МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦА

Кафедра вищої математики та
економіко-математичних методів

Конспектии лекцій з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»

Харків, 2018

Тема 1. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей

1.1. Стохастичний експеримент, його роль і місце при моделюванні соціально-економічних і природних процесів

У природі, техніці та економіці немає явищ, в яких були б відсутні елементи випадковості. При моделюванні соціально-економічних і природних процесів необхідно враховувати не лише основні чинники, а й безліч другорядних, що призводять до випадкових спотворень результату, тобто вносять в нього елемент невизначеності. Цей підхід є основою стохастичного експерименту, де елемент невизначеності вивчається спеціальними методами. На практиці часто доводиться стикатися з випадковими подіями, тобто з подіями, які можуть відбутися або не відбутися з причин, які не піддаються безпосередньому обліку в даних умовах. Вивчення кількісних закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові події, і є предметом теорії ймовірностей. Таким чином, теорія ймовірностей вивчає властивості і закономірності масових випадкових явищ.

1.2. Алгебра випадкових подій

Нехай відбувається деяке випробування (експеримент, дослідження) з випадковим результатом.

Випробуванням називається певна сукупність умов і дій, яка може бути відтворена як завгодно велике число разів. Результат реалізації цих умов або дій є ***подією***. Події поділяються на достовірні, неможливі та випадкові.

Подія називається ***випадковою***, якщо вона може відбутися або не відбутися в результаті випробування.

Подія називається ***достовірною*** (Ω), якщо вона обов'язково станеться в результаті випробування, і ***неможливою*** (Ø), якщо вона не може відбутися в результаті даного випробування.

Випадкові події позначаються великими літерами латинського алфавіту A, B, C ті ін.

Події називаються ***сумісними***, якщо вони можуть з'явитися разом в одному й тому ж випробуванні.

Події A і B називаються ***несумісними***, якщо вони не можуть відбутися разом в одному і тому ж випробуванні.

Дві події називаються ***незалежними***, якщо поява однієї з них не залежить від появи іншої. Дві події називаються ***залежними***, якщо поява однієї з них залежить від появи іншої.

Події називаються ***рівноможливими***, якщо за умовами випробування жодна з цих подій не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Події називаються ***єдино можливими***, якщо крім них не можуть відбутися ніякі інші події.

Протилежною відносно A подією (або *доповненням*) є подія $\overline{A}$, що полягає в тому що A не відбувається. Дві несумісних єдино можливі події є протилежними.

Якщо події незалежні, то незалежні також і відповідні їм протилежні події.

Події A_1, A_2, ... , A_n утворюють ***повну групу несумісних подій***, якщо в деякому випробуванні обов'язково відбувається одне з них і ніяка інша подія відбутися не може. Повну групу подій становить сукупність усіх єдино можливих подій в даному випробуванні.

Елементарними подіями деякого випробування називаються всілякі результати цього випробування.

Безліч всіх елементарних подій деякого експерименту (випробування) називається ***простором елементарних подій***.

Алгеброю подій $\Re$ будемо називати непорожню систему деяких підмножин, що задовільняють наступним аксіомам:

якщо підмножина A належит $\Re$ (є подією), то доповнення $\overline{A}$ також належит $\Re$ (є подією);

якщо підмножини A та B належать $\Re$ (є подіями), то й об'єднання $A \cup B$ також належит $\Re$ (є подією).

Об'єднанням (сумою) двох подій A і B називається подія $A \cup B$ (або $A + B$), яка полягає в появі або події A, або події B, або обох разом.

Перетином двох подій A й B називається подія $A \cap B$ (або $A \cdot B$), яка полягає в одночасній появі обох подій.

Позначимо достовірну подію Ω, неможливе – Ø.

Для протилежної відносно A події $\overline{A}$, яка полягає в невиконанні події A, справедливо:

$$A \cdot \overline{A} = \varnothing; \;\; A + \overline{A} = \Omega.$$

Для несумісних подій A и B виконується: $A \cdot B = \varnothing$.

1.3. Ймовірність на дискретному просторі елементарних подій

Нехай простір елементарних подій скінченний. І нехай кожній події A, що належить алгебрі подій $\mathfrak{R}$, відповідає число $P(A)$.

Числова функція $P(A)$ називається ***ймовірністю***, якщо вона задовільняє наступним аксіомам:

1) $P(A) \geq 0$ (аксіома невід'ємності);

2) $P(\Omega) = 1$, де Ω – достовірна подія (аксіома нормування);

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (аксіома адитивності), якщо події A і B належат $\mathfrak{R}$, то подія $A \cup B$ також належить $\mathfrak{R}$.

Таким чином, ***ймовірністю події*** називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події.

З аксіом ймовірності виводиться ряд властивостей ймовірності:

1) ймовірність неможливого події дорівнює нулю: $P(\varnothing) = 0$;

2) ймовірність події належить інтервалу $[0,1]$, тобто $0 \leq P(A) \leq 1$.

Подія називається ***малоймовірною***, якщо в даній системі випробувань ймовірність її появи зневажливо мала. Рівень ймовірності, яким можна знехтувати, називається рівнем ***значущості*** (α).Як правило, на практиці вибирають рівень значущості, який дорівнює $\alpha_1 = 0{,}01$ або $\alpha_2 = 0{,}05$. Але можливі й інші рівні значущості.

Сума подій, що утворюють повну групу, є достовірною подією, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (1.1)$$

Дві протилежні події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, тобто $A + \overline{A} = \Omega$ – достовірна подія.

Тому: $P(A + \overline{A}) = 1$, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

У класичній схемі **ймовірність** події визначається як відношення числа випадків m, які сприяють йому, до загальної кількості n рівноможливих, єдино можливих і несумісних результатів випробування, тобто:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

Відносною частотою $w(A)$ події A називають відношення числа m його появ в n випробуваннях до числа всіх випробувань, тобто:

$$w(A)=\frac{m}{n}.$$

Якщо n чимала, то відносна частота $w(A)$ коливається навколо деякої постійної величини $P(A)$, яку називають ***ймовірністю події*** A.

1.4. Основні поняття комбінаторного аналізу

Комбінаторика вивчає кількість комбінацій, які підпорядковані певним умовам і які можна скласти з елементів.

Основні формули комбінаторики, які використовуються в теорії ймовірностей

Перестановки - це комбінації, які складаються з одних і тих самих елементів і відрізняються тільки порядком їх розміщення:

$$P_n=n!, \tag{1.3}$$

де $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n,\ 0!=1.$

Розміщеннями називають комбінації, які складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються або складом елементів, або їх порядком:

$$A_n^m=n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1). \tag{1.4}$$

Сполучення - це комбінації, які складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}. \tag{1.5}$$

При розв'язанні задач в комбінаториці використовують такі *правила*:

1) ***правило сум***: якщо об'єкт A може бути обраний із сукупності об'єктів m способами, а другий об'єкт B – n способами, то вибрати або A, або B можливо $m+n$ способами;

2) ***правило произведения***: якщо об'єкт A може бути обраний із сукупності об'єктів m способами та після кожного такого вибору об'єкт B можно обрати n способами, то пара об'єктів (A, B) в такому порядку може бути обрана $m \cdot n$ способами.

Питання для самодіагностики

1. Що є предметом теорії ймовірностей?
2. Що називається алгеброю подій? Навести аксіоми ймовірності. Що називають подіями і як їх класифікують?
3. Навести класичне визначення ймовірності.
4. У чому полягає основне правило комбінаторики?
5. Що таке перестановки, розміщення, сполучення?
6. Навести статистичне визначення ймовірності.

Тема 2. Основні теореми теорії ймовірностей

2.1. Теореми додавання ймовірностей для несумісних і сумісних подій

Теорема 1. Ймовірність появи суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (2.1)$$

Слідство: Ймовірність появи суми декількох попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей*:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема 2. Ймовірність появи суми двох спільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх спільної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (2.2)$$

2.2. Умовна ймовірність, теореми множення ймовірностей

Події називаються ***залежними***, якщо поява однієї з них залежить від появи іншої. Ймовірність події A, яка обчислюється за умови, що подія B вже відбулася, називається ***умовною ймовірністю*** події A та позначається $P_B(A)$. Умовна ймовірність має всі властивості безумовної ймовірності.

Теорема 1. Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої за умови, що перша вже відбулась:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (2.3)$$

Теорема 2. Ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \qquad (2.4)$$

2.3. Незалежність подій

Можна уточнити поняття незалежності подій. Події A і B ***незалежні***, якщо умовна ймовірність події B за умови, що A співпаде з безумовною ймовірністю події B, тобто $P_A(B)=P(B)$. Кілька подій називаються ***незалежними в сукупності***, якщо ймовірність кожної з них не змінюється незалежно від того відбулася або не відбулася будь-яка інша події або їх комбінація.

Теорема. Ймовірність появи *хоча б одного* з незалежних в сукупності подій $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ визначається формулою

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n, \qquad (2.5)$$

де $q_i=1-p_i$ – ймовірності відповідних протилежних подій $\overline{A_i}\ (i=\overline{1,n})$.

Якщо необхідно визначити кількість випробувань, яке необхідно для отримання бажаного результату, з надійністю не менше ніж Р, то використовують нерівність: $n\geq\dfrac{\ln(1-\text{P})}{\ln(1-p)}$. (2.6.)

2.4. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може статися з однією з подій (їх називають ***гіпотезами***) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу несумісних подій.

Необхідно знайти ймовірність події A. За умовою подію A можна записати у вигляді

$$A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \ldots + A \cdot B_n .$$

Події $A \cdot B_1$, $A \cdot B_2$, ..., $A \cdot B_n$ несумісні. Тому:

$$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + \ldots + P(A \cdot B_n).$$

За теоремою добутків ймовірностей для залежних подій (2.3) маємо:

$$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) P_{B_n}(A),$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A). \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) називається ***формулою повної*** ймовірності.

2.5. Формула Байєса

Нехай події $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (гіпотези) утворюють повну групу несумісних подій. Подія A може статися з однієї з цих гіпотез. В результаті випробування подія A відбулася. Потрібно визначити ймовірність того, що вона відбулася з гіпотезою B_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$.

Якщо подія A відбулася, то за умовою сталося і деяка подія $A \cdot B_i$. Обчислимо ймовірність події $A \cdot B_i$ за теоремою добутка ймовірностей для залежних подій:

$$P(A) = P(A) P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

Звідки маємо ***формулу Байєса***:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \qquad (2.8)$$

де $P(A)$ – це повна ймовірність події A (2.7).

Формула Байєса дозволяє оцінити відносний внесок кожного елемента формули повної ймовірності. Недоліком формули Байєса і формули повної ймовірності є те, що треба знати апріорні (до випробування) ймовірності гіпотез, які не завжди відомі. Ймовірності $P_A(B_i)$ – це *апостеріорні* (після випробування) ймовірності гіпотез.

Питання для самодіагностики

1. Сформулювати теореми додавання ймовірностей. Привести приклади їх реалізації.
2. Сформулювати теореми множення ймовірностей.
3. Навести формулу повної ймовірності та формулу Байєса.

Тема 3. Схема незалежних випробувань

3.1. Повторні незалежні випробування. Схема Бернуллі

Випробування називаються ***однорідними незалежними***, якщо вони відбуваються незалежно один від одного, в однакових умовах і так, що ймовірність появи події в усіх випробуваннях однакова.

Нехай відбуваються n однорідних незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися або не відбутися певна подія A (таку серію повторних незалежних випробувань називають ***схемою Бернуллі***). Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p $(q=1-p)$. Тоді ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A відбудеться рівно m раз, обчислюється за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m q^{n-m}. \qquad (3.1)$$

Число m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається ***найімовірнішим***, якщо ймовірність появи події m_0 раз найбільша. Найімовірніше число m_0 появи події A в n випробуваннях, в кожному з яких вона може статися з ймовірністю p (і не статися з ймовірністю $q=1-p$), визначається нерівністю:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p, \qquad (3.2)$$

де m_0 – ціле число.

3.2. Локальна теорема Муавра - Лапласа

Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань постійна, а число випробувань досить велике ($npq \geq 20$), то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться m раз, обчислюється за формулою ***Муавра - Лапласа***:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (3.3)$$

де $$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \qquad (3.4)$$

$\varphi(x)$ *– диференціальна функція Лапласа*; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Таблицю значень функції $\varphi(x)$ можна знайти в додатку А. Відзначимо лише, що в таблиці наведені значення $\varphi(x)$ для додатних значень x, оскільки $\varphi(x)$ – парна функція, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для значень $|x| > 4$ слід вважати, що $\varphi(x) \approx 0$.

3.3. Формула Пуассона

Якщо в кожному випробуванні ймовірність p появи події A постійна й досить мала, а число випробувань n досить велике, то ймовірність того, що подія A відбудеться m раз, приблизно дорівнює:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (3.5)$$

де $\lambda = np$, $np \leq 10$.

Для спрощення розрахунків за формулою (3.5) можна використовувати таблицю значень функції Пуассона, яка наведена в додатку Б.

3.4. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Якщо ймовірність p появи події в кожному випробуванні стала, а число випробувань n досить велике, то ймовірність того, що подія A відбудеться не менш m_1 й не більше m_2 раз $(m_1 < m_2)$,наближено дорівнює:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3.6}$$

де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3.7}$$

У формулі (3.6) функція $\Phi(x)$ – це *інтегральна функція Лапласа*, яка визначається рівністю: $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Значення функції $\Phi(x)$ наведено в додатку В, де можна знайти значення цієї функції лише для $0 \le x \le 4$. Для $x < 0$ використовують ту саму таблицю, так як функція $\Phi(x)$ є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для $x > 4$ можна вважати $\Phi(x) = 0{,}5$.

3.7. Ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях

Відомо, що відношення числа випробувань, в яких подія A з'явилося, до загальної кількості фактично проведених випробувань називають *відносною частотою події* $w(A) = \frac{m}{n}$, де m – число появ події A, n – загальне число випробувань.

Різниця між ймовірністю і відносної частотою полягає в тому, що перша обчислюється до випробування, а друга - після нього.

Теорема. Нехай в n незалежних випробуваннях ймовірність події A постійна і дорівнює p $(0 \le p \le 1)$.

Тоді ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти від своєї ймовірності менше ніж ε, дорівнює $2\Phi(x)$, де x визначається формулою $\varepsilon = x\sqrt{\frac{pq}{n}}$, $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi(x). \quad (3.10)$$

Питання для самодіагностики

1. Які випробування називаються однорідними незалежними?
2. Навести формулу Бернуллі.
3. Навести формулу Пуассона.
4. Сформулювати локальну теорему Муавра - Лапласа.
5. Сформулювати інтегральну теорему Муавра - Лапласа.
6. Як використовується інтегральна теорема Муавра - Лапласа для обчислення ймовірності потрапляння випадкової події в заданий інтервал?
7. Як обчислюється ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності випадкової події?

Тема 4. Випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

4.1. Визначення випадкових величин і їх класифікація

Випадковою величиною називається функція, яка ставить у відповідність кожному елементарному результату число. При цьому безліч елементарних результатів належить алгебрі подій.

Випадкова величина - це змінна величина, значення якої залежать від ряду випадкових факторів, причому в результаті випробувань вона може приймати випадкові, заздалегідь невідомі значення. Той факт, що випадкова величина приймає певне значення, називається ***випадковою подією.*** Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z та ін., а їх можливі значення - відповідними маленькими буквами. Наприклад, X – випадкова величина, її можливі значення – x_1, x_2, ... , x_n.

Розрізняють дискретні і неперервні випадкові величини. Випадкова величина називається ***дискретною***, якщо в результаті випробування вона може приймати конкретні, цілком певні ізольовані значення, їх може бути скінченне або нескінченне число. Наприклад, розмір взуття є дискретною випадковою величиною. Випадкова величина називається ***неперервною***, якщо в результаті випробувань вона може приймати будь-які значення, що належать деякому інтервалу $X \in [a, b]$. Наприклад, зріст людей є неперервною випадковою величиною.

4.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Для того щоб повністю охарактеризувати випадкову величину, необхідно знати її значення та ймовірності появи цих значень. Якщо відомі можливі значення дискретних випадкових величин та ймовірності їх появи, то кажуть, що задан ***закон розподілу*** цих випадкових величин, або ***ряд розподілу***.

Ряд розподілу дискретної випадкової величини записують у вигляді *таблиці*:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

, та $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

4.3. Числові характеристики дискретних випадкових величин і їх властивості

Характеристикою середнього значення випадкової величини є математичне очікування. ***Математичне сподівання*** дискретної випадкової величини обчислюється як сума добутків можливих значень випадкової величини на їх ймовірності p_i.

Нехай задан ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	...	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	...	p_n

Позначимо математичне сподівання випадкової величини $M(X)$, тоді:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (4.1)$$

Математичне сподівання часто називають центром розподілу, так як воно характеризує середнє значення випадкової величини.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює цій сталій: $M(C) = C$, где $C = const$.

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Наслідок 1. Математичне сподівання різниці випадкових величин дорівнює різниці їх математичних сподівань:

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y).$$

Наслідок 2. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулеві: $M(X - M(X)) = 0$.

4. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Характеристикою ступеня розсіювання значень випадкової величини близько її математичного сподівання є ***дисперсія***.

Дисперсією $D(X)$ дискретної випадкової величини є матема-тичні сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i . \qquad (4.2)$$

Перетворимо формулу (4.2) для обчислення дисперсії:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(M(X))^2. \quad (4.3)$$

Дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню її квадрата мінус квадрат її математичного сподівання.

Властивості дисперсії

1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю: $D(C)=0$, де $C=const$.

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії в квадраті: $D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X)$.

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

4. Дисперсія різниці двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Середнє квадратичне відхилення є мірою розсіювання значень випадкової величини навколо її середнього значення.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ (σ_x) випадкової величини X – це квадратний корінь з дисперсії, тобто:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (4.4)$$

Коефіцієнт варіації - це відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання, що виражається у відсотках:

$$\nu(X)=\frac{\sigma(X)}{M(X)}\cdot 100\,\%. \quad (4.5)$$

Коефіцієнт варіації дає можливість порівняти ступінь розсіювання значень різних за своєю природою випадкових величин.

Початковий момент k-го порядку ν_k – це математичне сподівання k-го ступеня випадкової величини X:

$$\nu_k=M\left(X^k\right). \quad (4.6)$$

Центральний момент k-го порядка μ_k – це математичне сподівання k-го ступеня відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання:

$$\mu_k = M\left(\left(X - M(X)\right)^k\right). \tag{4.7}$$

Питання для самодіагностики

1. Що називається випадковою величиною і як їх класифікують?
2. Охарактеризувати основні числові характеристики дискретної випадкової величини.
3. Що називається початковим і центральним теоретичними моментами?

Тема 5. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Задати закон розподілу випадкової величини означає задати її ряд розподілу, тобто вказати можливі значення випадкової величини і їх ймовірності.

5.1. Біноміальний розподіл

Нехай маємо n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p. Позначаємо через X число випробувань, в яких подія A відбулось. Випадкова величина X може приймати значення $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення $X = m$, можна обчислити за формулою Бернуллі (3.1), тобто:

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{5.1}$$

де $q = 1 - p$.

Закон розподілу, в якому ймовірність випадкової величини обчислюється за формулою Бернуллі, називається ***біноміальним законом розподілу***.

Даний закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	$\ldots$	$n-1$	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	p^n

Якщо n – велике число, то ймовірності p_i обчислюються за формулою Муавра – Лапласа (3.3):

$$P_n(X = m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Знайдемо *числові характеристики біноміального закону розподілу*. Випадкову величину X можна розглядати як суму n незалежних однаково розподілених випадкових величин X_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ рядом розподілу:

x_i	0	1
p_i	q	p

де x_i – поява події A в i-м експерименті, тобто $x_i = 1$, якщо подія A відбулась, та $x_i = 0$, якщо подія A не відбулась.

Тоді $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Оскільки математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань, то:

$$\boldsymbol{M(X)} = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = \boldsymbol{np}. \tag{5.2}$$

Дисперсія випадкової величини X_i дорівнює:

$$D(X_i) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = p^2 q + pq^2 = pq(p + q) = pq.$$

Оскільки дисперсія суми випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій, то:

$$\boldsymbol{D(X)} = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = \boldsymbol{npq}. \tag{5.3}$$

Середнє квадратичне відхилення біноміального розподілу визначається формулою:

$$\boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{\boldsymbol{npq}}. \tag{5.4}$$

5.2. Закон розподілу Пуассона

Якщо n досить велике, а ймовірність p дуже мала, то ймовірність того, що випадкова величина прийме значення $X = m$, обчислюють за формулою Пуассона (3.5):

$$P_n\left(X = m\right) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (5.5)$$

Закон розподілу в цьому випадку називають ***законом розподілу Пуассона***.

Даний закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	…	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

, де $\lambda = np$.

Визначимо *числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона*.

Оскільки закон Пуассона є граничним для біноміального закону при досить великих n $\left(n \to \infty\right)$ й достатньо малих p $\left(q \to 1\right)$, то математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, визначаються за формулами:

$$\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{X}\right) = np = \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{X}\right) = npq \approx np = \boldsymbol{\lambda}. \qquad (5.6)$$

Питання для самодіагностики

1. Описати біноміальний розподіл випадкової величини.
2. Описати закон розподілу Пуассона.

Тема 6. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Неперервна випадкова величина характеризується двома функціями:

1) функцією розподілу ймовірностей $F\left(x\right)$ (інтегральною функцією розподілу);

2) щільністю розподілу ймовірностей $f\left(x\right)$ (диференціальна функція розподілу).

Випадкова величина називається також неперервної, якщо її функція розподілу неперервна і диференційовна.

6.1. Функція розподілу ймовірностей і її властивості

Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ – це ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування прийме значення менше x:

$$F(x) = P(X < x). \qquad (6.1)$$

Властивості функції розподілу:

1. Значення функції $F(x)$ належать відрізку $[0,1]$ (за означенням):

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Інтегральна функція є неспадною функцією:

$$F(x + \Delta x) \ge F(x), \text{ якщо } \Delta x > 0.$$

3. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий інтервал (α, β) дорівнює різниці функцій $F(x)$ на кінцях інтервала:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (6.2)$$

4. Ймовірність влучення випадкової величини в точку дорівнює нулю: $P(X = C) = 0$.

Наслідок.

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta).$$

5. Якщо значення випадкової величини X належать інтервалу (a,b), то при $x \le a$ $F(x) = 0$, при $x > b$ $F(x) = 1$.

6.2. Щільність розподілу ймовірностей і її властивості

Диференціальна функція розподілу ймовірностей (щільність розподілу ймовірностей) $f(x)$ є похідна від інтегральної функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (6.3)$$

Випадкова величина X називається ***абсолютно неперервною***, якщо існує така функція $f(x)$ (щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X), для якої:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Таким чином, пошук *інтегральної функції*, якщо задана диференціальна, пов'язаний з розв’язанням оберненої задачі:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (6.4)$$

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу $[a,b]$:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (6.5)$$

Властивості диференціальної функції розподілу $f(x)$:

1. Функція $f(x)$ невід’ємна: $f(x) \geq 0$.

2. Якщо $X \in (-\infty, \infty)$, то: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. (6.6)

3. Якщо $X \in (a,b)$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

6.4. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, обчислюється як визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx. \qquad (6.7)$$

Аналогічно, якщо $X \in (-\infty, \infty)$, то $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Дисперсія неперервної випадкової величини X обчислюється як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання.

Якщо $X \in (-\infty, \infty)$, то:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx, \tag{6.8}$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2. \tag{6.9}$$

Властивості математичного сподівання і дисперсії дискретних величин зберігаються і для неперервних величин.

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини X:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{6.10}$$

Моменти неперервної випадкової величини:

а) ***початковий*** момент k-го порядка:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx; \tag{6.11}$$

б) ***центральний*** момент k-го порядка:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^k f(x)dx. \tag{6.12}$$

6.5. Рівномірний закон розподілу ймовірностей і його числові характеристики

Рівномірним розподілом ймовірностей неперервної випадкової величини називають такий розподіл, при якому диференціальна функція є постійною величиною на інтервалі $[a, b]$, а поза межами цього інтервала дорівнює нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{6.13}$$

$F(x)$ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \qquad (6.14)$$

Графіки диференціальної функції $f(x)$ і інтегральної функції $F(x)$ рівномірного розподілу ймовірностей наведені на рис. 6.1.

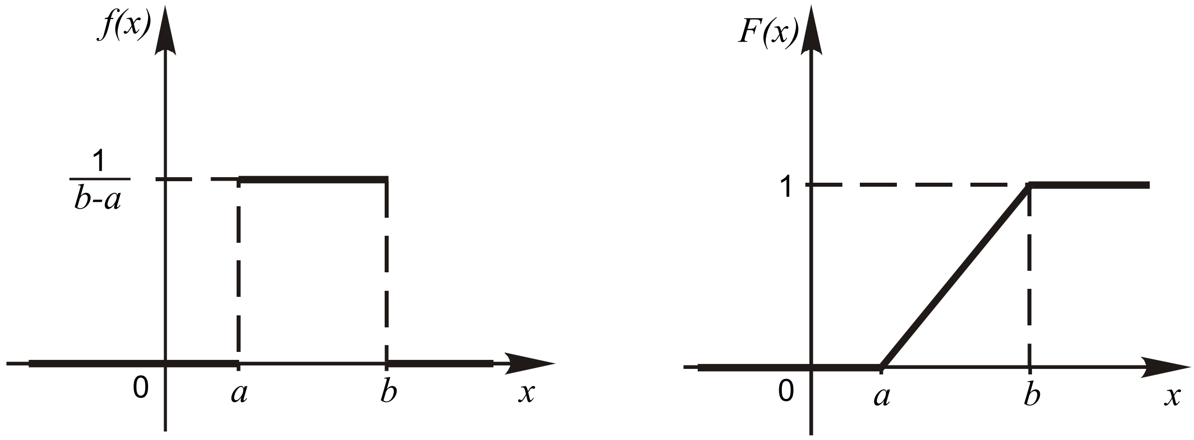


Рис. 6.1. **Графіки диференціальної і інтегральної функцій рівномірного розподілу ймовірностей**

Ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $(\alpha,\beta)\in[a,b]$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{\beta})=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-a}{b-a}-\frac{\alpha-a}{b-a}=\frac{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}. \qquad (6.15)$$

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}}. \qquad (6.16)$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}{\mathbf{12}}. \quad (6.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})=\sqrt{D(X)}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}. \quad (6.18)$$

6.6. Показниковий закон розподілу ймовірностей

Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, якщо щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\end{cases} \quad \text{з параметром } \lambda>0. \quad (6.19)$$

Інтегральна функція показникового розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases} \quad (6.20)$$

Графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ дивись на рис. 6.2.

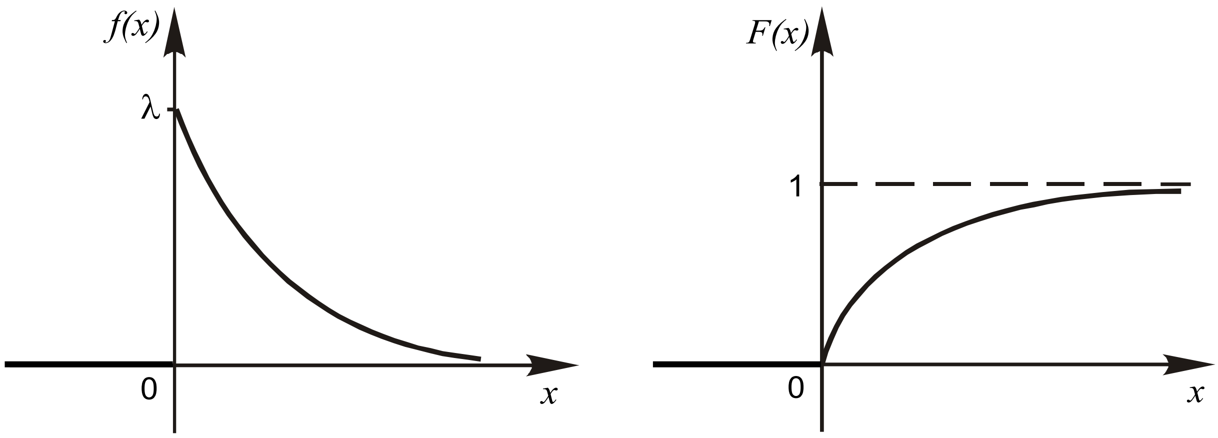


Рис. 6.2. **Графіки диференціальної та інтегральної функцій показникового розподілу ймовірностей**

Ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (α,β) визначається формулою:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{\beta})=F(\beta)-F(\alpha)=\left(1-e^{-\lambda\beta}\right)-\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\lambda\alpha}}-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\lambda\beta}}. \quad (6.21)$$

Числові характеристики показникового закону розподілу ймовірностей:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})=\int\limits_a^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b x\cdot e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|= \tag{6.22}$$

$$=\lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(0-e^{-\lambda b}\right)-\frac{1}{\lambda}\lim_{b\to\infty}e^{-\lambda x}\Big|_0^b=0+\frac{1}{\lambda}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

.

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\int\limits_0^{\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-(M(X))^2=\lambda\int\limits_0^{\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|==\lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{2}{\lambda}\int\limits_0^b x\cdot e^{-\lambda x}dx\right)-\frac{1}{\lambda^2}= \tag{6.23}$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}}.$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})=\sqrt{D(X)}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{6.24}$$

6.7. Нормальний закон розподілу ймовірностей і його стандартний вигляд

Випадкова величина X розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу ймовірностей при $x\in(-\infty;\infty)$ визначається формулою:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{6.25}$$

де σ, a – параметри розподілу.

Визначимо інтегральну функцію розподілу $F(x)$ для нормального закону:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробимо заміну $t = \frac{x-a}{\sigma}$; $dx = \sigma\, dt$,

тоді: $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right). \qquad (6.26)$$

Якщо ввести центрированную і нормовану величину $t = \frac{x-a}{\sigma}$, таку, що $a = 0$, $\sigma = 1$, то

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t}), \qquad (6.27)$$

де $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ – диференціальна і інтегральна функції Лапласа:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Графіки диференціальної $f(x)$ й інтегральної $F(x)$ функцій нормального розподілу на рис.6.3.

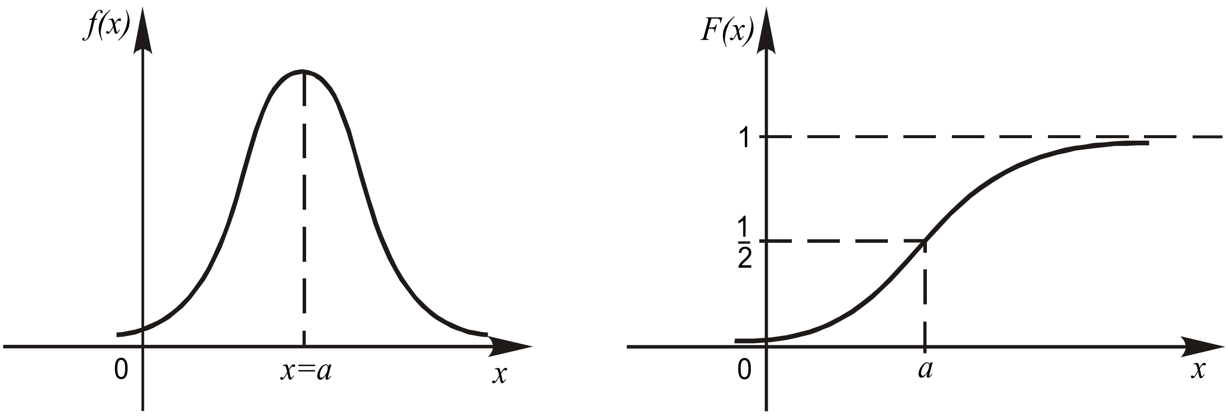


Рис. 6.3. **Графіки диференціальної й інтегральної функцій нормального розподілу ймовірностей**

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \boldsymbol{a}.$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}} dt & v = \int e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{t e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\text{інтеграл Пуассона}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \boldsymbol{\sigma^2}.$$

Тобто:

$$\boldsymbol{a = M(X), \quad \sigma = \sqrt{D(X)}}. \tag{6.28}$$

Для нормального розподілу крива розподілу – функція $f(x)$ – досягає максимуму при $x = a$ та симетрична щодо лінії $x = a$.

Ймовірність потрапляння випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом з параметрами a и σ, в (α, β):

$$\boldsymbol{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)}. \tag{6.29}$$

Знайдемо *ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання по модулю на величину, що не перевищує* ε ($\varepsilon > 0$), тобто:

$$\boldsymbol{P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}. \tag{6.30}$$

Правило трьох сигм

Перетворимо формулу (6.30).

Нехай $\varepsilon = \sigma \cdot t$, тоді $P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$.

Якщо $t = 1$, то $\varepsilon = \sigma$, тоді: $P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$.

Це означає, що 68 % значень випадкової величини знаходяться на проміжку $(a \pm \sigma)$.

Якщо $t = 2$, то $\varepsilon = 2\sigma$, тоді: $P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9544$.

Це означає, що 95 % значень випадкової величини знаходяться на проміжку $(a \pm 2\sigma)$.

Якщо $t = 3 \Rightarrow \varepsilon = 3\sigma$, то:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Звідси *правило трьох сигм*: нормально розподілена випадкова величина X принимає всі свої значення на проміжку $(a \pm 3\sigma)$ з достовірністю $100\,\%$. Тобто з 10 000 значень нормально розподіленої випадкової величини лише 27 вийдуть за межі інтервалу $(a \pm 3\sigma)$.

Під час вивчення розподілів, які відрізняються від нормального, виникає необхідність оцінити цю відмінність. З цією метою вводять такі характеристики, як асиметрія і ексцес. Для нормального розподілу асиметрія і ексцес дорівнюють нулю. Великі значення асиметрії та ексцесу вказують на значне відхилення від нормального розподілу, при малих значеннях асиметрії і ексцесу можна допустити близькість цього розподілу до нормального.

Асиметрією розподілу називають величину:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{6.31}$$

де μ_3 – центральний момент третього порядку;

σ – середнє квадратичне відхилення.

Асиметрія характеризує відхилення кривої розподілу $f(x)$ від центра симетрії нормального розподілу $x = a$, тобто моди. Якщо $A_S > 0$, то максимум функції $f(x)$ відходить вліво; якщо $A_S < 0$ – вправо, при цьому значення максимуму зберігається (рис. 6.4).

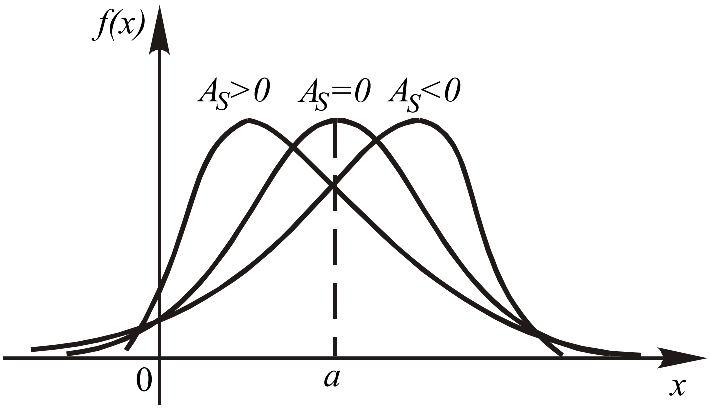


Рис. 6.4. **Асиметрія розподілу**

Ексцесом розподілу називають величину:

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \tag{6.32}$$

де μ_4 – центральний момент четвертого порядку.

Эксцес розподілу характеризує зміщення максимуму кривої розподілу уздовж осі симетрії $x = a$ (рис. 6.5).

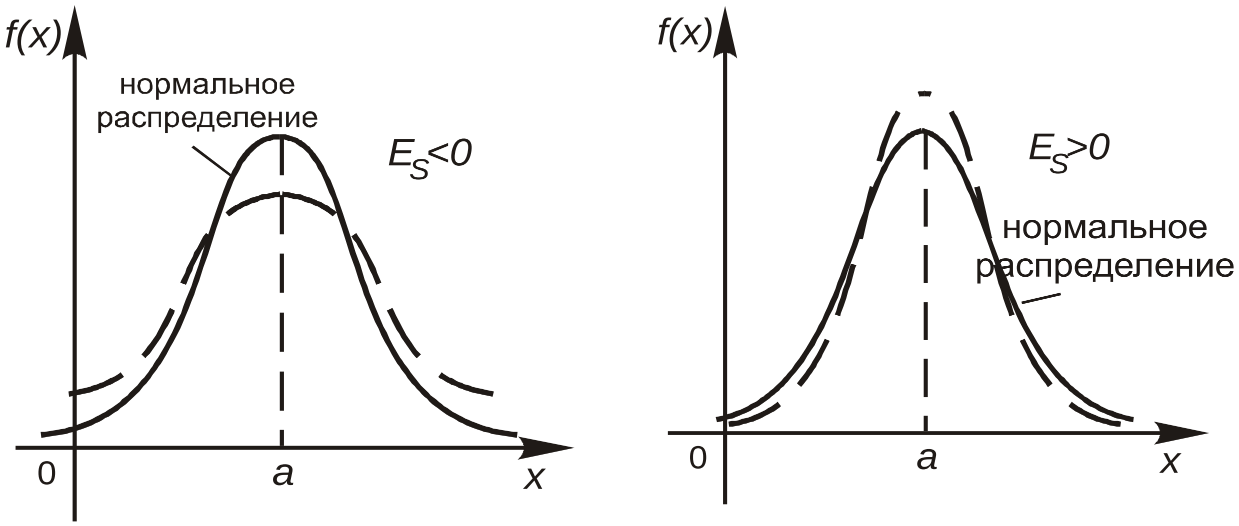


Рис. 6.5. **Эксцес розподілу**

З ймовірністю P *можна стверджувати, що довірчий інтервал* $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ *покриває невідомий параметр* a *з надійністю* $P = 2\Phi(t)$ *і точністю оцінки* $\varepsilon = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{6.33}$$

Оцінку $|\,X-a\,|<t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ називають ***класичною***.

Питання для самодіагностики

1. Привести визначення неперервної випадкової величини. Що називається функцією розподілу і які її властивості?

2. Що називається щільністю розподілу ймовірностей і які її властивості?

3. Охарактеризувати числові характеристики випадкової величини.

5. Описати рівномірний закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини та його числові характеристики.

6. Описати показовий закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини та його числові характеристики.

7. Описати нормальний закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.

8. Як обчислюється ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал?

9. У чому полягає правило трьох сигм?

Тема 7. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження і вибіркові оцінки

7.1. Вибірковий метод та його основні положення

Першим завданням математичної статистики є обгрунтування методів збору і угруповання статистичних даних, які отримані в результаті експериментів або спостережень. *Друге завдання* - це розробка методів аналізу статистичних даних: оцінки невідомих ймовірностей події, а також функції та параметрів розподілу; оцінка залежності випадкової величини від інших випадкових величин; перевірка статистичних гіпотез про вид і величини параметрів невідомого розподілу.

Безліч об'єктів, з яких витягується вибірка, в статистиці називається сукупністю. Вся сукупність, яка вивчається, називається ***генеральною сукупністю***. Частина об'єктів, яку вибирають з генеральної сукупності, називається ***вибіркою***, *або* ***вибіркової сукупністю***.

Загальна кількість об'єктів генеральної сукупності або вибіркової сукупності називається їх обсягом. Обсяг генеральної сукупності позначають N, а обсяг вибіркової сукупності – n.

Вибірка називається ***випадковою***, якщо з генеральної сукупності елементи беруться навмання і кожен з них може потрапити в неї з однаковою ймовірністю. Якщо випадкова вибірка досить повно характеризує генеральну сукупність, то вибірка називається ***репрезентативною***.

7.2. Вибірковий розподіл

Якщо записати вибірку у вигляді зростаючої чи спадаючої послідовностей, то отримаємо дискретний варіаційний ряд. Деякі значення дискретної випадкової величини можуть повторюватися, тоді ***варіаційний ряд*** записують у вигляді таблиці, де вказують ***варіанти*** - можливі значення (x_i) випадкової величини X та їх частоти (m_i). ***Частотою*** називають число появи окремих значень випадкової величини (варіант).

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_l
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_l

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = n.$$

Замість частот можна вказувати відносні частоти.

Відносної частотою w_i називається відношення частоти появи ознаки до загального обсягу вибірки:

$$w_i = \frac{m_i}{n}, \qquad \sum_{i=1}^{l} w_i = 1. \tag{7.1}$$

Відносна частота характеризує, яку частину сукупності складають члени з однаковими значеннями ознаки.

При великому обсязі вибірки $(n \geq 30)$ складають ***інтервальний варіаційний ряд***. Для його побудови весь інтервал розподілу ознаки поділяють на k равних частин довжиною h. Потім підраховують частоту m_i або відносну частоту w_i влучень в кожен інтервал.

Під значенням випадкової величини вважають середину інтервалу, тобто неперервну величину приводять до дискретної.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант випадкової величини X $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ і відповідних їм частот або відносних частот w_i $(i = \overline{1,l})$.

Для інтервальних рядів статистичний розподіл задається в вигляді послідовності інтервалів $(x_{i-1};\ x_i)$ і відповідних їм частот (за частоту приймають суму частот ознаки, які увійшли в цей інтервал).

Числові характеристики вибірки

Нехай заданий варіаційний ряд:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k

Для характеристики варіаційного ряду використовують такі величини:

1. *Вибіркове середнє* $\bar{x}$: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}$, $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$. (7.2)

Вибіркове середнє характеризує середнє значення ознаки X.

2. *Вибіркова дисперсія* D:

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i$$

або (7.3)

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Дисперсія в статистиці характеризує міру розсіювання ознаки X.

3. *Вибіркове середньоквадратичне відхилення* σ:

$$\sigma = \sqrt{D}. \tag{7.4}$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення є не лише мірою варіації, а й показником однорідності статистичної сукупності.

Оскільки $M\left(\bar{x}\right) = \bar{x}$, то выбіркове среднє $\bar{x}$ є незсуненою оцінкою.

Вибіркова дисперсія D є зміщеною оцінкою.

Досить легко виправити вибіркову дисперсію:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i}{n-1}, \tag{7.5}$$

де S^2 – виправлена вибіркова дисперсія.

4. *Коефіцієнт варіації*: $\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\,\%$. (7.6)

Коефіцієнт варіації є відносною мірою зміни ознаки. Його використовують для порівняння випадкових подій, різних за своєю природою.

5. *Початкові моменти* s*-го порядку*: $\nu_s = \overline{X^s} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^s m_i}{n}$. (7.7)

6. *Центральні моменти* s*-го порядку*:

$$\mu_k = \overline{\left(X - \overline{X}\right)^s} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}\right)^s m_i}{n}. \qquad (7.8)$$

7. *Асиметрія*: $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$. (7.9)

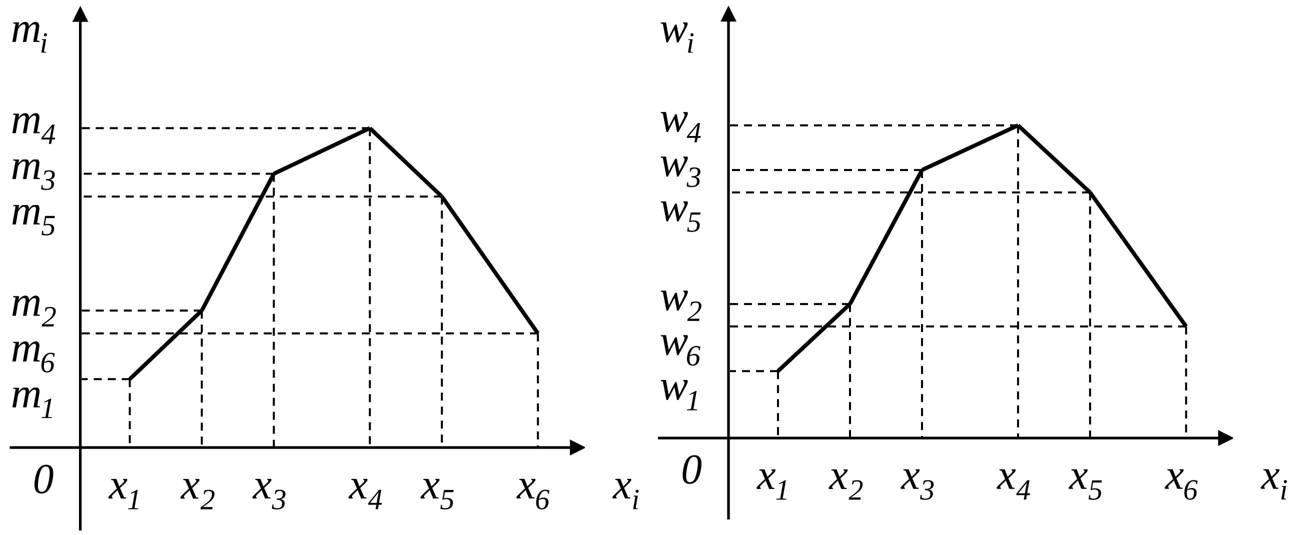
A_S характеризує відхилення випадкової величини від свого центрального положення вліво чи вправо.

8. *Ексцес*: $E_S = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. (7.10)

E_S характеризує відхилення випадкової величини від свого центрального положення вгору або вниз.

7.3. Емпірична функція розподілу і гістограма

Статистичний ряд розподілу випадкової величини X, отриманий за емпіричними даними, називають також ***емпіричним законом розподілу***. Такий ряд можна зобразити графічно. Для цього на вісі абсцис наносять варіанти x_i, а на вісі ординат - частоти m_i (рис. 7.1) (або відносні частоти w_i), тобто маємо точки $M_i\left(x_i, m_i\right)$ ($N_i\left(x_i, w_i\right)$). Поєднуючи точки M_i (або N_i) відповідних варіант і частот, отримаємо ламану лінію, яку називають ***полігоном*** розподілу. ***Емпіричною функцією розподілу*** вибірки називається функція $F^*(x)$, яка для будь-якого значення x визначає відносну частоту події, що задовільняє умові $X < x$, тобто випадкова величина прийме значення менше, ніж x: $F^*(x) = \dfrac{m_x}{n}$, де m_x – сума частот варіант для значень аргумента, що меньші, ніж x; n – обсяг вибірки.



а) **полігон частот**

б) **полігон відносних частот**

Рис. 7.1. **Полігони розподілу**

Графіком емпіричної функції розподілу є ***кумулята***, або графік накопичених відносних частот. Цей графік - ступінчаста фігура, яка має точки розриву при значеннях абсцис, рівних числовим значенням, які приймає випадкова величина.

Для генеральної сукупності функцію розподілу позначимо $F(x)$. Відмінність між емпіричною та теоретичною функціями полягає в тому, що теоретична функція $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а емпірична функція $F^*(x)$ – відносну частоту цієї події.

Функція $F^*(x)$ має такі ж властивості, що і функція $F(x)$:

1) значення емпіричної функції належить відрізку $[0; 1]$;

2) $F^*(x)$ – неспадна функція: $F^*(x_2) \geq F^*(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

3) якщо x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$, якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

У разі інтервальних варіаційних рядів, отриманих для неперервної випадкової величини, графічним зображенням є ***гістограма***. Розрізняють гістограму частот і гістограму відносних частот.

Для побудови гістограми частот на вісі абсцис відкладають інтервали, а над ними проводять відрізки, які паралельні осі абсцис на відстані $\frac{m_i}{h}$. Площа i-го прямокутника дорівнює $\frac{m_i}{h} \cdot h = m_i$ – сума частот варіант i-го інтервалу. Таким чином, площа гістограми дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки.

Для побудови гістограм відносних частот на осі абсцис відкладають інтервали, а над ними проводять відрізки, які паралельні осі абсцис на відстані $\frac{w_i}{h}$ від неї. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

7.4. Інтервальне оцінювання параметрів вибірки

Оцінка називається ***точковою***, якщо вона задається одним числом. До неї відносяться характеристики вибіркової сукупності, які є точковими оцінками відповідних характеристик генеральної сукупності. При малому обсязі вибірки точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, тобто приводити до помилок. Тому слід використовувати інтервальну оцінку, коли досліджуваний параметр покривають довірчим інтервалом.

Довірчим інтервалом називається інтервал, який покриває всі значення випадкової величини із заданою надійністю або з заданим рівнем значущості.

Довірчий інтервал для середнього генеральної сукупності з надійністю $P = 2\Phi(t)$:

$$\bar{x} - \frac{\sigma_{\text{в}} t}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x} + \frac{\sigma_{\text{в}} t}{\sqrt{n}}. \tag{7.11}$$

Якщо $n > 30$ параметр t знаходять в таблиці функції $\Phi(t)$ (див. додаток В), якщо $n \le 30$ параметр $t = t(\gamma, n)$ – табл. Е.1 з додатку Е (при цьому замість $\sigma_{\text{в}}$ треба ставити виправлене середнє квадратичне відхилення $\sqrt{S_x^2}$).

З надійністю $P = 2\Phi(t)$ та точністю ε можна знайти необхідний обсяг вибірки: $n = \frac{\sigma^2_{\text{в}} t^2}{\varepsilon^2}$.

Довірчий інтервал для генерального середньоквадратичного відхилення з надійністю $P = \gamma$:

$$s(1-q) \le \sigma_{\text{ген.}} \le s(1+q), \text{ де } q = \frac{\varepsilon}{s}. \tag{7.12}$$

Значення величини $q = q(\gamma, n)$, яка залежить від заданої надійності й обсягу вибірки, знаходять в спеціальній таблиці Е.2 (додаток Е).

Питання для самодіагностики

1. Які основні завдання та цілі математичної статистики?
2. Як визначаються генеральна та вибіркова сукупності? Яким вимогам повинна відповідати вибіркова сукупність?
3. Описати основні числові характеристики закону розподілу.
4. Що називається емпіричною функцією розподілу? Які її основні властивості?
5. Як геометрично зобразити емпіричний розподіл?
6. Що називають статистичними оцінками? Які вимоги до статистичних оцінок?
7. Чим відрізняються точкові та інтервальні статистичні оцінки? Як знайти довірчий інтервал для генерального середнього і генерального середньоквадратичного відхилення випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом?

Тема 8. Методи перевірки статистичних гіпотез

8.1. Загальні поняття про перевірку гіпотез.

При використанні методів математичної статистики можна допустити певний відсоток помилок, оскільки ми спираємося на випадкові величини та знаходимся в умовах невизначеності. Частка помилкових розв'язків, якою можна знехтувати, називається ***рівнем значущості*** (α). Найчастіше вона становить 5% або 1%, тобто $\alpha = 0{,}05$ або $\alpha = 0{,}01$.

При порівнянні декількох статистичних характеристик, які обчислені за результатами вибірок, виникає потреба встановити, істотна між ними різниця чи ні. *Суттєвою* називають різницю, яка за величиною перевищує ту, яку можна було б пояснити випадковими коливаннями.

Нехай X – неперервна або дискретна випадкова величина.

Твердження про відсутність суттєвої різниці між її емпіричною та теоретичною характеристиками називається ***початковою (нульова) гіпотезою*** (H_0). Вводять ***альтернативну гіпотезу*** (H_1) – протилежну нульовій гіпотезі. Правило, за яким перевіряють нульову гіпотезу (прийняти її або відхилити), називається ***критерієм згоди***. Безліч значень X, для яких нульова гіпотеза відхиляється, називається ***критичною областю***.

8.2. Потужність критерія

Правило, за яким приймається рішення прийняти або відхилити нульову гіпотезу H_0, називається ***статистичним критерієм***. Перевірку виконання умов статистичних критеріїв роблять на основі результатів вибірки. Тобто статистичний критерій встановлює, при яких результатах випадкової вибірки висунута гіпотеза приймається, а при яких - відхиляється.

Значення параметра, при яких гіпотеза H_0 відхиляється, утворюють критичну область. Задача перевірки гіпотези зводиться до знаходження критичної області при заданому рівні значущості. Ймовірність недопущення помилки другого роду називають ***потужністю критерію***.

Перевірка статистичної гіпотези передбачає послідовне виконання таких етапів:

1. Оцінка вихідної інформації та опис статистичної моделі вибіркової сукупності.
2. Формулювання нульової та альтернативної гіпотез.
3. Визначення рівня значущості, за допомогою якого контролюється помилка першого роду.
4. Вибір найбільш потужного критерію для перевірки нульової гіпотези.
5. Розрахунок фактичного (емпіричного) значення статистики критерію.
6. Визначення критичної області та області згоди з початковою (нульовою) гіпотезою, тобто визначення табличного (критичного) значення критерія.

7. Порівняння фактичного і табличного значень критерію і формулювання висновків за результатами перевірки нульової гіпотези.

8.3. Критерій Стьюдента щодо перевірки гіпотези про суттєвості відмінності двох вибіркових середніх.

Нехай маємо дві вибірки з генеральної сукупності. Потрібно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу, яка полягає в тому, що відмінність середніх незначуще, тобто нульова гіпотеза $H_0 : \overline{X}_1 = \overline{X}_2$ – вибірки належать одній генеральній сукупності. Позначимо випадкову величину по першій вибірці X_1, обсяг вибірки – n_1, по другій вибірці – X_2, обсяг якої – n_2.

Обчислюється статистика:

$$t = \frac{\left|\overline{X_1} - \overline{X_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{8.1}$$

Якщо $t < t_{кр\alpha}$, то з рівнем значущості α гіпотеза H_0 приймається, якщо $t > t_{кр\alpha}$, то гипотеза H_0 отклоняется с надежностью $P = 1 - \alpha$.

Якщо $t < 1{,}96$, то з рівнем значущості $0{,}05$ гіпотеза H_0 приймається, тобто відмінність середніх незначуще, вибірки належать одній генеральній сукупності;

якщо $t > 2{,}58$, то з надійністю $99\,\%$ гіпотеза H_0 відхиляється, тобто вибірки належать різним генеральним сукупностям;

область $1{,}96 < t < 2{,}58$ вважається областю невизначеності.

Якщо n_1 и n_2 малі, то $t_{кр\alpha}$ знаходять за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (см. додаток Ж).

8.4. Критерій згоди χ^2 («хі-квадрат») відносно закону розподілу

Часто закон розподілу випадкової величини в генеральній сукупності є невідомим, але певні припущення відносно його характеру можна зробити, судячи з гістограми в вибірковій сукупності. У цьому випадку перевіряють нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена по передбачуваному закону.

Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези відносно передбачуваного невідомого закону розподілу.

Критерій згоди Пірсона

Згідно з цим критерієм спостерігається емпіричний розподіл вибіркової сукупності, яке виражене емпіричними частотами m_i сгруппированного ряду, порівнюється з передбачуваним теоретичним розподілом генеральної сукупності, яке виражене теоретичними частотами $\tilde{m}_i$.

Якщо число спостережень дуже велике $(n \to \infty)$, то закон розподілу випадкової величини незалежно від того, яким законом розподілу підпорядкована генеральна сукупність, наближається до розподілу χ^2 з k ступенями свободи, а сам критерій називають критерієм згоди «*хі-квадрат*», або *критерієм Пірсона*.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 треба обчислити величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}, \qquad (8.2)$$

де s – кількість інтервалів сгрупованого ряду розподілу;

m_i – емпіричні частоти;

$\tilde{m}_i$ – теоретичні частоти.

Прийнято вважати, що спостережень m_i в кожному інтервалі має бути не менше п'яти відсотків від загального числа спостережень: $m_i \geq 0{,}05n$. Якщо їх буде менше, то необхідно укрупнити інтервали.

Знайдена за формулою (8.2) величина порівнюється з критичними значеннями $\chi^2_\alpha(k)$, які знаходяться в спеціальних довідкових таблицях (див. додаток Д).

Число ступенів свободи k визначається за формулою:

$$k = s - r - 1,$$

де s – кількість укрупнених інтервалів;

r – число параметрів теоретичного закону розподілу (для нормального та рівномірного закону $r = 2$, для показникового – $r = 1$).

Величина α визначає рівень значимості. Для критерія Пірсона будемо розглядати два рівня значущості: $\alpha = 0{,}05$ та $\alpha = 0{,}01$.

Якщо $\chi^2 < \chi^2_{0,05}(k)$, то нульова гіпотеза H_0 приймається, тобто передбачуваний закон розподілу відповідає емпіричним даним, при цьому ми помиляємося в п'яти випадках зі ста, приймаючи можливо помилкову гіпотезу (помилка другого роду).

Якщо $\chi^2 > \chi^2_{0,01}(k)$, то нульову гіпотезу слід відкинути, тобто передбачуваний закон розподілу не відповідає емпіричним даним, при цьому ми помиляємося в одному випадку зі ста, відкидаючи можливо правильну гіпотезу (помилка першого роду).

Якщо $\chi^2_{0,05}(k) < \chi^2 < \chi^2_{0,01}(k)$, то це область невизначеності (гіпотезу можна як прийняти так і відкинути) і необхідно використовувати інші критерії.

Обчислення теоретичних частот $\tilde{m}_i$.

Якщо маємо вибірку випадкової величини X, то за її значеннями знаходять $x_{\max}$ и $x_{\min}$. Тоді розмах варіювання $R = x_{\max} - x_{\min}$, округлимо $R \approx R_0$. Знайдемо крок варіювання $h = \dfrac{R_0}{S}$, де S – число інтервалів, тоді таблиця обчислень $\tilde{m}_i$:

Інтервали	x_i	m_i	$h_i = \Delta x_i$	$t_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$	$\varphi(t_i)$	$f_i = \dfrac{\varphi(t_i)}{\sigma}$	$\tilde{p}_i = h f_i$	$\tilde{m}_i = n\tilde{p}_i$
$x_0^* - x_1^*$	x_1	m_1	h_1	t_1	$\varphi(t_1)$	f_1	$\tilde{p}_1$	$\tilde{m}_1$
…	…	…	…	…	…	…	…	…

В таблиці $x_i = \dfrac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}$ – середина інтервала; m_i – емпірична частота; $t_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$ – стандартизована величина; $\varphi(t_i)$ – диференціальна функція; $\tilde{p}_i = h_i f_i$ – теоретична ймовірність; $\tilde{m}_i$ – теоретична частота.

Критерій згоди Пірсона за Романовським

При досить великій кількості випробувань ($n > 300$) величина χ^2 має закон розподілу, близький до нормального. Її числові характеристики: $M(\chi^2) = k$, $D(\chi^2) = 2k$, де k – число ступеней свободи ($k = s - r - 1$).

Обчислюємо величину:

$$t = \left| \frac{\chi^2 - k}{\sqrt{2k}} \right|. \qquad (8.3)$$

Якщо $t \le 1{,}96$, то з надійністю $95\,\%$ гіпотеза H_0 приймається, тобто закон розподілу відповідає теоретичному; якщо $t \ge 2{,}58$, то з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$ гіпотеза H_0 відхиляється; якщо $t \in (1{,}96; 2{,}58)$ – це область невизначеності.

Питання для самодіагностики

1. Охарактеризувати нульову й альтернативну статистичні гіпотези.
2. Що називається статистичним критерієм перевірки гіпотези?
3. Як визначається потужність статистичного критерію та рівень значущості?
4. Сформулювати критерій згоди Пірсона.

Тема 9. Елементи теорії кореляції

9.1. Функціональна і статистична залежності

Існують два основних види залежностей: функціональна і стохастична (статистична).

Функціональна залежність між двома змінними x та y – це коли кожному значенню однієї змінної x відповідає певне значення другої змінної – y, та справедливим є рівняння $y = f(x)$. При функціональній залежності графіки рівнянь $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ однакові, тобто не має значення, яку змінну вважати незалежною змінною, а яку функцією.

Для випадкових величин X і Y не завжди можна встановити функціональну залежність. Між такими величинами існує залежність, коли зі зміною однієї величини змінюється розподіл іншої величини. Така залежність називається ***стохастичною (статистичної)***. Окремим випадком статистичної залежності є кореляційна залежність між двома випадковими величинами, коли зі зміною однієї з них змінюється середнє значення іншої.

Кореляційною залежністю Y від X називають функціональну залежність умовного середнього $\overline{y}_x$ от x: $\overline{y}_x = f(x)$. ***Умовним середнім*** $\overline{y}_{x_i}$ називають середнє арифметичне значень Y, що відповідає $x = x_i$. Рівняння $\overline{y}_x = f(x)$ називають ***рівнянням регресії*** Y ***на*** X, функцію $f(x)$ – ***регресією*** Y ***на*** X, а графік – ***лінією регресії*** Y ***на*** X. Можна ввести й іншу залежність: $\overline{x}_y = \varphi(y)$ – рівняння регресії X на Y.

У кореляційному аналізі оцінюється тіснота стохастичною зв'язку, в регресійному аналізі досліджується її форма. Обидва види аналізу призначені для з'ясування причинних співвідношень між явищами і для визначення наявності або відсутності зв'язку.

Розрізняють такі види кореляції і регресії: щодо характеру кореляції і регресії маємо позитивну або негативну кореляцію і регресію; щодо числа змінних: парна або множинна кореляція і регресія; щодо форми зв'язку: лінійна або нелінійна кореляція і регресія.

9.2. Основні задачі теорії кореляції

В теорії кореляції вирішують дві *основні задачі*:

1. Визначення наявності кореляційної зв'язку (якщо значення $\overline{y}_x$ одинакові для всіх значень X, то кореляційна залежність відсутня), встановлення форми залежності (виду функції регресії) і визначення параметрів рівняння регресії.

2. Визначення тісноти кореляційної зв'язку. Тіснота зв'язку оцінюється за величиною розсіювання значень величини Y навколо

умовного середнього $\overline{y}_x$ і характеризує ступінь впливу мінливості величини X на мінливість величини Y.

9.3. Лінійна регресія. Визначення параметрів лінійного рівняння парної регресії

Вид рівняння теоретичної лінії $\overline{y}_x = f(x)$ або $\overline{x}_y = \varphi(y)$ можна встановити за зовнішнім виглядом емпіричної лінії регресії, якщо її можна згладити прямою, то - лінійна залежність, якщо параболою, то - квадратична залежність і т. п.

При визначенні форми кореляційного зв'язку між двома змінними перевага віддається лінійної залежності $\hat{y}_x = ax + b$ або $\hat{x}_y = a_1 y + b_1$ з кількох причин: по-перше, простота, а в результаті - менш складні розрахунки; по-друге, для малих проміжків зміни аргументу криволінійні залежності можна з достатньою точністю наблизити прямолінійними, тобто замість однієї параболи можна розглядати дві прямі; по-третє, якщо величини X і Y нормально розподілені, то форма кореляційної залежності є лінійної.

Нехай маємо емпіричні дані:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
$y_{эмп.}$	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Побудуємо теоретичне рівняння регресії у вигляді:

$$\hat{y}_{теор.} = ax + b. \tag{9.1}$$

Параметри a та b визначимо за методом найменших квадратів так, щоб сума квадратів відхилень $\hat{y}_{i\ теор.}$ від $y_{i\ эмп.}$ була найменшою:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{i\ теор.} - y_{i\ эмп.}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \quad (min).$$

Отримаємо:
$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}, \quad b = \overline{y} - a\overline{x}\ . \tag{9.2}$$

Параметр a називається ***коефіцієнтом регресії*** Y ***на*** X і визначається $\rho_{y/x}$. Величина $(\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y})$ називається к***оваріацією,*** або кореляційним моментом і позначається μ_{xy}; $\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\sigma_x^2$ – дисперсія випадкової величини X.

Таким чином: $\rho_{y/x}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}$, $\qquad b=\overline{y}-\rho_{y/x}\overline{x}$. (9.3)

Теоретичне рівняння регресії Y на X має вигляд:

$$\hat{y}=\rho_{y/x}x+b. \tag{9.4}$$

Аналогічно можна отримати теоретичне рівняння регресії X на Y:

$$\hat{x}=\rho_{x/y}y+b_1, \tag{9.5}$$

де $\rho_{x/y}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}$, $\sigma_y^2=\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2$, $b_1=\bar{x}-\rho_{x/y}\bar{y}$.

Коефіцієнт регресії за своїм знаком збігається зі знаком коваріації: якщо знак $\rho_{y/x}$ «+», то регресія додатня, якщо знак «–», то регресія від'ємна. Коефіцієнт регресії $\rho_{y/x}$ – величина розмірна. Він показує, на скільки одиниць свого виміру збільшиться («+») (зменшиться («–»)) середнє значення функціональної ознаки $\hat{y}_x$, якщо фактор X збільшити на одиницю свого виміру.

Оскільки кореляційний момент (коваріація) μ_{xy} – характеристика розмірна, то вводять додаткову безрозмірну характеристику - ***коефіцієнт кореляції*** - показник тісноти лінійного зв'язку:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \tag{9.6}$$

Знаки коефіцієнтів r_{xy}, μ_{xy}, $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ співпадають.

Властивості коефіцієнта кореляції r_{xy}*:*

1. Якщо випадкові величини X і Y лінійно незалежні, то $r_{xy}=0$ (так як $\mu_{xy}=0$).

2. Якщо випадкові величини лінійно залежні $y = ax + b$, то $r_{xy} = 1$.

3. $|r_{xy}| \le 1$, $\quad -1 \le r \le 1$.

4. $r_{xy} = r_{yx}$ (за означенням).

Наведемо формули для обчислення коефіцієнта кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}} .$$

Так як $\rho_{y/x} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}$, $\rho_{x/y} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}$, то $\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y} = \dfrac{\mu_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2} = r^2$.

Отже, $r_{xy} = \pm\sqrt{\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}}$, знак «+», якщо $\rho_{y/x}, \rho_{x/y}$ додатні; знак «–»,якщо $\rho_{y/x}, \rho_{x/y}$ від'ємні.

Оскільки коефіцієнт кореляції є повноцінним показником тісноти зв'язку лише в разі лінійної залежності між змінними, то виникає необхідність в достовірному показнику інтенсивності зв'язку при будь-якій формі залежності.

Існує два види розсіювання: розсіювання, яке обумовлено впливом фактора X $\left(\sigma_{\bar{y}_x}^2\right)$; розсіювання, яке обумовлено впливом інших факторів, крім X $\left(\sigma_{y/x}^2\right)$.

Показником тісноти зв'язку між фактором X і ознакою Y является ***емпіричне кореляційне відношення***:

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{y}_x}^2}{\sigma_y^2}} , \tag{9.7}$$

де $$\sigma_{\bar{y}_x}^2 = \frac{\sum_i \left(\overline{y_{x_i}} - \bar{y}\right)^2 m_{x_i}}{n} = \frac{\sum_i \overline{y_{x_i}^2} m_{x_i}}{n} - \left(\bar{y}\right)^2.$$

Величина $\eta_{y/x}^2$ показує, яка частина повної мінливості функціональної ознаки пояснюється впливом фактора-аргументу X .

Величина η характеризує тісноту зв'язку в кореляційної залежності і має такі *властивості*:

1) $\eta \geq 0$ (за означенням);

2) $0 \leq \eta \leq 1$;

3) якщо $\eta = 1$, то зв'язок між X та Y функціональна (оскільки $\sigma^2_{y/x} = 0$);

4) якщо $\eta = 0$, то $\sigma_{\bar{y}_x} = 0$, то між X та Y немає кореляційної залежності;

5) якщо величина η наближається до нуля, то зв'язок між X і Y слабка; якщо величина η наближається до одиниці, то зв'язок між X й Y сильна.

При парній лінійної кореляційної залежності маємо $\eta_{y/x} \approx |r|$. Якщо $\eta >> r$, то залежність між X і Y нелінійна.

9.4. Перевірка значущості параметрів кореляційної залежності

Перевірка суттєвості кореляційної залежності (значущості регресії).

Як відомо, до емпіричних показників кореляції відносяться коефіцієнт кореляції r і кореляційне відношення η. Коефіцієнт кореляції - величина випадкова (якщо взяти кілька вибірок, коефіцієнт кореляції буде різним). Тому перевіряється гіпотеза про його значущість (суттєвості), тобто істотно чи відрізняється від нуля або ця відмінність можна приписати впливу випадкових факторів.

Розглянемо гіпотезу H_0: $r_0 = 0$ – в генеральній сукупності немає кореляційної зв'язку.

Позначимо $\tau = \frac{|r|}{\sigma_r} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ для $n \leq 50$ та $\tau = \frac{|r|\sqrt{n}}{1-r^2}$ для $n > 50$.

Якщо $\tau \leq t$, то з надійністю $2\Phi(t)$ приймається гіпотеза H_0 про відсутність кореляційної залежності (неістотності лінійного зв'язку). Якщо $\tau > t$, то з надійністю $2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 відхиляється, тобто є лінійна кореляційний зв'язок і вона суттєва.

Для $n > 50$ прийняті такі критерії:

якщо $\tau > 2{,}58$, то з упевненістю $99\,\%$ можна стверджувати, що лінійна кореляційна залежність істотна (значима). Кореляційна залежність існує не тільки для даної вибірки, а для всієї генеральної сукупності;

якщо $\tau < 1{,}96$, то з упевненістю $95\,\%$ можна стверджувати, що кореляційна залежність не є суттєвою (значущою). Кореляційна залежність характерна тільки для даної вибірки і може не існувати в генеральної сукупності;

якщо $1{,}96 < \tau < 2{,}58$, це область невизначеності, частіше говорять про неістотності кореляційної залежності, висновок залежить від суті питання.

Якщо $n \le 50$, то за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (див. додаток Ж) знаходимо $t_\alpha(n-2)$. Якщо $\tau < t_{0,05}(n-2)$, то приймається гіпотеза H_0 про відсутність кореляційної залежності. Якщо $\tau > t_{0,01}(n-2)$, то гіпотеза H_0 відхиляється, тобто є кореляційний зв'язок і вона суттєва.

Область невизначеності: $t_{0,05}(n-2) \le \tau \le t_{0,01}(n-2)$.

Перевірка лінійності кореляційної зв'язку, її значимості та адекватності моделі.

Відомо, що якщо залежність між нормально розподіленими X і Y лінійна (гіпотеза H_0), то $|r| = \eta$. Довірчий інтервал для кореляційного відносини має вигляд:

$$|r| - t\sigma_r \le \eta \le |r| + t\sigma_r. \quad (9.8)$$

Якщо η, обчислене за вибіркою, належить довірчого інтервалу, то з надійністю $2\Phi(t)$ приймається гіпотеза H_0, тобто кореляційний зв'язок лінійний.

Якщо η не належить довірчого інтервалу, то з рівнем значущості $1 - 2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 відхиляється, тобто кореляційний зв'язок нелінійний.

На практиці для $n > 50$ прийняті такі критерії:

якщо η належить інтервалу з надійністю $\gamma = 95\,\%$, $t = 1{,}96$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто зв'язок лінійний; якщо η не належить інтервалу з надійністю $\gamma = 99\,\%$, $t = 2{,}58$, то гіпотеза H_0 відхиляється, тобто зв'язок нелінійна; якщо η не належить інтервалу з надійністю $\gamma = 95\,\%$, а належить інтервалу з надійністю $\gamma = 99\,\%$, то це область невизначеності.

Якщо вибірка невелика ($n \le 50$), то величину $t = t_\gamma(n-2)$ знаходять за таблицею (див. табл. Е.1 додатка Е).

Для перевірки *значущості моделі регресії* і її адекватності (відповідності) можна використовувати критерій Фішера, побудований на відношені двох незсунених оцінок дисперсій, що залежить від числа ступенів свободи k_1 та k_2.

Питання для самодіагностики

1. Що називається статистичною залежністю? У чому полягають її особливості в порівнянні з функціональною залежністю?
2. Що називається кореляційною залежністю?
3. Як обчислюються умовне середнє?
4. Що називається емпіричною лінією регресії?
5. Описати властивості вибіркового коефіцієнта кореляції і вибіркового кореляційного відносини.
6. Як знаходять теоретичні лінії регресії?
7. Які статистичні гіпотези використовуються в регресійному аналізі?

Рекомендована література

Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов / Е. С. Вентцель. – 7-е изд. – М. : Высшая школа, 2001. – 576 с.

Гмурман В. Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2001. – 576 с.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебн. пособ. для вузов / В. Е. Гмурман. – 6-е изд. – М. : Высшая школа, 1998. – 480 с.

Егоршин А. А. Корреляционно-регрессионный анализ : пособие для вузов / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х. : Основа, 1998. – 208 с.

Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 572 с.

Мацкевич И. П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Мн. : Вышейшая школа, 1993. – 270 с.

Теория вероятностей и математическая статистика : учебн. пособ. для вузов / под ред. В. А. Колемаева. – М. : Высшая школа, 1991. – 400 с.

Ферстер Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа / Э. Ферстер, Б. Ренц. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 394 с.

Додатки

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Таблиця значень функції $P(k,\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$k \backslash \lambda$	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	1066
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003
$k \backslash \lambda$	**1,0**	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**
0	3679	1358	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150
4	0158	0902	1680	1954	1755	1338	0912	0573	0337
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911
7	0001	0034	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318
9		0002	0027	0132	0363	0588	1014	1241	1318
10			0008	0053	0181	0413	0710	0998	1186
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970
12			0001	0006	0034	0113	0263	0481	0728
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324
15					0002	0009	0033	0090	0194
16						0003	0014	0045	0109
17						0001	0006	0021	0058
18							0002	0009	0029
19							0001	0004	0014
20								0001	0003
21									0001
22									

Додаток В

Таблиця значень функції $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,39	1517	0,78	2823	1,17	3790
0,01	0040	0,40	0,1554	0,79	2852	1,18	3810
0,02	0080	0,41	1591	0,80	0,2881	1,19	3830
0,03	0120	0,42	1628	0,81	2910	1,20	0,3849
0,04	0160	0,43	1664	0,82	2939	1,21	3869
0,05	0199	0,44	1700	0,83	2967	1,22	3883
0,06	0239	0,45	1736	0,84	2995	1,23	3907
0,07	0279	0,46	1772	0,85	3023	1,24	3925
0,08	0319	0,47	1808	0,86	3051	1,25	3944
0,09	0359	0,48	1844	0,87	3078	1,26	3962
0,10	0,0398	0,49	1879	0,88	3106	1,27	3980
0,11	0468	0,50	0,1915	0,89	3133	1,28	3997
0,12	0478	0,51	1950	0,90	0,3159	1,29	4015
0,13	0517	0,52	1985	0,91	3186	1,30	0,4032
0,14	0557	0,53	2019	0,92	3212	1,31	4049
0,15	0596	0,54	2054	0,93	3238	1,32	4066
0,16	0636	0,55	2088	0,94	3264	1,33	4082
0,17	0675	0,56	2123	0,95	3289	1,34	4099
0,18	0714	0,57	2157	0,96	3315	1,35	4115
0,19	0753	0,58	2190	0,97	3340	1,36	4131
0,20	0,0793	0,59	2224	0,98	3365	1,37	4147
0,21	0832	0,60	0,2257	0,99	3389	1,38	4162
0,22	0871	0,61	2291	1,00	0,3413	1,39	4177
0,23	0910	0,62	2324	1,01	3438	1,40	0,4192
0,24	0948	0,63	2357	1,02	3461	1,41	4222
0,25	0987	0,64	2389	1,03	3485	1,42	4236
0,26	1026	0,65	2422	1,04	3508	1,43	4251
0,27	1064	0,66	2454	1,05	3531	1,44	4265
0,28	1103	0,67	2486	1,06	3554	1,45	4279
0,29	1141	0,68	2517	1,07	3577	1,46	4292
0,30	0,1179	0,69	2549	1,08	3599	1,47	4306
0,31	1217	0,70	0,2580	1,09	3621	1,48	4319
0,32	1255	0,71	2611	1,10	0,3643	1,49	0,4332
0,33	1293	0,72	2642	1,11	3665	1,50	4345
0,34	1331	0,73	2673	1,12	3686	1,51	4357
0,35	1368	0,74	2703	1,13	3708	1,52	4370
0,36	1406	0,75	2734	1,14	3729	1,53	4382
0,37	1443	0,76	2764	1,15	3749	1,54	4394
0,38	1480	0,77	2794	1,16	3770	1,55	4406

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,56	0,4406	1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956
1,57	4418	1,82	4656	2,14	4838	2,64	4959
1,58	4429	1,83	4664	2,16	4846	2,66	4961
1,59	4441	1,84	4671	2,18	4854	2,68	4963
1,60	0,4452	1,85	4678	2,20	4861	2,70	0,4965
1,61	4463	1,86	4686	2,22	4868	2,72	4967
1,62	4474	1,87	4693	2,24	4875	2,74	4969
1,63	4484	1,88	4699	2,26	4881	2,76	4971
1,64	4495	1,89	4706	2,28	4887	2,78	4973
1,65	4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	4974
1,66	4515	1,91	4719	2,32	4898	2,82	4976
1,67	4525	1,92	4726	2,34	4904	2,84	4977
1,68	4535	1,93	4732	2,36	4909	2,86	4979
1,69	4545	1,94	4738	2,38	4913	2,88	4980
1,70	0,4554	1,95	4744	2,40	4916	2,90	0,4981
1,71	4564	1,96	4750	2,42	4922	2,92	4982
1,72	4573	1,97	4756	2,44	4927	2,94	4984
1,73	4582	1,98	4761	2,46	4931	2,96	4985
1,74	4591	1,99	4767	2,48	4934	2,98	4986
1,75	4599	2,00	0,4772	2,50	4938	3,00	49865
1,76	4608	2,02	4783	2,52	4941	3,20	49931
1,77	4616	2,04	4793	2,54	4945	3,34	49966
1,78	4625	2,06	4803	2,56	4948	3,60	49984
1,79	4633	2,08	4812	2,58	4951	3,80	49993
1,80	0,4641	2,10	4821	2,60	0,4953	4,00	49997

Додаток Д

Критичні точки розподілу χ^2 в залежності від рівня значущості і числа ступенів свободи

Число степенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,362	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,7	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,76	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,(1	7,63
20	37,6	34,2	31.4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток Е

Таблиця Е.1

Таблиця значень $t = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2.023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця Е.2

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток Ж

Критичні точки розподілу Стьюдента

Рівень значущості α (критична область)				
Число ступенів свободи k	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$
1	63,7	31,82	12,7	6,31
2	9,92	6,97	4,30	2,92
3	5,84	4,54	3,18	2,35
4	4,60	3,75	2,78	2,13
5	4,03	3,37	2,57	2,01
6	3,71	3,14	2,45	1,94
7	3,50	3,00	2,36	1,89
8	3,36	2,90	2,31	1,86
9	3,25	2,82	2,26	1,83
10	3,17	2,76	2,23	1,81
11	3,11	2,72	2,20	1,80
12	3,05	2,68	2,18	1,78
13	3,01	2,65	2,16	1,77
14	2,98	2,62	2,14	1,76
15	2,95	2,60	2,13	1,75
16	2,92	2,58	2,12	1,75
17	2,90	2,57	2,11	1,74
18	2,88	2,55	2,10	1,73
19	2,86	2,54	2,09	1,73
20	2,85	2,53	2,09	1,73
21	2,83	2,52	2,08	1,72
22	2,82	2,51	2,07	1,72
23	2,81	2,50	2,07	1,71
24	2,80	2,49	2,06	1,71
25	2,79	2,49	2,06	1,71
26	2,78	2,48	2,06	1,71
27	2,77	2,47	2,05	1,71
28	2,76	2,46	2,05	1,70
30	2,75	2,46	2,04	1,70
40	2,70	2,42	2,02	1,68
60	2,66	2,39	2,00	1,67
120	2,62	2,36	1,98	1,66
∞	2,58	2,33	1,96	1,64
k	$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$
Рівень значущості α (критична область)				

Зміст