні, оптимізаційні;

за способом логіко-математичного опису економічних систем: аналітичні, імовірнісні, детерміновані, лінійні, нелінійні, математико-статистичні, матричні, економетричні;

за тимчасовими і просторовими ознаками: динамічні, статичні, точкові, трендові;

за внутрішньою структурою модельного опису системи: автономні, глобальні, закриті, відкриті, комплекс моделей, макроекономічні, мікроекономічні, багатосекторні, одно-, багатопродуктові;

за областю використання: за типом економічних завдань, за видом математичного методу, застосованого під час розробки моделей.

На мікрорівні, наприклад, на рівні підприємств, у вирішенні реальних економічних завдань найчастіше в економіко-математичному моделюванні використовуються економетричні, оптимізаційні та балансові моделі. Математико-статистичні моделі передбачають застосування інструментів математичної статистики. Оптимізаційні моделі охоплюють деяку кількість варіантів виробництва, розподілу і споживання і призначена для вибору таких значень змінних, що характеризують ці варіанти, щоб був знайдений кращий з них [35, с. 356]. Відмінною рисою цих моделей є те, що вони містять як рівняння, що описують взаємозв'язки між змінними, так і критерії для вибору – функціонал або цільову функцію. Дані моделі відносяться до класу екстремальних завдань і описують умови функціонування економічної системи.

Економіко-математичне моделювання можна розглядати як послідовну логіку взаємопов'язаних етапів: визначення мети моделювання, аналіз сформульованої проблеми і розробка концептуальної моделі; побудова математичної моделі та її аналіз; підготовка висхідних даних; чисельне рішення моделі; аналіз числових результатів на несуперечність з концептуальною моделлю та за необхідністю удосконалення моделі; використання моделі для обгрунтування управлінського рішення.

Мету моделювання слід формулювати виходячи з сутності проблеми дослідження. Тому спочатку формуються гіпотези, що пояснюють поведінку і розвиток модельованого об'єкта, а також прогнозують цілі, які будуть змінювати в часі.

На етапі аналізу сформульованої проблеми і розробки концептуальної моделі передбачається виділення меж економічної системи, її структуризація. Під структурою економічної системи розуміють її статичне уявлення в розрізі матеріальних і нематеріальних елементів, які забезпечують її форму й організованість. Процес логічного поділу великої проблеми на окремі елементи передбачає отримання об'єктивного управлінського рішення, прийнятого на основі економіко-математичної моделі. Призначення концептуальних моделей – змістовно представляти суттєві властивості об'єкта і головні зв'язки між цими властивостями.

На етапі побудови математичної моделі здійснюється формалізація концептуальної моделі. Математична формалізація позначає, що відпрацьовані конкретні правила дій, концептуальні положення, адекватні цілям дослідження і прийнятій системі гіпотез, здійснюється глибинний зв'язок між математичним інструментом, предметом дослідження і дослідником. Етап математичного аналізу моделі пов'язаний з тим, що математичними прийомами дослідження виявляються загальні властивості моделі та її рішень, при цьому важливим моментом є доказ існування рішення сформульованої задачі.

На етапі підготовки висхідних даних передбачається вимірювання ознак об'єкта, які є його основними властивостями і відображення величин в системі показників. Інформаційною моделлю в економіко-математичному моделюванні вважають ієрархічну систему показників, що відображають ознаки об'єкта.

На етапі чисельного рішення моделі використовують існуючі програмні засоби, прикладні пакети, розробляються спеціальні обчислювальні програми для реалізації моделі. Обчислення можуть мати різноманітний характер для вивчення поведінки моделі у різних умовах і обмеженнях.

Аналіз числових результатів та їх використання містять перевірку правильності та повноти результатів моделювання та використання в практичній діяльності, а також для вдосконалення самої моделі. На цьому етапі слід виконати верифікацію (перевірку правильності структури, логіки моделі) і валідацію моделі (перевірку відповідності даних, отриманих на основі моделі, реальному процесу). У випадку виявлення помилки, неточностей слід вияснити причину та повернутися на попередні етапи для удосконалення.

Етап використання результатів моделювання для прийняття управлінського рішення складається з якісного аналізу отриманих результатів, які не тільки представляються формулами, але і для наочності зображуються у вигляді графіків, таблиць, схем.

Велику групу математичних методів в економіці утворюють оптимізаційні методи, оскільки перед менеджерами, економістами, працівниками системи управління, інженерами різного рівня виникають проблеми прийняття рішення, які вимагають оптимізації результатів різних видів діяльності з урахуванням наявних ресурсів. Існує спеціальна теорія прийняття рішення, що має економічні, психологічні, політичні, соціальні, фінансові та інші аспекти, враховуючи які слід шукати найкращі рішення. Алгоритмізація процесу розробки моделі передбачає використання різних математичних методів для пошуку найкращого рішення. Ці методи поділяються на методи лінійної та нелінійної оптимізації.

Типовими оптимізаційними завданнями є задачі оптимального планування, в яких виділяють змінні і параметри (кількість купованих продуктів, кількість виробленої продукції, кількість перевезеного вантажу), ціль, яку бажають досягти (функція цілі) і яку слід оптимізувати (мінімізувати витрати на споживання, максимізувати прибуток підприємства, мінімізувати вартість перевезень) і обмеження, тобто умови, що обмежують можливості досягнення бажаної цілі (в раціоні повинні бути визначені компоненти, обмежені ресурси підприємства, кількість перевезеного товару). Цільова функція має сенс очікуваної «цінності» або «корисності». Задача оптимального планування також називається оптимізаційною або екстремальною задачею.

У задачах оптимізації можуть бути виділені характеристики об'єкта (об'єктів), якими можна або треба варіювати для досягнення цілі. Такі характеристики називаються керованими змінними або керованими параметрами. Набір значень керованих змінних у задачах оптимізації називаються розв’язком. Значення керованих змінних можуть бути обмеженими. Розв’язок, що задовольняє висунуті обмеження називають допустимим розв’язком. Оптимальним називається допустимий розв’язок, який з деяких причин переважає над іншим розв’язком, наприклад, розв’язок, за якого цільова функція екстремальна. Існують також некеровані змінні, тобто зміна їх значень не залежить від керуючого суб'єкта.

Задачі оптимізації в економіці об'єднуються в розділі «Дослідження операцій», який передбачає використання математичних методів для моделювання та аналізу ситуацій в економіці. Серед цих методів окремо виділяють лінійне і нелінійне програмування, називаючи математичним програмуванням, що є одним з основних методів прийняття виробничо-економічних рішень.

Оптимізаційні задачі за видом цільової функції і за виглядом обмежень класифікуються на групи. Якщо функція цілі і система обмежень є лінійними, то говорять про лінійне програмування, в іншому випадку виникає задача нелінійного програмування. У разі квадратичної функції цілі і лінійної системи обмежень задачу оптимізації називають задачею квадратичного програмування. Якщо функцію цілі можна представити у вигляді суми таких функцій, що кожна з них залежить тільки від однієї змінної, то розглядають задачу сепарабельного програмування. Якщо керовані змінні принципово можуть бути тільки цілими, то така задача оптимізації називається цілочисельною.

Якщо функція цілі є опуклою функцією, то така задача оптимізації називається задачею опуклого програмування. Якщо функція φ_i, визначають обмеження $\varphi_i(X, Z) \le (\ge, =) b_i$ є опуклими вгору (опуклими вниз) функціями, то вони породжують опуклу множину допустимих розв’язків.

За інформаційними властивостями оптимізаційні задачі діляться на статичні і динамічні. Якщо суб'єкт у процесі прийняття рішення не змінює свій інформаційний стан, то ухвалення рішення розглядається як миттєвий факт і такі задачі називаються статичними. Якщо суб'єкт у процесі прийняття рішення змінює свій інформаційний стан, то рішення приймається поетапно і задача називається динамічною.

Крім наведених моделей до оптимізаційних іноді відносять імітаційні моделі та евристичні. Імітаційні моделі дозволяють імітувати поведінку дуже складних систем, для яких не можливо побудувати математичні моделі та отримати розв'язок. Тут виникають складнощі, пов'язані з розробкою експерименту, перевіркою статистичної значущості його результатів, а також сам процес оптимізації викликає ускладнення. Якщо наявна задача оптимізації настільки складна, але існує припущення, що рішення є, то використовують різні евристичні методи, які засновані на інтуїції дослідника або на емпіричних даних. Слід вказати, що точність моделі також залежить від обсягу і складу наявних вихідних даних.

1. Задача лінійного програмування і методи її розв'язання

1.1. Постановка задачі лінійного програмування.

1.2. Канонічна форма задачі лінійного програмування.

1.3. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування.

1.4. Властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування.

1.1. Постановка задачі лінійного програмування

У щоденній практиці економісти, менеджери ухвалюють управлінські рішення, від обґрунтованості яких залежить ефективне функціонування підприємства, його розвиток. Якщо при пошуку управлінського рішення враховуються основні наявні умови, критерії дії, тобто раціональність і доцільність ґрунтуються на оптимальності, то такі рішення рідко призводять до збитків та втрати. Тому більшість задач в економіці є оптимізаційними. Однією з найпоширеніших оптимізаційних задач є задачі, пов'язані з плануванням виробництва на підприємстві: розробка плану випуску максимального обсягу продукції при обмежених сировинних ресурсах або в межах конкретного плану виробництва визначення мінімально необхідного обсягу виробничих витрат. До цієї групи належить задача про оптимальну суміш, наприклад, задача про дієту, де необхідно враховувати калорійність і споживчу цінність продуктів, а також їх вартість; задачі про визначення оптимального складу сумішей у процесі відгодівлі тварин. До цієї ж групи, також, належить задача про розкрій матеріалів, суть якої полягає в розробці таких технологічно допустимих планів розкрою, за яких виходить необхідний комплект заготовок, а відходи зводяться до мінімуму. Іншим найбільш поширеним класом задач є задача про мінімізацію транспортних витрат, коли мова йде про раціональне перевезення деякого однорідного продукту від виробників до споживачів.

Розглянемо типові задачі лінійного програмування (ЗЛП).

Задача про оптимальне використання ресурсів

Нехай для виробництва деякої продукції A_1, A_2, A_3 використовуються ресурси B_1, B_2, B_3, B_4 (сировина, напівфабрикати, обладнання, фінанси), запаси яких складають b_1, b_2, b_3, b_4. Відомі норми витрат a_{ij} кожного виду ресурсу B_i на виготовлення одиниці продукції A_j, а також прибуток c_j від виробництва і реалізації кожного виду продукції (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Умова задачі

Ресурси	Продукція			Запаси ресурсів
	A_1	A_2	A_2	
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
B_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	b_4
Прибуток	c_1	c_2	c_3	

Необхідно знайти план виробництва, тобто необхідно виготовити таку кількість x_1, x_2, x_3 продукції кожного виду, щоб максимізувати загальний прибуток. Оскільки прибуток від виробництва одиниці A_1 дорівнює c_1, то прибуток від планової кількості x_1 буде дорівнювати $c_1 x_1$; загальний прибуток буде дорівнювати сумі прибутків від виробництва всіх видів продукції:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \to max.$$

Витрати ресурсу B_1 на виробництва запланованих обсягів продукції x_1, x_2, x_3 будуть дорівнювати добуткам $a_{11}x_1$, $a_{12}x_2$, $a_{13}x_3$. Необхідно врахувати, що загальні витрати цього ресурсу $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ не можуть перевищувати його запаси b_1, тобто: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$. Запишемо аналогічні умови за усіма видами ресурсів і отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4. \end{cases}$$

Додамо ще вимогу невід'ємності невідомих $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

знайти максимум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

за наявності лінійної системи обмежень-нерівностей:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \\ (i = \overline{1, m}), \end{cases}$$

де усі $x_j \ge 0$; n – кількість видів продукції; m – кількість видів ресурсів.

Це є задача лінійного програмування (ЗЛП).

Модель, де потрібно знайти максимум лінійної функції цілі при лінійних обмеженнях типу $\le$ є ***першою стандартною формою*** ЗЛП. Якщо продукція вимірюється в штуках, то в модель ще потрібно включити умову, щоб усі невідомі були цілими.

Приклад. Для виготовлення двох типів в'язальних станків підприємство використовує три основних види сировини: метал, пластик, алюміній. На виробництво одного в'язального верстату першого типу необхідно витратити металу 10 кг, пластику 5 кг і алюмінію 4 кг. На виробництво одного в'язального станка другого типу необхідно витратити металу 9 кг, пластику 11 кг і алюмінію 15 кг. Виробництво забезпечено металом в обсязі 1870 кг, пластиком −

1455 кг, алюмінієм – 1815 кг. Прибуток від реалізації одиниці в'язального верстату першого типу становить 700 грн, а від реалізації одиниці в'язального с верстату другого типу становить 900 грн. Скласти план виробництва в'язальних с верстатів на підприємстві, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

Умова даної задачі може бути записана в табличній формі (табл. 1.2)

Таблиця 1.2

Умова задачі

Сировина (кг)	В'язальні верстати		Запаси сировини (кг)
	1-го типу	2-го типу	
Метал	10	9	1 870
Пластик	5	11	1 455
Алюміній	4	15	1 815
Прибуток (грн)	700	900	

Для складання економіко-математичної моделі позначимо: x_1 – кількість в'язальних верстатів першого типу; x_2 – кількість в'язальних верстатів другого типу, які може виробити підприємство, враховуючи обмежені обсяги сировини та максимізуючи прибуток. Критерієм оптимальності плану є забезпечення максимуму прибутку.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

знайти максимум лінійної функції цілі

$$Z = 700x_1 + 900x_2 \to max,$$

за обмежень:

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \le 1870, \\ 5x_1 + 11x_2 \le 1455, \\ 4x_1 + 15x_2 \le 1815, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача складання найдешевшого раціону (кормової суміші) або задача про суміші (задача про дієту)

З наявних у продажу продуктів необхідно скласти такий раціон харчування, щоб його загальна вартість була найменшою, при цьому повинні бути забезпечені усі потреби організму в поживних речовинах (білки, жири, вуглеводи). У табл. 1.3 наведено дані про зміст поживних речовин B_1, B_2, B_3 у кожному виді продуктів A_1, A_2, A_3, A_4, вартості продуктів і мінімальні потреби організму в поживних речовинах.

Таблиця 1.3

Умова задачі

Продукти	Поживні речовини			Вартість продуктів
	B_1	B_2	B_3	
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	c_2
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_3
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	c_3
Щоденний попит	b_1	b_2	b_3	

Необхідно визначити, з якої кількості кожного виду продуктів повинен складатися найбільш дешевий раціон. Позначимо ці невідомі кількості (склад раціону) через x_1, x_2, x_3, x_4. Вартість одиниці продукту A_1 дорівнює c_1, в раціон входить x_1 одиниць продукту загальною вартістю $c_1 x_1$. Враховуючи витрати на інші види продуктів, отримаємо вартість кожного раціону:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 \to min.$$

Далі потрібно визначити, яка кількість першого виду поживної речовини B_1 міститься в раціоні. У табл. 1.3 наведено дані a_{i1} про зміст речовини B_1 в одиниці кожного виду продуктів A_i. Ці величини необхідно помножити на x_i і скласти суму: $a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4$. Потрібно, щоб у раціоні сумарна кількість цього виду поживної речовини була не менше, ніж мінімальна добова потреба: $a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1$.

Уся система обмежень за видами поживних речовин має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1; \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + a_{42} x_4 \geq b_2; \\ a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{43} x_4 \geq b_3. \end{cases}$$

До цієї системи слід додати умову невід'ємності невідомих:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Математична модель задачі представлена в такому вигляді:

знайти мінімум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to min$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge b_j \\ (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,$$

де n – кількість видів поживних речовин; m – кількість продуктів, які входять в раціон.

Ця задача є задачею лінійного програмування. Порівняно з попередньою задачею моделі в деякому змісті взаємні – зараз потрібно знайти мінімум лінійної функції цілі при лінійних обмеженнях типу $\ge$. Така форма моделі є ***другою стандартною формою*** задачі ЗЛП.

Приклад. До деякого сплаву може входити принаймні 4% нікелю і не більше 80% заліза. Для складання сплаву використовують три види сировини (наприклад, відходи, лом), що містять залізо, нікель та інші речовини; крім того можуть використовуватись добавки з чистого нікелю, заліза, та інших речовин. Вартість кожного виду сировини, місткість в них відповідних речовин і їх запаси наведені в табл. 1.4. Скільки кілограмів першого, другого, третього видів сировини, чистого заліза, нікелю та інших елементів слід включити до шихти, щоб собівартість 1 т сплаву була мінімальною?

Таблиця 1.4

Умова задачі

	Вид сировини			Компонент сплаву		
залізо	70 %	90 %	85 %	100 %		
нікель	5 %	2 %	7 %		100 %	
інші	25 %	8 %	8 %			100 %
Вартість 1 кг, грн	6	4	5	2,5	67	20
Запаси, кг	800	700	1 100	не обмежено	не обмежено	не обмежено

Позначимо: x_1, x_2, x_3 – обсяги сировини першого, другого, третього видів, які необхідно знайти (кг); x_4 – обсяг чистого заліза (кг); x_5 – обсяг нікелю (кг); x_6 – обсяг інших елементів, що входять в 1 т шихти (кг).

Математична модель даної задачі має вигляд:

знайти мінімум лінійної функції цілі (мінімум вартості 1 т (1 000 кг) шихти):

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2{,}5x_4 + 67x_5 + 20x_6 \to min,$$

за обмежень

$$\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}85x_3 + x_4 \le 800, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}07x_3 + x_5 = 40, \\ x_1 \le 800, \\ x_2 \le 700, \\ x_3 \le 1100, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000, \\ x_{1,\dots,6} \ge 0. \end{cases}$$

Транспортна задача

У транспортній задачі потрібно скласти найбільш дешевий план перевезення однорідного продукту з пунктів виробництва A_1, A_2 в пункти споживання B_1, B_2, B_3. У табл. 1.5 представлені відомості про запаси a_i у пунктах виробництва, попит b_j у пунктах споживання і тарифи c_{ij} – вартості перевезення одиниці товару з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення.

Таблиця 1.5

Умова задачі

Постачальники	Споживачі			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Попит	b_1	b_2	b_3	

Невідомі x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j. Як правило, в збалансованій задачі загальний попит $b_1 + b_2 + b_3$ дорівнює загальному запасу $a_1 + a_2$. Необхідно вивезти всі запаси і задовольнити весь попит з найменшими транспортними витратами.

Складаємо функцію цілі, що описує загальні транспортні витрати. Тариф c_{11} показує вартість перевезення одиниці продукції за маршрутом A_1–B_1; витрати на перевезення за цим маршрутом кількості товару x_{11} будуть дорівнювати добутку $c_{11}x_{11}$. Загальні витрати будуть рівні сумі таких величин:

$$Z = (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13}) + (c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}) \to min.$$

Кількість товару, вивезеного з A_i, має бути рівним запасу a_i:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1\,; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2\,. \end{cases}$$

Кількість товару, вивезеного з B_j, має бути рівним запасу b_j:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = b_1\,; \\ x_{21} + x_{22} = b_2\,; \\ x_{31} + x_{32} = b_3\,. \end{cases}$$

Усі невідомі в цій задачі − невід'ємні: $x_{ij} \geq 0$.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

знайти мінімум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

за обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ (i = \overline{1, m}) \end{cases}; \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Транспортна задача також є задачею ЛП.

Приклад. Підприємство має три цеха (A_1, A_2, A_3) і чотири склади (B_1, B_2, B_3, B_4). Перший цех виробляє 30 тис. шт. виробів, другий – 40 тис. шт. виробів, третій – 20 тис. шт. виробів. Пропускна здатність складів характеризується показниками: склад 1 – 20 тис. шт., склад 2 – 30 тис. шт., склад 3 – 30 тис. шт., склад 4 – 10 тис. шт. Вартість перевезення з першого цеху до складів 1, 2, 3, 4 за одну тисячу штук виробів відповідно 2, 3, 2, 4 грн., з другого – 3, 2, 5,1 грн., з третього – 4, 3, 2, 6 грн. Скласти такий план перевезення виробів, за якого витрати на перевезення були б найменшими.

Умова задачі в табличній формі представлена в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Умова задачі

Цех	Склад				Обсяги виробництва, тис. шт.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Місткість складів	20	30	30	30	90

Позначимо: x_{ij} – кількість вантажу, який необхідно перевезти з цеху A_i до складу B_j, щоб витрати перевезення були б найменшими.

Математична модель даної транспортної задачі:

знайти мінімум лінійної функції цілі:

$$Z = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + x_{24} +$$
$$4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min,$$

за обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10, \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

1.2. Канонічна форма задачі лінійного програмування

У загальній задачі ЛП розшукується максимум або мінімум лінійної функції цілі за наявності системи лінійних обмежень у вигляді рівностей і нерівностей будь-якого типу ($\le$ або $\ge$). Невідомі можуть бути невід'ємними, недодатними, не мати ніяких обмежень на знак, мати двосторонні обмеження типу $d_j \le x_j \le g_j$.

Існує три стандартних форми завдання, першу і другу стандартні форми були розглянуті вище. Третя (основна) стандартна форма названа «канонічною».

У канонічній формі відшукується максимум лінійної функції цілі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \qquad (3.7)$$

за наявності системи лінійних обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \\ (i = \overline{1, m}). \end{cases} \qquad (3.8)$$

Усі невідомі повинні бути невід'ємними: $x_j \geq 0$.

Будь-яку задачу ЛП завжди можна привести до канонічної форми:

а) пошук мінімуму функції f завжди можна замінити пошуком максимуму функції $Z= - f$, тому що $f_{min}(x^0) = -Z_{max}(x^0)$, де x^0 – оптимальне значення невідомої (див. рис. 3.2);

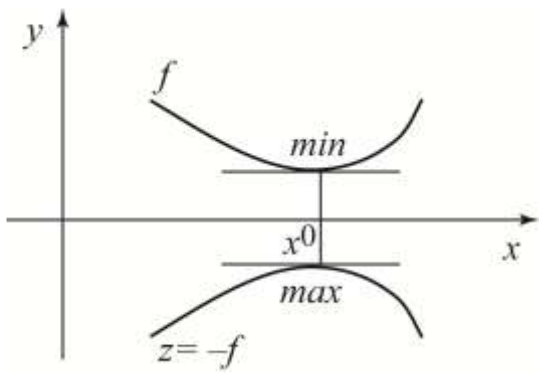

Рис. 3.2 $f_{\min}\left(x^0\right) = -Z_{\max}\left(x^0\right)$

б) обмеження-нерівності типу $\Sigma a_{ij}x_j \leq b_i$ можна замінити на рівності $\Sigma a_{ij}x_j + x_{i+k} = b_i$, а нерівності $\Sigma a_{ij}x_j \geq b_i$ – на $\Sigma a_{ij}x_j - x_{i+k} = b_i$. В обох цих випадках уводяться додаткові невід'ємні балансові невідомі $x_{i+k} \geq 0$, де k – число вихідних невідомих;

в) як правило, всі невідомі – невід'ємні за своїм фізичним (економічним) сенсом. Проте необхідно передбачити наявність декількох невідомих без будь-якого обмеження на знак – такі невідомі часто з'являються у ході постановки задач нелінійного програмування. Невідомі без обмеження на знак (якщо такі є) завжди можна замінити різницею двох невід'ємних невідомих $x_j = x'_j - x''_j$, де $x'_j, x''_j \geq 0$. Цей прийом досить простий, але приводить до збільшення загального числа невідомих у канонічній формі задачі. Інший спосіб: можна виразити невідомі без обмеження на знак через інші невід'ємні невідомі і, таким чином, виключити їх з подальшого аналізу аж до закінчення процесу оптимізації. Розмір задачі при цьому не збільшується, а зменшується.

При однобічних обмеженнях типу $x_j \geq d_j$ уводимо нові невід'ємні невідомі $x'_j = x_j - d_j$. Обмеження типу $x_j \leq g_j$ включаємо в загальне число лінійних обмежень, які перетворюються до виду рівностей шляхом введення додаткових балансових невідомих.

Крім невідомих без обмеження на знак іноді доводиться вводити фіктивні невідомі, які тотожно дорівнюють нулю $x_j \equiv 0$. Як буде показано далі, обмеження-рівності, фіктивні невідомі і невідомі без обмеження на знак тісно пов'язані між собою.

У канонічній формі загальне число обмежень-рівностей m, загальне число (невід'ємних) невідомих n, включаючи балансові.

Приклад. Привести до канонічної форми умови задачі про облік понаднормового часу. Вихідна модель має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5w_1 - 5w_2 \to max\,,$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{8} + \dfrac{x_2}{4} - y_1 = 8, \\ \dfrac{x_1}{6} + \dfrac{x_2}{5} - y_2 = 8, \end{cases}$$

$$y_1 \leq 4,\ y_2 \leq 4,$$

$$y_1 - w_1 \leq 0,\ y_2 - w_2 \leq 0,$$

$$\text{де} \quad x_1,\ x_2,\ w_1,\ w_2 \geq 0,$$

$$y_1,\ y_2 \gtrless 0.$$

Для кожного обмеження-нерівності введемо невід'ємну балансову невідому як різницю між більшою і меншою частинами нерівності:

$$u_1 = 0 - y_1 + w_1; \qquad v_1 = 4 - y_1;$$

$$u_2 = 0 - y_2 + w_2; \qquad v_2 = 4 - y_2.$$

Невідомі y_1, y_2 не мають обмежень на знак, тому за допомогою останніх двох рівностей виражаємо їх через невід'ємні балансові невідомі

$$y_1 = 4 - v_1, \qquad y_2 = 4 - v_2$$

і виключаємо із всіх інших обмежень, а також з функції цілі:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5w_1 - 5w_2 \to max,$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} + v_1 = 12, \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} + v_2 = 12, \\ w_1 - u_1 + v_1 = 4, \\ w_2 - u_2 + v_2 = 4. \end{cases}$$

Усі невідомі тепер – невід'ємні.

До речі, рівності в канонічній формі прийнято записувати так, щоб вільні члени обмежень-рівнянь були невід'ємними.

1.3. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Графічний метод застосовується, в основному, для розв'язання задач двовимірного простору і ґрунтується на геометричній інтерпретації задач лінійного програмування. У разі тривимірного простору задача ускладнюється, а для чотиривимірного графічне розв'язування стає неможливим.

Нехай задача лінійного програмування задана в двовимірному просторі, тобто обмеження містять дві змінні. Знайти максимальне значення функції цілі:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max,$$

за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Кожна нерівність згідно з рівнянням прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ поділяє площину $0X_1X_2$ на дві півплощини і визначає ту півплощину, в якій виконується нерівність. Обмеження за знаком (3.3) також визначають півплощини, обмежені прямими: $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$; таким чином, область визначення даної задачі розміщена в І-й чверті координатної площини. Якщо система обмежень сумісна, півплощини, де виконуються відповідні нерівності, перетинаються і утворюють багатокутник можливих розв'язків ЗЛП, тобто багатокутник планів (рис. 1.3).

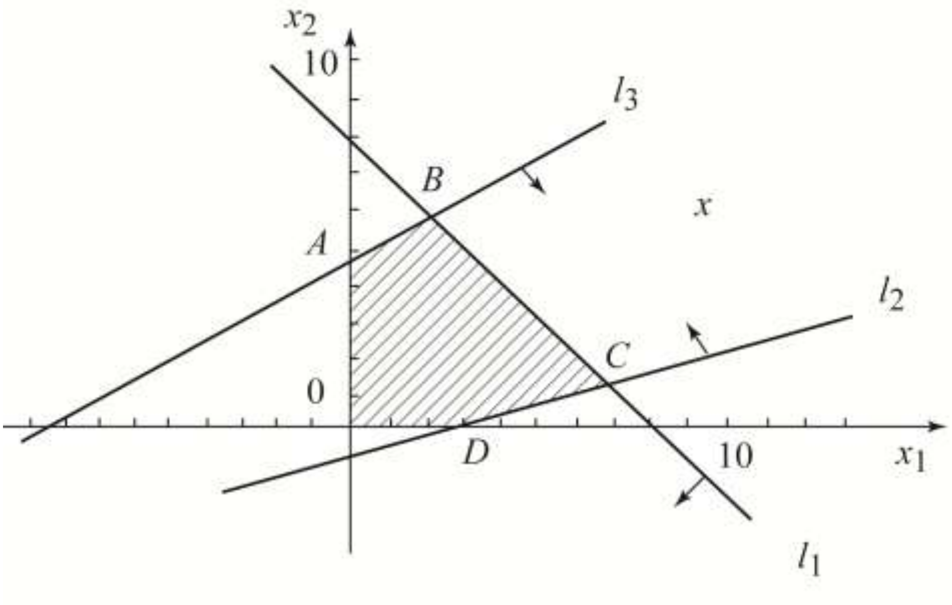

Рис. 1.3. **Багатокутник планів, який відповідає початковій системі**

Розглянемо графічну інтерпретацію цільової функції. Оскільки цільова функція є функцією двох змінних, на площині $0X_1X_2$ зображується лінією рівня, тобто лінією, відповідної сталому значенню цільової функції $Z = const$. Оскільки лінія рівня, яка відповідає нульовому значенню цільової функції, має рівняння: $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, її графіком є пряма, яка проходить через початок координат. Коефіцієнти цільової функції мають значення проекцій нормалі до лінії рівня $\boldsymbol{N} = (c_1; c_2)$. Для лінійної функції градієнт, тобто вектор, який вказує напрямок найшвидшого зростання функції, збігається з вектором нормалі: $grad\ Z = \dfrac{\partial z}{\partial x_1} i + \dfrac{\partial z}{\partial x_2} j = c_1 i + c_2 j = N$. Якщо значення цільової функції зростає, лінія рівня пересувається в напрямку нормалі (рис. 1.4).

Із геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування слідує алгоритм її графічного розв'язання: 1) на основі системи обмежень будують область допустимих розв'язків; 2) будують вектор градієнтного напрямку $N = (c_1; c_2)$; 3) проводять довільну лінію рівня $Z = Z_0$ в напрямку вектора N

так, щоб вона дотикалась області допустимих розв’язків в її крайньому положенні (крайній точці). У випадку розв’язування задачі на мінімум лінію рівня $Z = Z_0$ переміщують в антиградієнтному напряму; 4) визначають оптимальний план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ та екстремальне значення цільової функції $Z^* = Z\left(X^*\right)$.

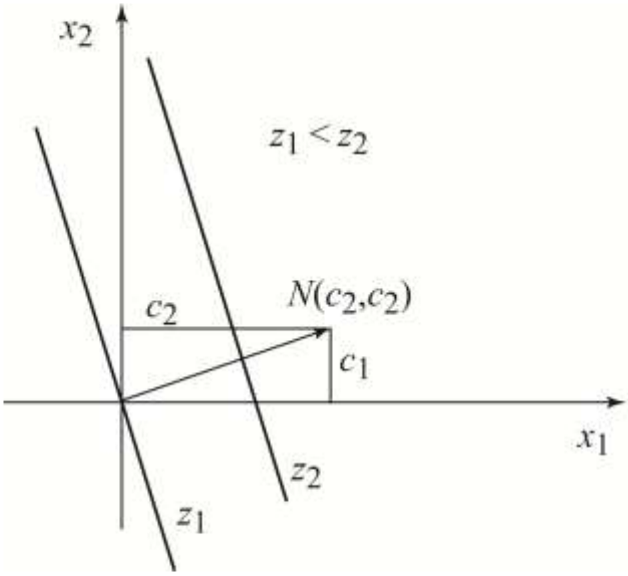

Рис. 1.4. **Побудова лінії рівня**

З графічного розв’язання слідують висновки: 1) система лінійних обмежень визначає опуклу багатокутну область планів; 2) оптимальне рішення ЗЛП досягається в одній з вершин багатокутної області планів. При цьому мають місце такі випадки:

1. Система обмежень може виявитися суперечливою, область планів – порожньою ($D = \varnothing$); у цьому випадку задача розв'язку не має (рис. 1.5).

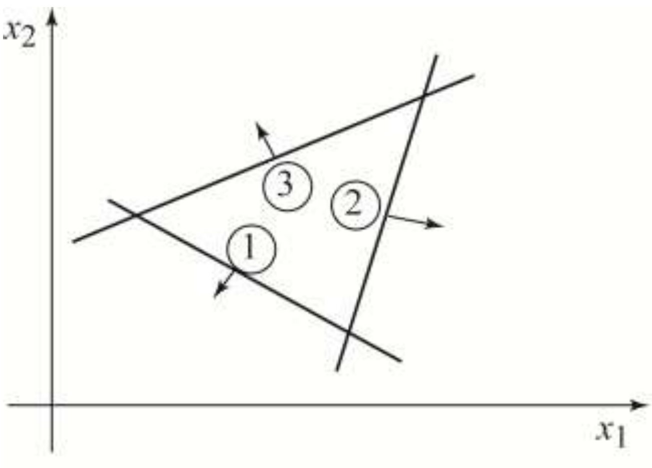

Рис. 1.5. **Немає розв’язків**

2. Область планів може бути відкритою, а максимальне значення функції цілі – необмеженим (рис. 1.6).

3. Як правило, оптимальний розв’язок – єдиний, але бувають випадки, коли є незліченна безліч еквівалентних оптимальних планів. На рис. 1.7 лінія рівня функції цілі (яка перпендикулярна градієнту) проходить відразу через дві вершини A і B багатокутної області планів. Оптимальними планами тут є всі точки відрізку [AB]. Рівняння відрізка можна записати як комбінацію його вершин: $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$, де $0 \leq \lambda \leq 1$.

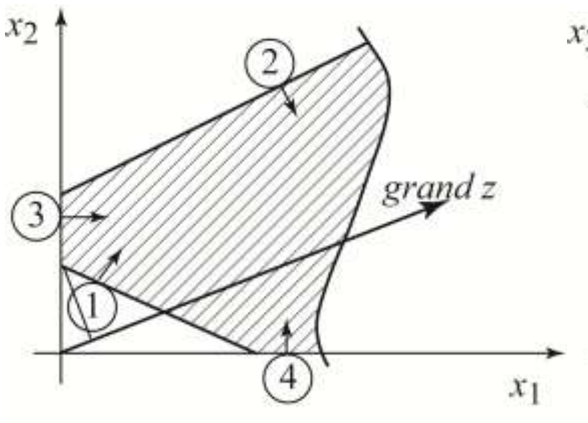

Рис. 1.6. **Необмежена область планів**

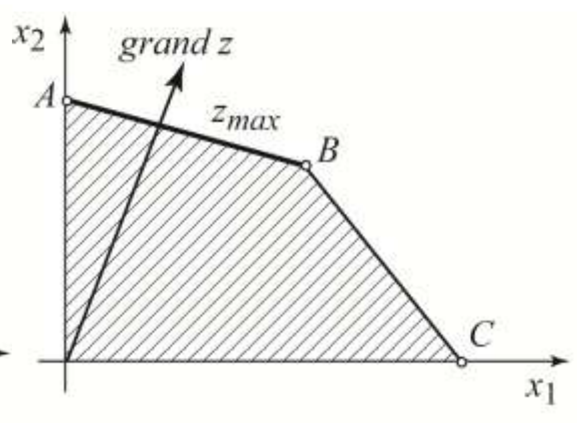

Рис. 1.7. **Неєдиність оптимального розв’язку**

При $\lambda = 0$ маємо першу вершину A; при $\lambda = 1$ маємо другу вершину B; при $\lambda = {}^1/_2$ маємо середину відрізка. Якщо максимальне значення функції цілі досягається відразу в трьох вершинах A, B, C, то загальний оптимальний розв’язок (рівняння грані ABC) можна записати аналогічним чином: $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$, де $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Знання альтернативних оптимальних розв’язків дозволяє вибрати серед них найбільш прийнятний план з урахуванням другорядних особливостей, які не відображені в моделі. Існують специфічні випадки, що зустрічаються значно рідше.

4. Область планів може бути відкритою, але граничні значення функції цілі – обмеженими (рис. 1.8).

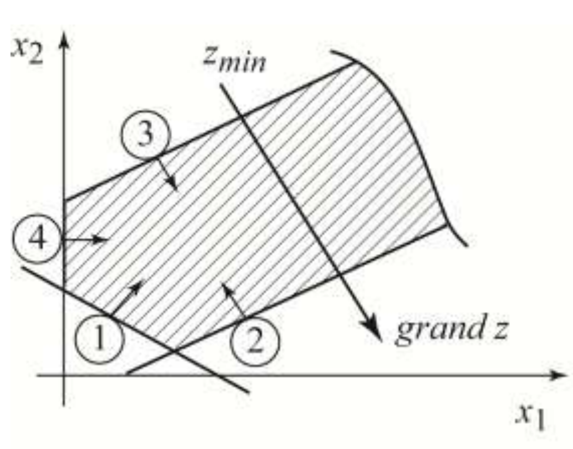

Рис. 1.8. **Область планів відкрита, функція цілі – обмежена**

5. Область планів може вироджитися в єдину точку. Це єдиний розв’язок за відсутністю вибору автоматично буде оптимальним (рис. 1.9).

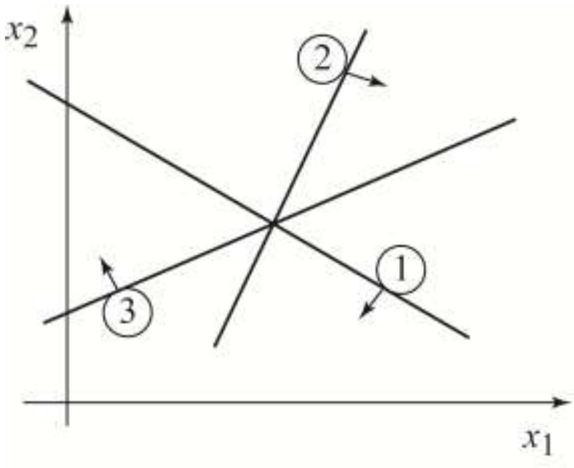

Рис. 1.9. **Єдиний розв’язок**

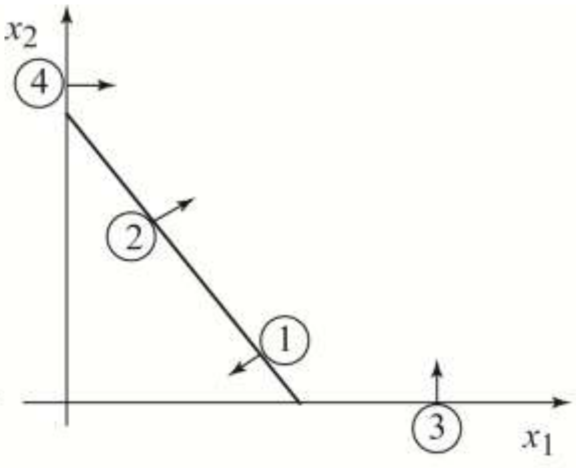

Рис. 1.10. **Область розв’язків – відрізок**

6. Область планів може становити лінію (відрізок). Цей випадок має місце, якщо серед обмежень є обмеження-рівність, що завжди можна замінити системою двох протилежних нерівностей (рис. 1.10).

7. Наведемо ще один, на вид малопомітний, але необхідний особливий випадок – випадок виродження. На рис. 1.11 обмеження ④ – явно надлишкове. Максимальне значення функції цілі тут досягається у вершині B.

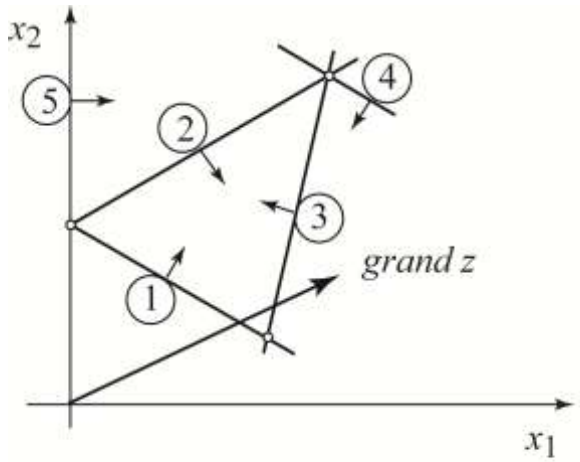

Рис. 1.11. **Виродження плану**

У двовимірному випадку вершина визначається перетинанням двох ліній, але в цій вершині перетинаються відразу три лінії. Тому у вершині B фактично злилися разом три вершини B_1, B_2 і B_3, кожна з яких визначається різними парами ліній. Як говорять, вершина B – кратна. Для графічного методу кратність вершин не має значення, але при аналітичному вирішенні це може привести до деяких утруднень. До речі, мінімальне значення функції цілі в цьому прикладі також виходить у кратній вершині, в утворенні якої беруть участь не тільки лінії ① і ②, але також умова невід'ємності $x_1 \geq 0$.

1.4. Властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування

Розглянемо основну систему обмежень ЗЛП в канонічній формі:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1,m}.$$

Постановка ЗЛП має сенс тільки коли система має безліч розв'язків. У цьому випадку серед безлічі розв'язків необхідно вибрати той, за якого цільова функція досягає екстремуму. Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі, система m рівнянь з n невідомими сумісна і має безліч розв'язків, якщо ранг матриці коефіцієнтів системи $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ дорівнює рангу розширеної матриці $A|B$ і менше кількості невідомих:

$$r_A = r_{A|B} = k$$

$$r_A = r_{A|B} < n$$

Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють матрицю порядку k, і визначник якої не дорівнює нулю, є основними (або базисними). Решта $n - k$ невідомих є вільними. Якщо в загальному рішенні системи, де основні невідомі визначаються через вільні, вільним невідомим присвоїти значення рівне нулю, то такий розв'язок називається базисним. Серед безлічі розв'язків основної системи обмежень кількість базисних розв'язків не перевищує кількості способів, якими можна відібрати m змінних серед n їх загальної кількості, тобто C_n^m – кількість сполучень з n по m. Якщо взяти до уваги обмеження на знак:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m},$$

то серед базисних розв'язків планами ЗЛП будуть тільки ті, для яких всі базисні змінні невід'ємні. Такі плани називаються опорними. Якщо всі k базисних компонентів є додатними, відповідний план називається невиродженим. В іншому випадку (тобто, коли кількість додатних компонентів опорного плану менше ніж k) план є виродженим.

Теорема. Безліч планів задачі лінійного програмування є опуклим.

Теорема. Опорний розв'язок задачі лінійного програмування відповідає допустимій екстремальній точці простору розв'язків.

Іншими словами, кожному опорному плану задачі лінійного програмування відповідає вершина (кутова точка) багатокутника планів і, навпаки, кожній вершині багатокутника планів відповідає опорний план.

2. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування і деякі його теоретичні аспекти

2.1. Пошук оптимального плану. Умова оптимальності.

2.2. Алгоритм симплексного методу.

2.3. Проблема виродження.

2.1. Пошук оптимального плану. Умова оптимальності

Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічній формі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Щоб задача мала розв’язок, система її обмежень повинна бути сумісною. Це можливо, якщо ранг r системи не більше числа невідомих n: $r \leq n$. Випадок $r > n$ неможливий. При $r = n$ система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш ніж в одній крайній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, яка є їх опуклою лінійної комбінації. Для розв’язання задачі лінійного програмування (ЗЛП) необхідно знайти всі крайні точки багатогранника планів і порівняти в них значення цільової функції. Отже, для відшукання оптимального плану необхідно дослідити всі опорні плани, максимальна кількість яких дорівнює C_n^m. Перебирати всі опорні плани не доцільно, а слід скористатись упорядкованим переходом від одного опорного плану до іншого. Таку можливість надає симплексний метод, який дозволяє від відомого опорного плану за скінчене число ітерацій отримати оптимальний план. Загальна ідея симплекс-методу (методу послідовного покращення плану) полягає у 1) знаходженні початкового опорного плану; 2) наявності ознаки оптимальності опорного плану; 3) вміння переходити до не гіршого опорного плану.

Розглянемо теоретичні основи симплекс-методу. За допомогою методу Жордана–Гаусса виразимо перші невідомі у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{m\,n}x_n = b_1. \end{cases}$$

Дану систему можна записати у векторній формі:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \ldots + x_nA_n = A_0,$$

де $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1\,m+1} \\ a_{2\,m+1} \\ \ldots \\ a_{m\,m+1} \end{pmatrix},\ A_{m+2} = \begin{pmatrix} a_{1\,m+2} \\ a_{2\,m+2} \\ \ldots \\ a_{m\,m+2} \end{pmatrix},\ \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1\,n} \\ a_{2\,n} \\ \ldots \\ a_{m\,n} \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Базис складають m векторів $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Маємо m базисних невідомих: x_1, x_2, …, x_m і їх потрібно виразити через вільні невідомі x_{m+1}, x_{m+2}, …, x_n:

$$x_i = b_i - \sum_{k=1}^{n-m} a_{ik}x_{m+k}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Отримаємо висхідний опорний план:

$$X_0 = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m} \right),$$

або $$X_0 = \left(x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m, \underbrace{x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \ldots, x_n = 0}_{n-m} \right).$$

Значення функції для висхідного опорного плану:

$$Z_0 = Z(X_0) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m .$$

Виразимо:

$$\begin{cases} A_{m+1} = a_{1\,m+1}A_1 + a_{2\,m+1}A_2 + \ldots + a_{m\,m+1}A_m, \\ A_{m+2} = a_{1\,m+2}A_1 + a_{2\,m+2}A_2 + \ldots + a_{m\,m+2}A_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = a_{1\,n}A_1 + a_{2\,n}A_2 + \ldots + a_{m\,n}A_m, \end{cases}$$

де $A_1, A_2, ..., A_m$ – лінійно незалежні вектори. Для даного плану відповідає розклад:

$$A_0 = x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m .$$

Для зменшення значення цільової функції треба побудувати інший опорний план, тобто перейти до нового базису.

Кожний з n векторів співвідношення (4.2) розкладається за векторами базису єдиним чином:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i .$$

Введемо в базис вектор A_{m+1}, який має хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i\,m+1}$ в розкладанні

$$A_{m+1} = x_{1\,m+1}A_1 + x_{2\,m+1}A_2 + ... + x_{m\,m+1}A_m .$$

Помножимо даний вираз на $\theta > 0$ та віднімемо від (4.4), отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1\,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2\,m+1})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{m\,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0 .$$

Вектор $X_1 = (x_1 - \theta x_{1\,m+1};\, x_2 - \theta x_{2\,m+1};\, ...;\, x_m - \theta x_{m\,m+1};\, \theta;\, 0;\, ...;\, 0)$ є планом, якщо його компоненти невід'ємні. Оскільки $\theta > 0$, то всі компоненти вектора X_1, в які входять недодатні $x_{i\,m+1}$, невід'ємні. Тому будемо розглядати тільки компоненти, до яких входять додатні $x_{i\,m+1}$. Іншими словами слід визначити таке $\theta > 0$, при якому для всіх $x_{i\,m+1} > 0$:

$$x_i - \theta x_{i\,m+1} \geq 0 .$$

Звідки маємо $\dfrac{x_i}{x_{i\,m+1}} \ge \theta$. Вектор X_1 є планом задачі для будь-якого θ, що задовольняє умові $\min \dfrac{x_i}{x_{i\,m+1}} \ge \theta > 0$ при $x_{i\,m+1} > 0$.

Вираз можна розглядати як розкладання вектора A_0 за новим базисом. Один з коефіцієнтів розкладання повинен дорівнювати нулю. Нехай $\theta = \theta_0 = \min\limits_i \dfrac{x_i}{x_{i\,m+1}} \ge \theta > 0$, тоді відповідна компонента, в якій досягається мінімум, дорівнює нулю. Якщо ця компонента є першою, тобто:

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i\,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1\,m+1}},$$

то підставивши величину θ отримаємо:

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1\,m+1}} x_{1\,m+1}\right)A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1\,m+1}} x_{2\,m+1}\right)A_2 + \ldots + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1\,m+1}} x_{m\,m+1}\right)A_m +$$

$$+ \frac{x_1}{x_{1\,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

і відповідно розкладання

$$A_0 = x_2' A_2 + x_3' A_3 + \ldots + x_m' A_m + x_{m+1}' A_{m+1},$$

якому відповідає новий опорний план:

$$X_1 = \left(0;\, x_2';\, x_3';\ldots;\, x_m';\, x_{m+1}';\, 0;\ldots;\, 0\right),$$

де $x_i' = x_i - \theta_0 x_{i\,m+1}$, $x_{i\,m+1}' = \theta_0$, а система векторів $A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$ утворює новий базис. Число θ називають симплексним відношенням.

Отже, перехід до нового опорного плану здійснюється через виключення одного вектора і включення до базису іншого. Критерій, що використовується для визначення вектора, який має включатись до базису є одним із основних складових симплексного методу. Якщо вектор A_{m+1} має бути включеним до базису, а в його розкладі всі $x_{i\,m+1} \le 0$ і не має змоги вибрати таке $\theta > 0$, що виключало б один з векторів розкладу і план X_1 містить $m+1$ додатних компонент, то говорять, що система векторів $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$ лінійно залежна і визначає внутрішню точку багатогранника розв’язків. У цьому випадку лінійна функція не може досягати мінімального значення і гіперплощина, що відповідає лінійній функції, не може стати опорною до багатогранника розв’язків і лінійна функція не обмежена на багатограннику розв’язків.

Умова оптимальності

Нехай задача лінійного програмування має плани і кожний її опорний план не вироджений. Для висхідного опорного плану X_0 маємо:

$$A_0 = x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m,$$

значення лінійної функції цілі дорівнює:

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + ... + x_m C_m = Z(X_0).$$

Розклад будь-якого вектора A_j за векторами даного базису $A_1, A_2, ..., A_m$, єдиний:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + ... + x_{mj} A_m = A_j, \ \left(j = \overline{1,m}\right),$$

тому розкладу вектора A_j в базисі відповідає і єдине значення лінійної функції:

$$x_{1j} C_1 + x_{2j} C_2 + ... + x_{mj} C_m = Z_j, \ \left(j = \overline{1,m}\right).$$

Нехай C_j − коефіцієнт лінійної функції, який відповідає вектору A_j.

Теорема. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $Z_j - C_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним, і можна побудувати такий план X , для якого виконується нерівність $Z(X) < Z(X_0)$.

Наслідок. Якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j в даному базисі задовольняє умові $Z_j - C_j \le 0$, то план X_0 є оптимальним.

Нерівність $Z_j - C_j \le 0$ є ***умовою оптимальності оптимізаційної задачі***, в якій цільова функція відшукується на мінімум. Величину $Z_j - C_j$ називають ***оцінками плану***.

Для задачі лінійного програмування:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + ... + a_{1n} x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1} x_{m+1} + ... + a_{2n} x_n = b_2, \\ .... \\ x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + ... + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Справедлива така теорема:

Теорема. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $Z_j - C_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним, і можна побудувати такий план X, для якого виконується нерівність $Z(X) > Z(X_0)$.

Наслідок. Якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j в даному базисі задовольняє умові $Z_j - C_j \ge 0$, то план X_0 є оптимальним.

4.2. Алгоритм симплексного методу

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + ... + a_{1n} x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1} x_{m+1} + ... + a_{2n} x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + ... + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Нехай задача має опорний план:

$$X_0 = \left(x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, \underbrace{x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, ..., x_n = 0}_{n-m} \right),$$

який визначається системою m-вимірних одиничних векторів $A_1, A_2, ..., A_m$. Для визначення оптимальності даного опорного плану необхідно вектори A_j системи розкласти за векторами базису $A_1, A_2, ..., A_m$ та обчислити $Z_j - C_j$. Оскільки базис утворюють одиничні вектори, тому коефіцієнтами розкладу вектора A_j за базисом є його компонентами $x_{ij} = a_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$. Подальші обчислення доцільно проводити в симплексній таблиці (табл. 2.1), де коефіцієнти цільової функції, які відповідають базисним змінним, записують в колонці $C_б$, висхідний опорний план X_0, проміжні опорні плани та оптимальний план знаходимо в колонці A_0, коефіцієнти розкладу вектора A_j за базисом записуємо в колонці A_j.

Таблиця 2.1

i	Ба-зис	$C_б$	C	c_1	c_2	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
			A_0	A_1	A_2	$\cdots$	A_l	$\cdots$	A_m	A_{m+1}	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_k	$\cdots$	A_n
1	A_1	c_1	x_1	1	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	x_{1m+1}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1n}
2	A_2	c_2	x_2	0	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	x_{2m+1}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	
l	A_l	c_l	x_l	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$x_{l\,m+1}$	$\cdots$	$x_{l\,j}$	$\cdots$	$x_{l\,k}$	$\cdots$	$x_{l\,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	
m	A_m	c_m	x_m	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$x_{m\,m+1}$	$\cdots$	$x_{m\,j}$	$\cdots$	$x_{m\,k}$	$\cdots$	$x_{m\,n}$
$m+1$	$\Delta_j = Z_j -$ $-C_j$		Z_0	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$Z_{m+1} - C_{m+1}$		$Z_j - C_j$		$Z_k - C_k$	$\cdots$	$Z_n - C_n$

В $(m+1)$ рядку в колонці A_0 записуємо значення лінійної функції $Z(X_0)$, а в колонках A_j записуємо значення оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$. Значення $Z(X_0)$ знаходимо як $Z(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$, $Z_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$. Аналізуючи значення $\Delta_j = Z_j - C_j$ маємо: якщо $Z_j - C_j \le 0$, то опорний план X_0 оптимальний і мінімальне значення лінійної функції цілі дорівнює $Z(X_0)$. В противному випадку, тобто якщо $Z_j - C_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним, можна знайти менше значення лінійної функції. Якщо додатних оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$ декілька, то в базис має бути включений вектор, якому відповідає $\max(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$, за умови $Z_j - C_j > 0$ і θ_{0j} обчислюється для кожного j. Якщо значень $\max(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$ декілька, то до базису включається той вектор, у якого $\min C_j$.

Якщо хоча б для однієї $Z_j - C_j > 0$ коефіцієнти розкладу x_{ij} відповідного вектора недодатні, то лінійна функція не обмежена в багатограннику розв'язків або багатогранник розв'язків в даному випадку є необмеженою багатогранною областю.

Нехай $\max\left(\theta_{0j}\left(Z_j - C_j\right)\right) = \theta_{0k}\left(Z_k - C_k\right)$, де $m < k \le n$. Тоді в базис включається вектор A_k і виключається вектор, якому відповідає $\theta_{0k} = \min\left\{\dfrac{x_i}{x_{ik}}\right\}\ (x_{ik} > 0)$.

Нехай $\theta_{0k} = \min\left\{\dfrac{x_i}{x_{ik}}\right\} = \dfrac{x_l}{x_{lk}}$, отже вектор A_l виключається з базису.

Елемент x_{lk} називають ***направляючим***, а відповідний рядок і стовпець ***направляючими***. Тепер новий базис утворюють вектори $A_1, ..., A_{l-1}, A_k, A_{l+1} ..., A_m$. Новий опорний план $X_0 = \left(x_1', x_2', ..., x_k', x_m'\right)$ обчислюється за формулами:

$$x_i' = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \ne l),$$

$$x_k' = \frac{x_l}{x_{lk}} \quad (i = l).$$

Розкладання векторів у новому базисі визначається за формулами:

$$x_{ij}' = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \ne l),$$

$$x_{lj}' = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (i = l).$$

Таблиця 2.2

i	Базис	$C_б$	C	c_1	c_2	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
			A_0	A_1	A_2	$\cdots$	A_l	$\cdots$	A_m	A_{m+1}	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_k	$\cdots$	A_n
1	A_1	c_1	x_1'	1	0	$\cdots$	x_{1l}'	$\cdots$	0	x_{1m+1}'	$\cdots$	x_{1j}'	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{1n}'
2	A_2	c_2	x_2'	0	1	$\cdots$	x_{2l}'	$\cdots$	0	x_{2m+1}'	$\cdots$	x_{2j}'	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{2n}'
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
l	A_k	c_l	x_k'	0	0	$\cdots$	x_{kl}'	$\cdots$	0	$x_{k\,m+1}'$	$\cdots$	$x_{k\,j}'$	$\cdots$	1	$\cdots$	$x_{k\,n}'$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
m	A_m	c_m	x_m'	0	0	$\cdots$	$x_{m\,l}'$	$\cdots$	1	$x_{m\,m+1}'$	$\cdots$	$x_{m\,j}'$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x_{m\,n}'$
$m+1$	$\Delta_j = Z_j - C_j$		Z_0'	0	0	$\cdots$	$Z_l' - C_l$		0	$Z_{m+1}' - C_{m+1}$		$Z_j' - C_j$		0	$\cdots$	$Z_n' - C_n$

Дані формули є формулами повного виключення Жордана−Гаусса. Всі обчислення за наведеними формулами доцільно проводити в симплексній таблиці (табл. 4.2).

Якщо в табл. 4.2 в $(m+1)$ рядку всі оцінки $Z_j - C_j \le 0$, то отриманий план X_0 є оптимальним. У випадку наявності додатних оцінок відшукуємо наступний опорний план. Процес продовжується до отримання оптимального плану або встановлення необмеженості лінійної функції.

Якщо оцінками оптимального плану є тільки нульові оцінки, що відповідають базисним векторам, то це підтверджує єдиність оптимального плану. Якщо нульова оцінка відповідає вектору, що не входить до базису, то оптимальний план не єдиний. У даному випадку задача лінійного програмування має нескінченну множину оптимальних планів.

Для задачі лінійного програмування, в якої відшукується максимальне значення в разі невиконання умов оптимальності $Z_j - C_j \ge 0$ в базис включається вектор, якому відповідає $\min\left(\theta_{0j}\left(Z_j - C_j\right)\right)$, за умови $Z_j - C_j < 0$. Якщо мінімальних оцінок декілька, то в базис включається той вектор, якому відповідає $\max C_j$. Решта всіх дій і обчислень аналогічно задачі лінійному програмуванню, в якій мінімізується цільова функція.

Приклад. На підприємстві можна організувати виробництво продукції двома способами, при цьому необхідно мати три види ресурсів: сировину, обладнання і електроенергію. Витрати ресурсів за один місяць і наявний загальний їх обсяг представлено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Норми витрат ресурсів

Ресурси	Витрати ресурсів за 1 місяць при організації виробництва		Запаси ресурсів
	1-м способом	2-м способом	
Сировина	1	2	4
Обладнання	1	1	3
Електроенергія	2	1	8

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тисячі виробів, при другому – 4 тисячі виробів. Скільки місяців має пропрацювати підприємство кожним із способів, щоб за наявності ресурсів забезпечити максимальний випуск продукції?

Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1 – період роботи підприємства при організації виробництва продукції першим способом, x_2 – період роботи підприємства при організації виробництва продукції другим способом. Математична модель має вигляд:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

за обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного вигляду:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу симплексним методом у симплексній таблиці (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

i	Базис	$C_б$	C	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	4	1	2	1	0	0
2	A_4	0	3	1	1	0	1	0
3	A_5	0	8	2	1	0	0	1
4		Δ	0	-3	-4	0	0	0

Маємо початковий опорний план: $X_0 = (0, 0, 4, 3, 8)$. Значення цільової функції дорівнює $Z(X_0) = 0$. Опорний план не оптимальний, оскільки в індексному рядку є дві оцінки: Δ_1 та Δ_2 від'ємні. Оскільки

$min(\theta_{0j}(Z_j - C_j)) = (-3)\cdot\frac{3}{1} = -9$, то $x_{21} = 1$ є направляючим, і, отже, вектор A_4 слід вивести з базису, а вектор A_1 ввести в базис. Перетворення зробимо в симплексній таблиці за методом Жордана–Гаусса (табл. 2.5)

Таблиця 2.5

i	Базис	$C_б$	C	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	1	0	1	1	-1	0
2	A_1	3	3	1	1	0	1	0
3	A_5	0	2	0	-1	0	-2	1
4		Δ	9	0	-1	0	3	0

Маємо новий опорний план: $X_0 = (3, 0, 1, 0, 2)$. Значення цільової функції дорівнює $Z(X_0) = 9$. Опорний план не є оптимальний, оскільки в індексному рядку є оцінка Δ_2 від'ємна. Згідно з $\theta_{02} = min\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 1$, то $x_{12} = 1$ є направляючим, і, отже, вектор A_3 слідує вивести з базису, а вектор A_2 ввести в базис. Перетворення зробимо в симплексній таблиці за методом Жордана-Гаусса (табл. 2.6)

Таблиця 2.6

i	Базис	$C_б$	C	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_2	4	1	0	1	1	-1	0
2	A_1	3	2	1	0	-1	2	0
3	A_5	0	3	0	0	1	-3	1
4		Δ	10	0	0	1	2	0

Маємо опорний план: $X_0 = (3, 1, 0, 0, 3)$. Він є оптимальний, оскільки в індексному рядку всі оцінки Δ_0 невід'ємні. Максимальне значення цільової функції дорівнює $Z_{max}(X_0)=10$. Отже, для забезпечення максимального випуску продукції у розмірі 10 тисяч одиниць підприємство має випускати продукцію першим способом два місяці, а другим способом – один місяць.

2.4. Проблема виродження

У процесі використання симплексного методу монотонне зростання цільової функції у ході дослідження на максимум (або монотонне зменшення у ході дослідження на мінімум) має місце за умови, що на кожній ітерації маємо невироджений опорний план. Мають місце задачі, коли основна система обмежень в правій частині містить один або кілька нулів. Така ситуація може виникнути під час розв'язання задачі. Так, в рядку 5 симплексної таблиці прикладу пункту 2.3 міститься рівняння вільний член якого дорівнює нулю, отже опорний план вироджений $X_0=(0,2,0,0,0,0,4)$, оскільки він містить одну базисну невідому, значення якої дорівнює нулю. При цьому, якби довелось вводити в базис A_6, то найменше значення в симплексному відношенні було б нуль.

Розглянемо, як зміниться цільова функція, якщо при черговому перетворенні за методом Жордана−Гаусса елемент розв'язування міститься в рядку з нульовою правою частиною. Відомо, що при кожній ітерації цільова функція змінюється на величину $\Delta Z=|\theta\cdot\Delta|$. Оскільки в цьому випадку $\theta=0$, то введення в базис вектора, якому відповідає нульове симплексне відношення, не призводить до зміни цільової функції, отже, таке перетворення не має сенсу. Як правило, після декількох перетворень з використанням нульового симплексного відношення можна отримати план, який був раніше, тобто має місце зациклення.

На практиці такі випадки зустрічаються дуже рідко, і мають, як правило, штучний характер, але теоретично такий випадок можливий.

3. Теорія двоїстості. Взаємно двоїсті задачі лінійного програмування

3.1. Правила складання умов взаємно двоїстих задач.

3.2. Теореми двоїстості.

3.1. Правила складання умов взаємно двоїстих задач

У різних розділах математики часто зустрічаються так звані *теореми двоїстості*. Кожна з них дозволяє для будь-якого твердження даної теорії побудувати – за певними стандартними правилами – інше твердження таким чином, що із справедливості першого автоматично випливає справедливість другого. Стосовно лінійного програмування це виражається в тому, що, розв'язуючи одну оптимізаційну задачу, одержуємо розв'язок ще однієї оптимізаційної задачі, *двоїстої до вихідної*.

Можна вказати на ряд практичних використань теорії двоїстості. У ході розв'язування задачі ЛП симплекс-методом розв'язок парної задачі виходить автоматично без додаткових зусиль з нашого боку, тому з двох зв'язаних між собою задач розв'язувати слід ту, яка простіше. Розглядаючи за кроками процес розв'язування вихідної задачі стандартним симплекс-методом і спостерігаючи за пов'язаним з ним процесом автоматичного розв'язування двоїстої задачі, був відкритий алгоритм так званого двоїстого *симплекс-методу*. Новий метод істотно розширив обчислювальні можливості і виявився дуже корисним під часрозв'язання цілочисельних задач ЛП і задач ЛП з параметрами. Цікаво, що, записавши умови парних задач разом, виявилося можливим звести задачу оптимізації до звичайного розв'язування системи алгебраїчних рівнянь (з подвійним числом невідомих, з яких половина невідомих повинна дорівнювати нулю). Такий прийом використовується у процесі розв'язання транспортної задачі ЛП і є основою для розв'язання задач квадратичного програмування. Розв'язання двоїстої задачі корисне само по собі – воно дає можливість провести аналіз стійкості розв'язку вихідної задачі щодо малих змін в її умовах. Так, у задачі оптимального використання обмежених ресурсів можливо перевірити чутливість знайденого оптимального плану до малих варіацій у запасах ресурсів. Економічна інтерпретація двоїстих оцінок дозволяє визначити корисність кожного ресурсу і вказати найбільш прийнятний шлях зміни їх запасів для досягнення максимального прибутку.

Перша задача. Підприємство має m видів ресурсів у кількостях b_i ($i=\overline{1,m}$) з яких виготовляється n видів продукції. Відома матриця технологічних коефіцієнтів $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, а також відома вартість одиниці кожної продукції c_j ($j=\overline{1,n}$). Необхідно скласти оптимальний план виробництва, щоб загальний прибуток був максимальним. Тобто висхідна задача формулюється так: скільки і якої продукції $x_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ необхідно виробити, щоб при заданих вартостях c_j одиниці продукції і обсягах наявних ресурсів b_i максимізувати випуск продукції у вартісному виражені. Тобто знайти вектор $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, який задовольняє обмеженням:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...a_{2n}x_n\le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...a_{mn}x_n\le b_m, \end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n},$$

і доставляє максимальне значення функції:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\to\max.$$

Це є висхідна задача.

Друга задача. За одиницю вартості ресурсів приймають одиницю вартості випущеної продукції. Позначимо через $y_i\ \left(i=\overline{1,m}\right)$ вартість одиниці i-го ресурсу. Тоді вартість всіх потрачених ресурсів, використаних для виготовлення одиниці j-го виду продукції, дорівнює $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i$, що не може бути менше вартості кінцевої продукції, тому $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j$. Вартість всіх наявних ресурсів буде дорівнювати $\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$.

Отже, двоїста задача формулюється так. Яка повинна бути ціна одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i і величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат.

Знайти вектор $Y=\left(y_1,y_2,...,y_m\right)$, який задовольняє обмеженням:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{m2}x_n \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

і доставляє мінімальне значення функції:

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min.$$

Це є двоїста задача.

Змінні y_i називаються оцінками або обліковими, неявними цінами.

Обидві задачі утворюють пару сполучених двоїстих задач.

Правила складання умов взаємно двоїстих задач:

1. Основним невідомим однієї задачі відповідають балансові невідомі іншої задачі і навпаки:

Задача 1	Основні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$	Балансові змінні $u_1, u_2, ..., u_m$
Задача 2	$v_1, v_2, ..., v_n$ Балансові змінні	$y_1, y_2, ..., y_m$ Основні змінні

Число основних невідомих однієї задачі дорівнює числу обмежень іншої задачі. Між невідомими взаємно двоїстих задач існують зв'язки: $x_j \leftrightarrow v_j$, $y_i \leftrightarrow u_i$.

2. Невід'ємним невідомим однієї задачі відповідають невід'ємні невідомі іншої задачі.

3. Фіктивним невідомим (тотожно рівним нулю) однієї задачі відповідають в іншій задачі невідомі без обмеження на знак і навпаки.

4. Якщо умови однієї задачі приведені до 1-ї стандартної форми, то умови іншої задачі будуть представлені в 2-й стандартній формі і навпаки.

5. Вільні члени в обмеженнях однієї задачі є коефіцієнтами цільової функції іншої задачі і навпаки.

6. Матриці коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях обох задач – взаємно транспоновані.

Види математичних моделей двоїстих задач

I. Симетричні задачі

Висхідна задача	Двоїста задача
I.1. $Z = CX \to \min$	$F = YA_0^T \to \max$
$AX \ge A_0$,	$YA \le C^T$,
$X \ge 0$,	$Y \ge 0$.

Висхідна задача	Двоїста задача
I.2. $Z = CX \to \max$	$F = YA_0^T \to \min$
$AX \le A_0$,	$YA \ge C^T$,
$X \ge 0$,	$Y \ge 0$.

II. Несиметричні задачі

Висхідна задача	Двоїста задача
II.1. $Z = CX \to \min$	$F = YA_0^T \to \max$
$AX = A_0$,	$YA \le C^T$.
$X \ge 0$,	

Висхідна задача	Двоїста задача
II.2. $Z = CX \to \max$	$F = YA_0^T \to \min$
$AX = A_0$,	$YA \ge C^T$.
$X \ge 0$,	

3.2. Теореми двоїстості

Властивості розв’язків взаємно двоїстих задач зазвичай групуються у два блоки, які іменуються 1-ю і 2-ю теоремами двоїстості.

У теорему 1 увійшли наступні твердження:

***Теорема* 1.1.** Якщо одна задача має оптимальний розв’язок, то інша задача також має оптимальний розв’язок, причому $Z_{\max}\left(X^*\right) = F_{\min}\left(Y^*\right)$ або $Z_{\min}\left(X^*\right) = F_{\max}\left(Y^*\right)$.

***Теорема* 1.2.** Для довільних розв’язків двох задач $Z_1 \le F_2$.

***Теорема* 1.3.** Якщо в одній задачі функція цілі необмежена, то інша задача розв’язків не має.

Теорема **1.4.** Якщо одна задача не має розв'язків, то в іншій задачі функція цілі необмежена, або ж інша задача також не має розв'язків.

Теорема **2**. Для оптимальності двох планів пари спряжених задач необхідно і достатньо, щоб ці плани задовольняли умову:

$$y_i^* \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) = 0, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j^* \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

де X^* та Y^* – оптимальні плани відповідно висхідної та двоїстої задач.

Теорема. Якщо при підстановці компонент оптимального плану в систему обмежень висхідної задачі i-те обмеження перетворюється в нерівність, то i-та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Приклад. Побудувати і розв'язати двоїсту задачу для висхідної задачі:

$$Z = x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Необхідно розглянути розв'язки задач з використанням теорем двоїстості.

Висхідна задача:

$$Z = x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$F = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1, \\ y_i \ge 0, \ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'яжемо вихідну задачу симплексним методом (табл. 5.2), і перетворимо нерівності в рівності:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_i \ge 0, \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Таблиця 3.2

Базис	$C_б$	C / A_0	1 / A_1	-1 / A_2	0 / A_3	0 / A_4	0 / A_5
A_3	0	2	-2	1	1	0	0
A_4	0	2	**1**	-2	0	1	0
A_5	0	5	1	1	0	0	1
Цільова функція		0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-1	1	0	0	0
A_3	0	6	0	-3	1	2	0
A_1	1	2	1	-2	0	1	0
A_5	0	3	0	**3**	0	-1	1
Цільова функція		2	1	-2	0	1	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$		2	0	-1	0	1	0
A_3	0	9	0	0	1	1	1
A_1	1	4	**1**	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
A_2	-1	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Цільова функція		3	1	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

З табл. 3.2 випливає, що $X^* = (4, 1)$, $\quad Z(X^*) = 3$.

На підставі 1-й теореми двоїстості маємо: $Z(X^*) = F(Y^*) = 3$.

Оскільки $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, то за 2-ю теоремою двоїстості систему обмежень двоїстої задачі запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1; \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Підставивши $X^* = (4,1)$ у систему обмежень висхідної задачі:

$$\begin{cases} -2\cdot 4+1 \le 2; \\ 4-2\cdot 1 \le 2; \\ 4+1 \le 5; \end{cases} \quad \begin{cases} -7<2; & \Rightarrow y_1 = 0; \\ 2=2; & \Rightarrow y_2 > 0; \\ 5=5; & \Rightarrow y_3 > 0. \end{cases}$$

Тоді система обмежень двоїстої задачі прийме вигляд:

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1; \\ -2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Звідки $Y^* = \left(0, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right), \quad F(Y^*) = 3.$

Нехай відомо розв'язок двоїстої задачі $Y^* = \left(0, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right), \quad F(Y^*) = 3$, знайдемо розв'язок висхідної задачі. За 1-ю теоремою двоїстості $F(Y^*) = Z(X^*) = 3$. Оскільки $y_2 > 0, y_3 > 0$, то за 2-ю теоремою двоїстості друга і третя нерівності висхідної задачі перетворюються в рівності:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2; \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Звідки, $X^* = (4,1), \quad Z(X^*) = 3$.

Розглянемо розв'язок задач методом, заснованим на взаємно однозначній відповідності між змінними: основним змінним висхідної задачі відповідають балансові змінні двоїстої, і навпаки.

Нехай двоїста задача розв'язана симплексним методом (табл. 3.3):

$$F = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \quad \rightarrow \quad \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 1; \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1; \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Таблиця 3.3

Базис	$C_б$	C / A_0	2 / A_1	2 / A_2	5 / A_3	0 / A_4	0 / A_5
	0	1	-2	1	**1**	-1	0
A_5	0	1	-1	2	-1	0	1

Цільова функція		0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$							0
A_3	5	1	-2	1	1	-1	0
A_5	0	2	-3	**3**	0	-1	1
Цільова функція		5	-12	5	5	-5	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-8	3	0	-5	0
A_3	5	$\frac{1}{3}$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
A_2	2	$\frac{2}{3}$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Цільова функція		3	-7	2	5	-4	-1
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-9	0	0	-4	-1

Розв'язок іншої задачі знайдемо за відповідністю між змінними:

Задача 1	Основні змінні $x_1 \quad x_2 \quad x_3$	Балансові змінні $x_4 \quad x_5$
Задача 2	$y_4 \quad y_5 \quad y_1$ Балансові змінні	$y_2 \quad y_3$ Основні змінні

Значення x_j визначаємо за симплексною таблицею (табл. 3.3) у рядку Δ_i у відповідному стовпці, причому значення x_j слід брати за модулем:

$$x_1 \to y_4, \quad x_1 = |\Delta_4| = 4,$$
$$x_2 \to y_5, \quad x_2 = |\Delta_5| = 1.$$

Таким чином, розв'язок висхідної задачі: $X^* = (4,1), \quad Z(X^*) = 3$.

Якщо висхідна задача розв’язана симплексним методом, то розв'язок двоїстої задачі може бути знайдений за формулою: $Y^* = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$, де $\boldsymbol{C}$ – матриця-рядок коефіцієнтів при базисних змінних цільової функції в оптимальному розв’язанні висхідної задачі; $\boldsymbol{A}^{-1}$ – обернена матриця для матриці $\boldsymbol{A}$, що є матрицею коефіцієнтів базисних змінних системи обмежень висхідної задачі в оптимальному розв'язку. З табл. 5.3 маємо:

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$Y^{*}=C\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язок двоїстої задачі: $Y^{*}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\quad F\left(Y^{*}\right)=3$.

4. Транспортна задача. Методи розв'язання транспортної задачі

4.1. Загальна постановка транспортної задачі.

4.2. Способи складання першого базисного плану.

Критерій оптимальності. Метод потенціалів.

4.3. Виродження плану транспортної задачі.

4.1. Загальна постановка транспортної задачі

Маємо m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ і n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$. Відомі запаси a_i продукції у кожного постачальника A_i, потреби b_j кожного споживача B_j і тарифи c_{ij} (вартість перевезення одиниці товару від пункту A_i в пункт B_j). Потрібно скласти оптимальний план перевезення, тобто визначити, яка кількість вантажу x_{ij} має бути відправлена з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення, щоб загальна вартість всіх перевезень була найменшою.

Дано: тарифи, запаси і потреби

Поста-чальники	Споживачі				Запа-си
	B_1	B_2		B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
…	…	…		…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2		b_n	

Знайти: оптимальний план перевезення вантажів

Поста-чальники	Споживачі				Запа-си
	B_1	B_2		B_n	
A_1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	a_2
…	…	…		…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2		b_n	

Якщо з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення заплановано перевезення x_{ij} кількість вантажу, то вартість кожного перевезення буде $c_{ij}x_{ij}$, а вартість всього плану перевезень – $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Кількість вивезеного товару від A_i не може перевищувати його запасу a_i:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i :$$

кількість привезеного товару в B_j не може перевищувати потреби b_j:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j .$$

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то транспортна задача називається збалансованою або закритою. У цьому випадку весь вироблений товар повинен бути вивезений, усі потреби повинні бути задоволені:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j. \end{cases}$$

Математична модель транспортної задачі:

Знайти найменше значення лінійної функції:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Теорема. Будь-яка транспортна задача, у якій сумарний обсяг запасів дорівнює сумарному обсягу потреб, має розв'язок.

3.2. Способи складання першого базисного плану

Оптимальний план перевезень треба шукати тільки серед базисних планів, в яких число відкритих маршрутів (ненульових x_{ij}) найменше.

Система обмежень транспортної задачі містить mn невідомих і $m+n$ рівнянь, але так як $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то одне з рівнянь виявляється зайвим, і система обмежень має містити $r = m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь, а отже не вироджений опорний план має включати $m + n - 1$ додатних компонент або перевезень.

Якщо транспортна задача розв'язується у таблиці, то клітинки, які мають відмінні від нуля перевезення, називають зайнятими, решту клітинок – незайнятими. Зайняті клітинки відповідають базисним невідомим, і для невиродженого опорного плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$. Опорність плану обумовлюється його ациклічністю, тобто в таблиці не можна побудувати замкнутий цикл, всі вершини якого знаходяться в зайнятих клітинках.

Циклом називають послідовну сукупність клітинок вигляду $(i_1 j_1)(i_1 j_2) \times (j_2 i_2)$ ... $(j_1 i_m)$, в якому дві і тільки дві сусідні клітинки розміщені в одному стовпці або одному рядку таблиці, причому остання клітинка знаходиться в тому ж рядку або стовпці, що і перша. Побудова циклів розпочинається з будь-якої зайнятої клітинки і потім переходять по стовпчику або по рядку в іншу зайняту клітинку, при цьому роблять повороти під прямим кутом у зайнятих клітинках і рухаються до іншої зайнятої клітинки по рядку або по стовпцю для повернення в першопочаткову клітинку. Якщо таке повернення можливе, то отриманий цикл і план не є опорним, в противному випадку – опорний.

Для складання першого опорного плану розроблено декілька методів, з яких найпростішими є діагональний метод (північно-західного кута) і метод найменшої вартості.

Приклад. Маємо 3 пункти відправлення і 4 пункти призначення. Відомі запаси a_i продукції у кожного постачальника A_i, потреби b_j кожного споживача B_j і тарифи c_{ij} (вартість перевезення одиниці товару від пункту A_i в пункт B_j). Потрібно скласти оптимальний план перевезення, тобто визначити, яка кількість вантажу x_{ij} має бути відправлена з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення, щоб загальна вартість всіх перевезень була найменшою.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	7	46
A_2	1	1	6	4	34
A_3	3	5	9	4	40
Потреби	40	35	30	45	120 150

Побудувати початковий опорний план 1) методом північно-західного кута або його ще називають діагональним методом; 2) методом мінімальної вартості.

Задачу спочатку слід перевірити на збалансованість. Задача не є збалансованою, оскільки 120<150. Маємо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ то слід ввести фіктивного постачальника A_4, запаси якого дорівнюють $a_4 = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = 150 - 120 = 30$, тарифи при цьому $c_{ф} = 0$. Тепер маємо збалансовану задачу:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	7	46
A_2	1	1	6	4	34
A_3	3	5	9	4	40
A_4	0	0	0	0	30
Потреби	40	35	30	45	150 150

1) у методі північно-західного кута (діагональному методі) заповнювати таблицю розпочинають з клітинки першого стовпця першого рядка. Для цього порівнюють $a_1 = 46$ з $b_1 = 40$, $b_1 < a_1$ і менший з обсягів записуємо в клітинку, що стає заповненою, при цьому потреби першого споживача задоволені повністю (решту клітинок в першому стовпці обнуляємо), але запаси першого постачальника повністю не вичерпані. Тому потреби другого споживача обсягом на 6 одиниць можна задовольнити за рахунок першого постачальника (перехід до другого стовпця) та решту потреб (36-6=29) обсягом 29 одиниць вантажу привезти з другої бази (перехід на другий рядок). Процес продовжуємо до тих пір, доки не задовольнимо потреби всіх споживачів за рахунок запасів постачальників:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 40	3 6	2 0	7 0	46/6/0
A_2	1 0	1 29	6 5	4 0	34/5/0
A_3	3 0	5 0	9 25	4 15	40/15/0
A_4	0 0	0 0	0 0	0 30	30
Потреби	40	35/29/0	30/25/0	45	150 150

Побудований план є опорним і невиродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок у таблиці дорівнює 7, що дорівнює $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Загальна вартість складеного плану перевезення дорівнює сумі добутків обсягів перевезень на відповідні вартості, тобто

$$F = 40 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 29 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 25 \cdot 9 + 15 \cdot 4 = 522 \text{ грн};$$

2) у методі мінімальної вартості із всієї таблиці вартостей перевезення вибирають найменшу вартість і в клітинку, що їй відповідає, розміщують найменше з чисел a_i або b_j. Далі з розгляду виключають або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю використані, або стовпець, що відповідає споживачу, потреби якого повністю задоволені, або і рядок, і стовпець, якщо використані і запаси постачальника і задоволені потреби споживача. Й далі з решти частини таблиці вартостей вибирають найменшу вартість, і процес розподілу запасів продовжують доки всі вони повністю не будуть розподілені, а потреби – задоволені.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46/16/0
A_2	1 34	1 0	6 0	4 0	34/0
A_3	3 6	5 0	9 0	4 34	40/34/0
A_4	0 0	0 19	0 0	0 11	30
Потреби	40/6/0	35/19/0	30/0	45	150 150

Отже, побудову початкового опорного плану розпочинаємо з клітинки другого рядка і першого стовпця, оскільки $c_{21} = 1$ (хоча можна було б розпочати з $c_{22} = 1$). Отже в клітинку з індексами 2 1 заносимо число 34, тому що воно є мінімальним з чисел $a_2 = 34$ та $b_1 = 40$, а другий рядок виключаємо з подальшого розгляду, тому від другого постачальника повністю вивезений вантаж. З решти таблиці знову здійснюємо вибір клітинки з мінімальною вартістю і вилучаємо з таблиці відповідний рядок або стовпець залежно від того, що вичерпано. Стовпець або рядок, які відповідають фіктивному споживачу або фіктивному постачальнику, розглядаються в останню чергу.

Побудований план є опорним і невиродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок у таблиці дорівнює 7, що дорівнює $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Загальна вартість складеного плану перевезення дорівнює:

$$F = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 34 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 34 = 296 \text{ грн.}$$

Маємо, що загальна вартість перевезення вантажу, початково зпланованого методом мінімальної вартості, набагато менша, ніж методом північно-західного кута.

Критерій оптимальності. Метод потенціалів

Знайдений висхідний опорний план перевіряється на оптимальність методом потенціалів за критерієм, який стверджує наступна теорема.

Теорема. Якщо план $X^*\left(x_{ij}^*\right)$ транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з $m + n$ чисел u_i^* і v_j^*, які задовольняють вимоги:

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \quad \text{для } x_{ij}^* > 0,$$
$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \quad \text{для } x_{ij}^* = 0.$$

Числа u_i^* і v_j^* називаються потенціалами, відповідно, постачальників і споживачів.

Отже, з теореми випливає, що потенціали u_i і v_j знаходять з рівняння $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для зайнятих клітинок. Одному з потенціалів дається довільне значення, наприклад $u_1 = 0$, тоді інші потенціали визначаються однозначно. Для того, щоб первісний опорний план був оптимальний, необхідне виконання наступних умов:

1) для кожної зайнятої клітини сума потенціалів повинна дорівнювати вартості одиниці перевезення, що стоїть в цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij};$$

2) для кожної незайнятої клітини сума потенціалів повинна бути менше або дорівнювати вартості одиниці перевезення, що стоїть в цій клітинці:

$$u_i + v_j \le c_{ij}.$$

Якщо хоча б одна незайнята клітина не задовольняє умову, то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити, вводячи в базис вектор, відповідний клітинці, для якої порушується умова оптимальності.

Таким чином, для перевірки плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Часто обчислюють $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$. Цю оцінку називають оцінкою вільних клітинок. Якщо $\Delta_{ij} \le 0$, то опорний план є оптимальним. Якщо хоча б одна з оцінок $\Delta_{ij} > 0$, то опорний план не є оптимальним і його можна поліпшити, перейшовши від одного опорного плану до іншого.

Перевіримо опорний, невироджений план, отриманий методом мінімальної вартості, на оптимальність. Для цього побудуємо таблицю потенціалів.

u \ v	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$
$u_1 = 0$	2 / 4	**3**	**2**	3 / 7
$u_2 = -1$	**1**	2 / 1	1 / 6	2 / 4
$u_3 = 1$	**3**	4 / 5	3 / 9	**4**
$u_4 = -3$	-1 / 0	**0**	-1 / 0	**0**

Для обчислення невідомих u_i і v_j використовуємо рівняння:

$$u_1 + v_2 = 3, \quad u_1 = 0,$$
$$u_1 + v_3 = 2,$$
$$u_2 + v_1 = 1,$$
$$u_3 + v_1 = 3,$$
$$u_3 + v_4 = 4,$$
$$u_4 + v_2 = 0,$$
$$u_4 + v_4 = 0.$$

Обчислюємо оцінки Δ_{ij}: $\Delta_{11} = 2 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 7 = -4 < 0$, $\Delta_{22} = (-1 + 3) - 1 > 0$, $\Delta_{23} = 1 - 6 = -5 < 0$, $\Delta_{24} = 2 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{32} = 4 - 5 = -1 < 0$, $\Delta_{33} = 3 - 9 = -6 < 0$, $\Delta_{41} = -1 - 0 = -1 < 0$, $\Delta_{43} = -1 - 0 = -1 < 0$. В одному випадку маємо, що $\Delta_{22} = (-1 + 3) - 1 > 0$. Отже, опорний план не є оптимальним і його слід поліпшити.

Перехід до іншого базисного плану

Наявність позитивної оцінки вільної клітини ($\Delta_{ij} > 0$) у ході перевірки опорного розв'язку на оптимальність свідчить про те, що отриманий розв'язок не є оптимальним і для зменшення значення цільової функції треба перейти до іншого опорного рішення. При цьому необхідно перерозподілити вантажі, переміщаючи їх із зайнятих клітин у вільні. Вільна клітина стає зайнятою, а одна з раніше зайнятих клітин – вільною.

Для вільної клітини із $\Delta_{ij} > 0$ будується цикл (ланцюг), всі вершини якого крім однієї знаходяться в зайнятих клітинах; кути прямі, число вершин парне. Біля вільної клітини циклу із $\Delta_{ij} > 0$ ставиться знак «+», потім по черзі проставляються знаки «–» і «+».У вершин зі знаком «–» обирають мінімальний вантаж (ρ), його додають до вантажів, що стоять біля вершин зі знаком «+», і віднімають від вантажів у вершин зі знаком «–». У результаті перерозподілу вантажу отримаємо новий опорний план. Цей план перевіряємо на оптимальність, і так далі до тих пір, поки не отримаємо оптимальний розв'язок.

Оптимальний план повинен розшукуватись тільки серед базисних планів з одним і тим же числом відкритих маршрутів (число ненульових базисних невідомих незмінне і дорівнює рангу матриці системи обмежень задачі). Якщо відкривається новий маршрут (у базис вводитися невідома x_{pq}), один зі старих маршрутів має бути закритий.

При призначенні нових обсягів перевезень x_{ij} треба стежити за дотриманням балансів по рядках і стовпцях таблиці (всі запаси повинні бути вивезені, всі потреби – задоволені).

Продовжимо розв'язування прикладу. Оскільки опорний план не є оптимальним і його слід поліпшити, то слід відкрити новий маршрут від A_2 до B_2 з тарифом $c_{22} = 1$ (оскільки $\Delta_{22} > 0$). Необхідно ввести в базис невідому x_{22}.

Постачальники (План 2)	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 34 −	1 0 $+\rho$	6 0	4 0	34
A_3	3 6 +	5 0	9 0	4 34 −	40
A_4	0 0	0 19 −	0 0	0 11 +	30
Потреби	40	35	30	45	150

Напрямок обходу ланцюга не має значення. Важливо, щоб всі вузли ланцюга, крім початкового, розташовувалися в зайнятих базисних клітинах.

Загальне число маршрутів не повинно збільшитися (в іншому випадку новий план не буде базисним). Вибираємо серед клітин зі знаком «–» вантаж мінімальної величини: $\rho = min\{34, 19, 34\} = 19$. До всіх клітин зі знаком «+» або «–» розносимо вантаж. Маршрут x_{42} закривається.

Новий розподіл вантажу між постачальниками та споживачами такий:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 15	1 19	6 0	4 0	34
A_3	3 25	5 0	9 0	4 15	40
A_4	0 0	0 0	0 0	0 30	30
Потреби	40	35	30	45	150

Побудований план є опорним і невиродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок у таблиці дорівнює 7. Загальна вартість даного опорного плану перевезення дорівнює:

$$F = 3\cdot 16 + 2\cdot 30 + 1\cdot 15 + 19\cdot 1 + 3\cdot 25 + 15\cdot 4 = 277 \text{ грн.}$$

Методом потенціалів перевіримо опорний план на оптимальність в таблиці:

u \ v	$v_1 =$ **3**	$v_2 =$ **3**	$v_3 =$ **2**	$v_4 =$ **4**
$u_1 =$ **0**	3 4	**3**	**2**	4 7
$u_2 =$ **-2**	**1**	**1**	0 6	2 4
$u_3 =$ **0**	**3**	3 5	2 9	**4**
$u_4 =$ **-4**	-1 0	-1 0	-1 0	**0**

За змістом таблиці маємо висновок, що план оптимальний, оскільки всі $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} < 0$.

Економічна оцінка $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$ показує, на скільки грошових одиниць зменшаться транспортні витрати від завантаження даної клітини одиницею вантажу. Ефективність плану від завантаження потенційної клітини вантажем ρ одиниць становить $\Delta F = \Delta_{ij} \cdot \rho$ грошових одиниць.

4.5. Виродження плану транспортної задачі

У ході розв'язання транспортної задачі може виявитися, що число зайнятих клітин менше, ніж $r = m + n - 1$. У цьому випадку завдання має вироджений розв'язок. Для можливого його виключення доцільно поміняти місцями постачальників і споживачів або ввести у вільну клітку з найменшою вартістю нульову поставку. Нуль поміщають в таку клітину, щоб у кожному рядку і кожному стовпці було не менше однієї зайнятої клітини. Дуже часто план вироджується у процесі його поліпшення, коли при відкритті нового маршруту закривається відразу кілька старих маршрутів.

Продовжимо розгляд прикладу. Якщо ввести в базис x_{24}, то закриваються відразу два маршрути x_{21} і x_{34}. У цьому випадку слід закрити тільки один маршрут з найбільшою вартістю, інші ж залишити в плані, але з нульовими обсягами перевезень, так, щоб загальне число маршрутів формально не змінилося (в плані є базисний нуль $x_{21} = 0$).

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 15 −	1 19	6 0	4 0 $+\rho$	34
A_3	3 25 +	5 0	9 0	4 15 −	40
A_4	0 0	0	0 0	0 30 +	30
Потреби	40	35	30	45	150

Новий план буде виродженим:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 0	1 19	6 0	4 15	34
A_3	3 40	5 0	9 0	4 0	40
A_4	0 0	0	0 0	0 30 +	30
Потреби	40	35	30	45	150

Виродження може зустрітися також у процесі складанні початкового плану.

У прикладі, що розглядається, були часткові баланси між групами постачальників і групами споживачів. Досить переставити місцями деяких постачальників або деяких споживачів (що цілком припустимо), і початкові плани будуть виродженими. Нижче наведені умови цієї дещо зміненої задачі, де переставлені місцями споживачі і постачальники:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1	4	1	6	34
A_1	3	7	4	2	46
A_3	5	4	3	9	40
A_4	0	0	0	0	30
Потреби	35	45	40	30	

Складемо початковий план діагональним методом.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1 34	4 0	1 0	6 0	34
A_2	3 1	7 45	4 0	2 0	46
A_3	5 0	4 0	3 40	9 0	40
A_4	0 0	0 0	0 0	0 30	30
Потреби	35	45	40	30	150

Тут через часткові баланси загальне число заповнених кліток виявилося рівним 5, а не $(m + n – 1) = 7$. Треба ввести в план ще два маршрути з нульовим обсягом перевезень. Відомо, що в невиродженому плані, що складений діагональним методом, ненульові компоненти розташовуються на діагоналі таблиці сходами, так що перехід до сусіднього компоненту відбувається або по вертикалі, або по горизонталі. Тому поставимо базисні нулі там, де сходи обриваються, і перехід до сусіднього компоненту плану відбувається по діагоналі. Якщо є кілька варіантів розміщення базисних нулів, вибираємо будь-який. Зараз (план 6) прийнято $x_{34} = x_{33} = 0$. Тепер число базисних невідомих дорівнює $(m + n - 1) = 7$.

Складемо тепер початковий план методом мінімальної вартості.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1 34	4 0	1 0	6 0	34
A_2	3 1	7 15	4 0	2 30	46
A_3	5 0	4 0	3 40	9 0	40
A_4	0 0	0 30	0 0	0 0	30
Потреби	35	45	40	30	150

Цей план також виявився виродженим, число ненульових компонентів тут дорівнює 6, що менше $(m + n - 1) = 7$. Однак, на відміну від попередніх випадків, не відомо, куди можна поставити додатковий базисний нуль – адже потрібно гарантувати, що після цього для будь-якої вільної клітинки можна буде побудувати замкнутий ланцюжок, всі інші вузли якого будуть розташовані у заповнених клітинках. Тому у випадку виродження вихідного плану, складеного методом мінімального елемента, застосовується спеціальний прийом, що називається методом «ε–зсуву». Ідея цього методу полягає в усуненні самої причини виродження, для чого до всіх запасів, крім останнього, додається мала величина ε , а з останнього запасу віднімаються всі додані величини (щоб не змінити величини загального запасу).

Складений після ε–зсуву план буде невиродженим. Величину ε заміняємо базисним нулем, що у даній таблиці попадає в клітинку A_3B_4. Далі в процесі поліпшення плану зберігаємо базисні нулі аж до одержання оптимального рішення.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1 $34+\varepsilon$	4 0	1 0	6 0	$34+\varepsilon$
A_2	3 $1-\varepsilon$	7 $15+2\varepsilon$	4 0	2 30	$46+\varepsilon$
A_3	5 0	4 $+\varepsilon$	3 40	9 0	$40+\varepsilon$
A_4	0 0	0 $30-3\varepsilon$	0 0	0 0	$30-3\varepsilon$
Потреби	35	45	40	30	150

Приклад. Фірма здійснює поставку пляшок на три заводи, що займаються виробництвом безалкогольних напоїв. Вона має три склади, причому на складі 1 знаходиться 6 000 пляшок, на складі 2 – 3 000 пляшок і на складі 3 – 4 000 пляшок. Першому заводу потрібно 4000 пляшок, другому заводу – 5000 пляшок, третьому – 1 000 пляшок, четвертому – 3 000. Матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

задана вартість перевезення однієї пляшки від кожного складу до кожного заводу. Необхідно так організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною.

Початковий опорний план отримаємо за методом мінімальної вартості.

Склади	Заводи				запаси
	1	2	3	4	
1	6 0	4 3 000	9 0	8 3 000	6 000
2	5 0	3 2 000	2 1 000	8 0	3 000
3	2 4 000	3 0	6 0	8 0	4 000
потреби	4 000	5 000	1 000	3 000	

Число заповнених клітин 5, $r=m+n-1=6$. Отже задача є виродженою.

Для виключення виродженості необхідно в якусь клітинку ввести нульову поставку. Така клітина стає умовно зайнятою, її доцільно визначити під час обчислення потенціалів зайнятих клітин, вона повинна мати найменшу вартість порівняно з іншими клітинками, які можуть бути умовно зайнятими. Для знаходження потенціалів необхідно помістити нульову поставку в клітинку (3, 2).

u \ v	$v_1 =$ **3**	$v_2 =$ **4**	$v_3 =$ **3**	$v_4 =$ **8**
$u_1 =$ **0**	3 / 6	**4**	3 / 9	**8**
$u_2 =$ **-1**	2 / 5	**3**	**2**	7 / 8
$u_3 =$ **-1**	**2**	**3**	2 / 6	7 / 8

План оптимальний. Вартість транспортних витрат буде мінімальною і становитиме:

$$F = 4 \cdot 3\,000 + 8 \cdot 3\,000 + 3 \cdot 2\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 4\,000 = 52\,000 \text{ грош.од.}$$

5. Теорія ігор. Основні методи їх розв'язання та аналізу

5.1. Основні поняття теорії ігор.

5.2. Розв'язання матричної гри в чистих стратегіях.

5.3. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях.

5.4. Розв'язання матричної гри графічним методом.

5.1. Основні поняття теорії ігор

У практичній діяльності часто необхідно узгодити дії фірм, підприємств, об'єднань, міністерств та інших учасників проектів у випадках, коли їх інтереси не збігаються. У цих ситуаціях теорія ігор дозволяє знайти кращий розв'язок у поведінці всіх учасників, зобов'язаних погоджувати дії у разі зіткнення інтересів. Теорія ігор широко проникла в практику економічних рішень і досліджень. Так, можна визначити науково обгрунтовані рівні зниження роздрібних цін і оптимальний рівень товарних запасів, розв'язати задачу планування порядку організації джерел корисних ресурсів у країні і т. д.

Теорію ігор визначають як розділ математики, що вивчає конфліктні ситуації. Це означає, що можна сформулювати оптимальні правила поведінки кожної сторони, яка бере участь у вирішенні конфліктної ситуації. В економіці виявилося недостатньо апарату математичного аналізу, пов'язаного з визначенням екстремумів функції. Теорію ігор слід розглядати як окремий розділ оптимізаційного підходу, що дозволяє розв'язувати нові задачі у прийнятті рішення.

Гра – це спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації, відмінна від реального конфлікту тим, що ведеться за певними правилами. Іншими словами, гра – це сукупність правил, що визначають можливі дії (чисті стратегії) учасників гри.

Суть гри полягає в тому, що кожен з учасників приймає рішення в конфліктній ситуації, що розвивається, які як він розуміє, можуть забезпечити йому найкращий результат. Результат гри – це значення деякої функції, так званої функції виграшу (платіжної функції). Ця функція задається або таблицею, або аналітичним виразом. Якщо сума виграшів гравців дорівнює нулю, то гру називають грою з нульовою сумою. Якщо в грі беруть участь два гравці, то її називають парною.

Величина виграшу залежить від стратегії, яку використовує гравець. Стратегія – це сукупність правил, що однозначно визначає послідовність дій гравця в кожній конкретній ситуації, що реалізується в процесі гри. Оптимальною називається стратегія, яка під час багаторазового повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш. Будь-яка гра складається з партій. Партією називають кожен варіант гри певним чином. У свою чергу, в партії гравці здійснюють конкретні ходи. Хід – це вибір і реалізація гравцем одного з допустимих варіантів поведінки.

Залежно від кількості стратегій ігри поділяються на скінченні і нескінченні. Залежно від взаємовідносин учасників розрізнюють ігри безкоаліційні (учасники не мають права укладати угоди) або некооперативні, і коаліційні або кооперативні. За характером виграшів ігри поділяють на ігри з нульовою сумою і ігри з ненульовою сумою. У перших − загальний капітал гравців не міняється, а лише перерозподіляється в ході гри, у зв'язку з чим сума виграшів дорівнює нулю (програш приймається як від’ємний виграш). У грі з нульовою сумою сума виграшів відмінна від нуля.

За видом функцій виграшів ігри поділяються на матричні, біматричні, неперервні, опуклі, сепарабельні. У матричній грі (за участю двох учасників) виграші першого учасника задаються матрицею, в біматричних - виграші кожного гравця задаються своєю матрицею. Інші типи такої гри розрізнюються виглядом аналітичного виразу платіжної функції. За кількістю ходів ігри діляться на одноходові (виграші розподіляються після одного ходу кожного гравця) і багатоходові (виграш розподіляється після декількох ходів). Багатоходові ігри у свою чергу діляться на позиційні, стохастичні, диференціальні та ін. Залежно від обсягу наявної інформації розрізнюють гру з повною і неповною інформацією. Надалі автор буде розглядати тільки парну матричну гру з нульовою сумою.

Гра, в якій учасники прагнуть досягти для себе найкращого результату, свідомо вибираючи допустимими правилами гри способи дій, називають стратегічною. Однак в економіці часто доводиться моделювати (формалізувати) ситуації, в якій один з учасників байдужий до результату гри. Така гра називається грою з природою, розуміючи під природою всю сукупність зовнішніх обставин, в яких свідомому гравцеві доводиться приймати рішення. Наприклад, визначення обсягу виробництва випуску сезонної продукції в надії найбільш вигідного дня її реалізації для рівня попиту; формування пакета цінних паперів у розрахунку на високі дивіденди і т. д. Тут в ролі гравця виступає в першому випадку рівень попиту, в другому – розмір очікуваного прибутку. У грі з природою міра невизначеності свідомого гравця зростає.

Розглянемо гру, в якій у кожного з двох гравців A і B є кінцеве число можливих дій, тобто чистих стратегій. Припустимо, що гравець A має у своєму розпорядженні m чистих стратегій, які позначимо $A_1, ..., A_m$, а гравець B має n чистих стратегій $B_1, ..., B_n$. Для того, щоб гра була повністю визначена, необхідно вказати правило, за яким кожній парі чистих стратегій $\left(A_i; B_j\right)$ ставиться у відповідність число a_{ij} – виграш гравця A за рахунок гравця B або програш гравця B. Розглядається гра з нульовою сумою. При $a_{ij} < 0$ гравець A виплачує гравцю B суму $\left|a_{ij}\right|$. Якщо гра складається тільки з точних ходів, то вибір пари чистих стратегій $\left(A_i; B_j\right)$ єдиним способом визначає результат гри. Якщо ж протягом гри використовуються випадкові ходи, то результат гри визначається середнім значенням виграшу (його математичним очікуванням).

Нехай відомі значення a_{ij} для кожної пари $\left(A_i; B_j\right)$ чистих стратегій, отже, можна скласти матрицю гри, тобто платіжну матрицю, яка є табличним записом функції виграшу (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

A_i	B_j				α_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

У теорії матричних ігор завжди передбачається, що в платіжній матриці записані виграші гравця A. Вони можуть виражатися і від’ємними числами, що фактично означає виграш гравця B. Описані ігри називають матричними, або прямокутними. Окрема партія в цих іграх реалізовується таким чином. Гравець A вибирає один із рядків платіжної матриці (одну зі своїх чистих стратегій). Не знаючи результату його вибору, гравець B вибирає один із стовпців (свою чисту стратегію). Елемент матриці, що стоїть на перетині вибраних рядка і стовпця, визначає виграш гравця A (програш гравця B).

5.2. Розв'язання матричної гри в чистих стратегіях

Метою учасників всякої матричної гри є вибір найбільш вигідних стратегій, що забезпечують гравцеві A максимальний виграш, а гравцеві B – мінімальний програш. Стратегію гравця A називають оптимальною, якщо у процесі її застосування виграш гравця A не меншає, якими б стратегіями не користувався б гравець B. Оптимальною для гравця B називають стратегію, у процесі використання якої програш цього гравця не збільшується, які б стратегії не використав гравець A.

Під час пошуку оптимальних стратегій гравці спираються на основоположний принцип теорії ігор – принцип обережності, згідно з яким кожен гравець, вважаючи противника по грі дуже розумним, обирає свої дії в припущенні, що противник ні в якому разі не пропустить жодної можливості використовувати будь-яку його помилку, будь-який прорахунок у своїх інтересах. Тому гравці повинні бути дуже уважні під час вибору кожної своєї чистої стратегії.

Нехай гравцеві A слід зробити свій вибір. Аналізуючи платіжну матрицю (табл. 14.1), він для кожної чистої стратегії A_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ знайде мінімальне значення α_i можливого виграшу: $\alpha_i = \min_j \{a_{ij}\}$ $(i = \overline{1, m})$, а потім з усіх α_i обере найбільше $\alpha = \max_i \{a_i\}$, і прийме відповідну йому чисту стратегію A_i^0. Це і буде переважаюча (яка гарантує) у даних умовах стратегія гравця A. Її називають максимінною, оскільки вона відповідає величині:

$$\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\} .$$

Число α називається нижньою чистою ціною гри (максимінною). Воно показує, який мінімальний виграш може отримати гравець A при будь-яких діях гравця B, якщо правильно використовує свої чисті стратегії. У свою чергу гравець B, прагнучи мінімізувати програш, при виборі переважаючої стратегії використовує принцип обережності таким чином: спочатку для кожної чистої стратегії B_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$ він визначає максимально можливий програш $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$, де $j = \overline{1, n}$ (табл. 14.1), а потім серед β_j обере мінімальне значення $\beta = \min_j \{\beta_j\}$, якому і буде відповідати бажана чиста стратегія B_j^0. Її називають мінімаксною, оскільки вона відповідає величині:

$$\beta = \min_j \max_i \{a_{ij}\} .$$

Число β називається верхньою чистою ціною гри (мінімаксною). Воно показує, який максимальний програш може бути у B гравця під час правильного вибору ним своїх чистих стратегій не залежно від дій гравця A.

Отже, правильно використовуючи чисті стратегії, гравець A забезпечує собі виграш не менше α, а гравець B, правильно використовуючи свої чисті стратегі, не дозволить гравцеві A виграти більше, ніж β.

Теорема. У матричній грі нижня чиста ціна гри не перевищує верхньої чистої ціни гри, тобто $\alpha \leq \beta$.

Теорема без доведення.

Якщо в матричній грі нижня і верхня чисті ціни збігаються, тобто $\alpha = \beta$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $v = \alpha = \beta$.

Позначимо через i_* та j_* номери чистих стратегій, при яких має місце рівність $\alpha = \beta$. Пара чистих стратегій $\left(A_{i*}; B_{j*}\right)$ гравців A і B, при яких досягається ця рівність, називається сідловою точкою матричної гри, а елемент $a_{i_* j_*}$ матриці, який стоїть на перетині i_*-го рядка і j_*-го стовпця, є сідловим елементом платіжної матриці:

$$\max_i \min_j \{a_{ij}\} = \min_j \max_i \{a_{ij}\} = a_{i_* j_*}.$$

Сідловій точці відповідають оптимальні стратегії гравців. Їх сукупність − це розв'язок гри, який має наступну властивість: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад. Є три можливих стратегії виробництва продукції: $S_1 = 986\ 200{,}50$ тис. грн., $S_2 = 1\ 488\ 973$ тис. грн., $S_3 = 1\ 967\ 962{,}1$ тис. грн.

Залежно від змін ринкової кон'юнктури у зв'язку з наявними можливостями реалізації розраховані варіанти середньорічного прибутку (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Матриця платоспроможного попиту

Обсяг виробництва (оптові закупівлі)	**Розмір прибутку (a_{ij}) залежно від можливих коливань попиту**				$\alpha_i = \min \{a_{ij}\}$
	489 876,17	986 200,50	1 488 973	1 967 962,1	
S_1=986 200,50	49 310,03	197 240,1	197 240,1	197 240,1	49 310,03
S_2=1 488 973	-60	148 897,3	297 794,6	297 794,6	-60
S_3=1 967 962,1	-1 140	98 398,11	196 796,24	393 592,42	-1 140
$\beta_j = \max \{a_{ij}\}$	49 310,03	197 240,1	297 794,6	393 592,42	

Аналіз гри почнемо з позиції максиміну:

$$\alpha_1 = \min_j \{a_{ij}\} = \min\{49\ 310{,}01;\ 197\ 240{,}10; 197\ 240{,}10\} =$$

$$= 49\ 310{,}33 \quad \text{тис. грн.}$$

$$\max_i \{\alpha_i\} = \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \{49\ 310{,}01;\ -60; -1\ 140\} = 49\ 310{,}33 \quad \text{тис. грн.}$$

Стратегія S_1 називається максиминною – це і є нижня ціна гри.

Аналогічно необхідно міркувати з боку «природи»:

$$\beta_1 = \max_i \{49310{,}03; -60; -1140\} = 49310{,}03 \text{ тис. грн}.$$

$$\beta = \min_j \{\beta_j\} = \min_j \{49310{,}03;\ 197240{,}1;\ 297794{,}6;\ 393592{,}42\} =$$
$$= 49310{,}03 \text{ тис. грн.}$$

Ця величина називається верхньою ціною гри. Сідлова точка дорівнює $v = \alpha_1 = \beta_1 = 49310{,}03$ (табл. 14.2). Таким чином, необхідно вибрати першу стратегію з обсягами виробництва 986 200,50 тис. грн.

5.3. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Якщо гра не має сідлової точки, то її розв’язання ускладнюється. Гравцям потрібно так вибирати свої чисті стратегії в черговій партії, щоб партнер не здогадався про них. Це можливо тільки тоді, коли сам не знаєш, яку стратегію використовуватимеш при черговому ході. Тут на допомогу приходить механізм випадкового вибору чистих стратегій. Аналіз гри без сідлової точки показує, що гравець A може виграти більше за максимін α, який він отримав би при максимінній стратегії, якщо в ході гри використовуватиме не одну, а кілька чистих стратегій, випадковим чином змішуючи їх, тобто застосовуючи змішану стратегію. Гравець B теж може програти менше за мінімакс β, який він сплачує гравцеві A при мінімаксній стратегії, якщо використає свою змішану стратегію.

Звернемося до загального випадку матричної гри (табл. 14.3). Позначимо через $p_1, \ldots, p_m$ ймовірності, з якими гравець A використовує у ході гри свої чисті стратегії $A_1, \ldots, A_m$. Оскільки в табл. 14.3 наведено повний набір чистих стратегій гравця A, то для ймовірностей p_i виконуються умови:

$$p_i \geq 0, \left(i = \overline{1, m}\right), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{5.3}$$

Упорядкована множина $\vec{p} = \left(p_1; \ldots; p_m\right)$, елементи якої задовольняють умовам (5.3), повністю визначає характер гри гравця A і називається його змішаною стратегією. Таким чином, змішаною стратегією гравця A є повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій.

Таблиця 5.3

Матриця статистичної парної гри

A_i	B_j				p_i
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1 $\dots$ A_m	a_{11} $\dots$ a_{m1}	a_{12} $\dots$ a_{m2}	$\dots$ $\dots$ $\dots$	a_{1n} $\dots$ a_{mn}	p_1 $\dots$ p_m
q_j	q_1	q_2	$\dots$	q_n	

Випадковість вибору чистих стратегій, якою користується гравець A, забезпечує йому нескінченну множину змішаних стратегій. Будь-яка його чиста стратегія A_i може розглядатися як окремий випадок змішаної стратегії, i-ий компонент якої є 1, а всі інші – 0, тобто $\overline{p} = (0; \dots; 1; \dots; 0)$.

Аналогічно впорядкована множина $\overline{q} = (q_1; \dots; q_n)$, елементи якої задовольняють співвідношенням:

$$q_j \geq 0, \left(j = \overline{1, n}\right), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

є змішаною стратегією гравця B. Як і гравець A, гравець B має у своєму розпорядженні нескінченну множину змішаних стратегій.

Нехай гравці A і B застосовують змішані стратегії $\overline{p}$ і $\overline{q}$. Це означає, що гравець A використовує стратегію A_i з ймовірністю p_i, а гравець B − стратегію B_j з ймовірністю q_j. Оскільки вони обирають свої чисті стратегії випадково і незалежно один від одного, то ймовірність вибору пари $\left(A_i; B_j\right)$ дорівнює добутку ймовірностей p_i і q_j, тобто $p_i \cdot q_j$. У процесі використання змішаних стратегій гра набуває випадкового характеру, випадковою стає і величина виграшу гравця A (програшу гравця B). У зв'язку з цим можна вести мову лише про середню величину (математичне сподівання) виграшу (програшу). Зрозуміло, що ця величина є функцією від змішаних стратегій $\overline{p}$ і $\overline{q}$. Вона визначається за формулою:

$$f\left(\overline{p}, \overline{q}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Функція $f(\overline{p},\overline{q})$ називається ***платіжною функцією*** гри за матрицею, що задана табл. 5.3.

Аналогічно з раніше введеними поняттями нижньої чистої ціни і верхньої чистої ціни вводяться поняття нижньої і верхньої ціни стосовно змішаних стратегій, зберігаючи для них ті ж позначення α і β. Замість виграшу a_{ij} тепер мають на увазі середній виграш $f(\overline{p},\overline{q})$, а замість чистих стратегій гравців з номерами i та j – їх змішані стратегії $\overline{p}$ та $\overline{q}$:

$$\alpha = \max_{p} \min_{q} f(\overline{p},\overline{q}); \quad \beta = \min_{q} \max_{p} f(\overline{p},\overline{q}).$$

Як і в грі, що має сідлову точку в чистих стратегіях, ***оптимальними змішаними стратегіями*** називають такі стратегії $\overline{p}^*$ і $\overline{q}^*$ гравців A і B, за яких має місце рівність:

$$\max_{p} \min_{q} f\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right) = \min_{q} \max_{p} f\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right) = f\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right).$$

Величина $f(\overline{p}^*,\overline{q}^*)$, що відповідає оптимальним стратегіям $\overline{p}^*$ і $\overline{q}^*$ і отримана за формулою (14.5), називається ціною гри:

$$\nu = f(\overline{p}^*,\overline{q}^*).$$

Існує еквівалентне даному означення оптимальних змішаних стратегій. Стратегії $\overline{p}^*$ і $\overline{q}^*$ називають оптимальними змішаними стратегіями відповідно гравців A і B, якщо ці стратегії утворюють сідлову точку для платіжної функції $f(\overline{p},\overline{q})$, тобто задовольняють нерівність:

$$f\left(\overline{p},\overline{q}^*\right) \le f\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right) \le f\left(\overline{p}^*,\overline{q}\right).$$

Якщо використати змішані стратегії, то для будь-якої матричної гри можна знайти оптимальні стратегії і ціну гри. В цьому полягає значення основної теореми в теорії ігор ─ теореми Неймана.

Теорема. В змішаних стратегіях будь-яка скінчена матрична гра має сідлову точку. Теорема без доведення.

Критеріями розв'язання матричної гри є наступна теорема.

Теорема. Для того, щоб змішані стратегії $\overline{p}^* = (p_1^*; \ldots; p_m^*)$ та $\overline{q}^* = (q_1^*; \ldots; q_n^*)$ були оптимальними для гравців A і B у грі за матрицею $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ з ціною v, необхідно і достатньо виконання нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq v, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i^* \leq v, \quad j = \overline{1,n}.$$

Чисті стратегії гравця, що входять до його оптимальної змішаної стратегії з ймовірностями, відмінними від нуля, називаються ***активними стратегіями*** гравця. Число активних стратегій не перевищує $\min\{m;n\}$.

Теорема. Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри незалежно від того, яку стратегію застосовує другий гравець, якщо тільки той не вийде за межі своїх активних стратегій. Теорема без доведення.

Розв'язання гри можна істотно спростити, якщо своєчасно виявити домінування одних стратегій, які присутні в платіжній матриці, над іншими, оскільки це дозволить скоротити вимірність матриці. Якщо в платіжній матриці всі елементи k- ого рядка не менші за відповідні елементи s- ого рядка, тобто $a_{kj} \geq a_{sj}$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, то виграш гравця A за стратегією A_k не буде меншим, ніж за стратегією A_s, якою б стратегією не користувався гравець B. Отже, стратегія A_k домінує над стратегією A_s, відповідно стратегію A_k називають ***домінуючою***, а стратегію A_s – ***домінуємою.***

Аналогічно, якщо всі елементи l- ого стовпця не перевершують відповідних елементів r- ого стовпця, тобто $a_{il} \geq a_{ir}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, то гравцеві B за будь-яких умов невигідно застосовувати стратегію B_r, оскільки в цьому випадку він програватиме більше (не менше), ніж під час використання стратегії B_l. Тому кажуть, що стратегія B_l домінує над стратегією B_r, і називають їх відповідно домінуючою і домінуємою. Окремим випадком домінування є дублювання стратегій, коли $a_{kj} = a_{sj}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$, або $a_{il} = a_{ir}$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$.

Спрощення платіжних матриць шляхом виключення явно невигідних гравцям чистих стратегій можливо завдяки наступній теоремі.

Теорема. Нехай I –гра, в матриці якої k- а стратегія гравця A домінує над s- ою, а I' –гра, матриця якої отримана з матриці гри I шляхом виключення s- го рядка. Тоді: а) ціна гри I' дорівнює ціні гри I; б) для гравця B оптимальна змішана стратегія $\overline{q}^* = \left(q_1^*; \ldots; q_n^*\right)$ в грі I' є також його оптимальною змішаною стратегією в грі I; в) якщо вектор $\overline{p}'^* = \left(p_1^*; \ldots; p_{s-1}^*; p_{s+1}^*; \ldots; p_m^*\right)$є оптимальною змішаною стратегією гравця A в грі I', то в грі I для нього оптимальною є змішана стратегія $\overline{p}^* = \left(p_1^*; \ldots; p_{s-1}^*; 0; p_{s+1}^*; \ldots; p_m^*\right)$. Теорема без доведення.

Отже, якщо стратегія A_k домінує над стратегією A_s, то ймовірність застосування останньої в оптимальній змішаній стратегії $\overline{p}^*$ гравця A дорівнює нулю, тому s- й рядок з платіжної матриці можна виключити.

Аналогічна теорема існує у випадку домінування стратегій гравця B.

Приклад. Виконати можливі спрощення платіжної матриці:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відповідні елементи першого і третього рядка є рівними, тому один з них (наприклад третій) можна виключити. Елементи другого рядка не перевищують відповідних елементів першого, тому другий рядок теж виключаємо і приходимо до матриці:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Елементи першого стовпця даної матриці перевищують відповідні елементи другого стовпця, елементи третього ─ елементи четвертого, а елементи п'ятого

– елементи другого. Домінуємі перший, третій і п'ятий стовпці опускаємо. У результаті отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Якщо цю матрицю проаналізувати з позицій гравця A, то ніяких подальших спрощень виконати неможливо. Отже, замість розв'язання гри з матрицею вимірності 4×5 досить вирішити гру вимірності 2×2: ймовірності активних стратегій гравців в обох іграх будуть одними і тими ж, що випливає з теореми.

14.4. Розв'язання матричної гри графічним методом

Найбільш проста матрична гра – це гра, в якій кожен з гравців має дві стратегії. Матриця **A** має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо сідлової точки немає, то розв'язок гри знаходиться в змішаних стратегіях, а саме $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2)$. Це є ймовірності, з якими застосовують гравці свої стратегії.

Необхідно записати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \end{cases}.$$

З урахуванням $x_1 + x_2 = 1$, знаходимо

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Ціна гри:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Складаючи аналогічну систему рівнянь, знаходимо оптимальну стратегію для гравця B:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Приклад. Розв'язати гру, задану платіжною матрицею:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо, що $\alpha = 1$, $\beta = 2$, матриця не має сідлової точки. За формулами знаходимо оптимальні стратегії та ціну гри:

$$\mathbf{X} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right),\ \mathbf{Y} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right),\ \nu = \frac{5}{3}.$$

Гру з матрицею 2×2 можна розв'язати графічно за допомогою таких побудов (рис. 14.1 − 14.2).

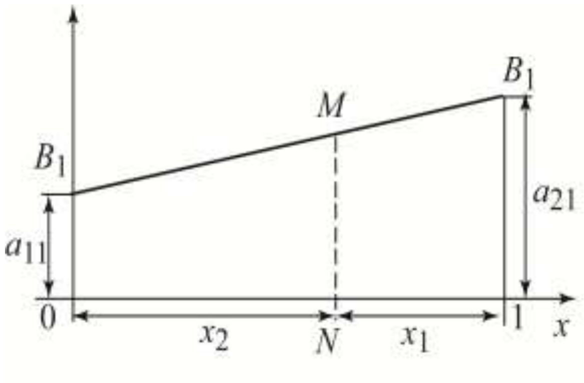

Рис.5.1.

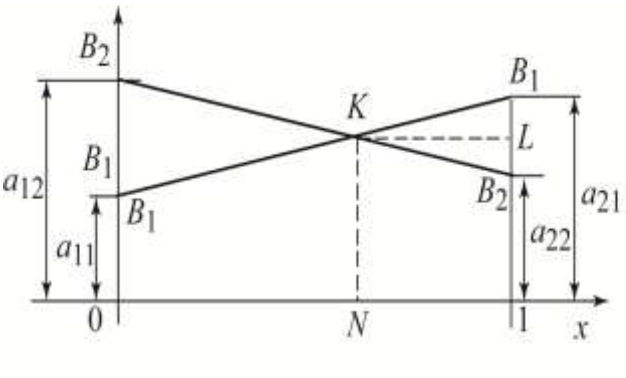

Рис. 5.2.

За віссю абсцис відкладаємо відрізок, довжина якого дорівнює одиниці. Лівий кінець відрізка (точка $x = 0$) відповідає стратегії A_1, правий – стратегії A_2. Проміжні точки x відповідають змішаним стратегіям (x_1, x_2), де $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. На кінцях цього відрізка перпендикулярно до осі абсцис проводять прямі і відкладають виграш при відповідних чистих стратегіях. Якщо гравець B використовує стратегію B_1, то виграш під час використання чистих стратегій A_1 і A_2 складе відповідно a_{11} і a_{21}. Відкладемо ці точки і з'єднаємо їх прямою B_1B_1. Якщо гравець A використовує змішану стратегію, то його виграшу відповідає деяка точка M, яка лежить на цій прямій. Аналогічно можна побудувати пряму B_2B_2, відповідну стратегії B_2 гравця B. Ламана B_1KB_2 – нижня межа виграшу, який отримає гравець A. Точка K, в якій виграш максимальний, визначає ціну гри і її розв'язок. Для знаходження оптимальної стратегії гравця B використовуються формули:

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}, \quad y_2 = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}.$$

Справедливість цих співвідношень доводиться, якщо у формули, що виражають y_1 і y_2, підставити замість LB_2 і LB_1 їх значення, маємо:

$$LB_2 = v - a_{22};\ LB_1 = a_{21} - v.$$

Тут же можна розглянути задачу мінімізації верхньої межі виграшу для гравця B, помінявши місцями у розв'язанні гравців A і B.

Використовуючи геометричну інтерпретацію, можна знайти розв'язання ігор, заданих матрицею $2 \times n$. Кожній із n стратегій гравця B відповідає пряма. Побудувавши ці прямі, знаходять нижню межу виграшу. Точка K, що на нижній межі і для якої величина виграшу найбільша, визначає ціну гри і її розв'язок. При цьому визначаються активні стратегії гравця B (відповідні їм прямі перетинаються в точці K): з геометричних міркувань можна знайти значення y_j, що відповідають активним стратегіям гравця B.

Аналогічно може бути розв'язана гра з матрицею $m \times 2$, тільки при цьому будують верхню межу виграшу і на ній визначають мінімум.

Геометричні побудови доцільно використовувати для визначення активних стратегій гравців. Потім розв'язання знаходять за аналітичними формулами, або відповідні значення $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ і v знаходять з геометричних міркувань.

Приклад. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямі на рис. 5.3 відповідають стратегіям гравця B. Ламана B_3KB_4 відповідає нижній межі виграшу.

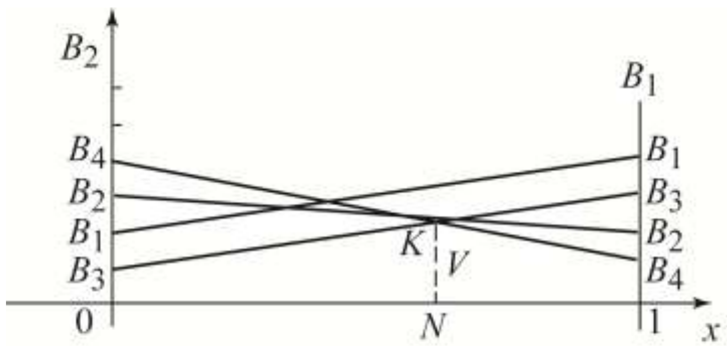

Рис. 5.3. **Графічний розв'язок гри, матриця якої має розміри 2×4**

Оптимальні стратегії гравця B – третя і четверта. За формулами можна знайти розв'язання гри: $\mathbf{X} = (0{,}4;\, 0{,}6)$; $\mathbf{Y} = (0;\, 0;\, 0{,}6;\, 0{,}4)$, $\nu = 2{,}2$. Отже, гравець A використовує стратегію A_1 з імовірністю 0,4, а стратегію A_2 – з імовірністю 0,6. При цьому його виграш в середньому складе 2,2 одиниць.

Список літератури

1. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник для студ. вищ. навч. закл. / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2006. – 384 с.

2. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование: учебн. пособ. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1980. – 300 с.

3. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи та моделі: навчальний посібник / Л. М. Малярець. – Х: Вид ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 412 с.

4. Таха Хемди А. Введение в исследование операций / Таха Хемди А.; пер. с англ. – 7-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

5. Фролькис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов / В. А. Фролькис. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2002. – 320 с.

Зміст

Вступ

1. Задача лінійного програмування і методи її розв’язання

1.1. Постановка задачі лінійного програмування.

1.2. Канонічна форма задачі лінійного програмуванняю.

1.3. Графічний метод розв’язання задачі лінійного програмування.

1.4. Властивості можливих розв’язків задачі лінійного програмування.

2. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування і деякі його теоретичні аспекти

2.1. Пошук оптимального плану. Умова оптимальності.

2.2. Алгоритм симплексного методу.

2.3. Проблема виродження.

3. Теорія двоїстості. Взаємно двоїсті задачі лінійного програмування

3.1. Правила складання умов взаємно двоїстих задач.

3.2. Теореми двоїстості.

4. Транспортна задача. Методи розв'язання транспортної задачі

4.1. Загальна постановка транспортної задачі.

4.2. Способи складання першого базисного плану. Критерій оптимальності. Метод потенціалів.

4.3. Виродження плану транспортної задачі.
5. Теорія ігор. Основні методи їх розв'язання та аналізу
5.1. Основні поняття теорії ігор.
5.2. Розв'язання матричної гри в чистих стратегіях.
5.3. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях.
5.4. Розв'язання матричної гри графічним методом.
Список літератури