TECHNIQUES OF CALCULATIONS OF LIMITS. TASKS

Calculate limits of the following functions:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^4-x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2}{2x^4+3x-5}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+5}{3\sqrt{x^2-x}+x}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot ctg2x$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x-2x}{\sin x+2\,arctg\,x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos6x}{tg^2 6x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{tg^2\dfrac{x}{2}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{\frac{x-2}{3}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x-1}{3x-1}\right)^{\frac{2}{x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+5}\right)^{2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left(\ln(2x+3)-\ln(2x-1)\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^x}{x}$.

25. Prove that at $x\to 0$ $1-\cos x\approx\dfrac{1}{2}x^2$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1-9x)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 2x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5}{3x^2+x-10}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-2x-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$.

32. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$.

33. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$.

34. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

36. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

37. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

38. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$.

40. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

41. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{2x^2-x-1}$.

42. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

43. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$.

44. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x}-2}$.

46. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

47. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. **48.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+3x+7}$. **49.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4-2x-1}{100x^3+x^2+2}$.

50. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5}{7x^4-2x^2+3}$. **51.** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$. **52.** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-2}-\dfrac{x^4}{x^2+2}\right)$.

53. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{4x^4}{x^2+x+2}-4x^2\right)$. **54.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x+2}{3^{x+1}-1}$. **55.** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2\cdot5^x-3}{9\cdot5^x+4}$.

56. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4^x+3^{x+1}}{4^{x+1}+3^x}$. **57.** $\lim\limits_{x \to \pm 0}\left(6^{\frac{1}{x}}+5\right)$. **58.** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{5x^2+3}{10x^2-1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

59. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{5x-2}{2x+1}\right)^{5x}$. **60.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{64x^3+1}+2}$. **61.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

62. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2-9}-2x}{2-\sqrt[3]{x^3+5}}$. **63.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$. **64.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

65. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x}-x}$. **66.** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)$. **67.** $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$.

68. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$. **69.** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+5}\right)$.

70. $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$. **71.** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x}\right)$.

72. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$. **73.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg6x}{\sin 8x}$. **74.** $\lim\limits_{x \to 0} x^2 ctg3x$.

75. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg5x}{\sin^2 3x}$. **76.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{tg^2 6x}$. **77.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^3 2x}{3x^3}$.

78. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{4x}$. **79.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{2x\cdot\sin x}$. **80.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg10x}{\sin 5x}$.

81. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{arcsin(x+2)}$. **82.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sin 2x}{x+tg3x}$. **83.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsin^3 2x}{\sin^3 3x}$.

84. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{arctg10x}$. **85.** $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$. **86.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

87. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$. **88.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$. **89.** $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$.

90. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$. **91.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$. **92.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

93. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{tg^2 x}$. **94.** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x-1}{3}}$. **95.** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$.

96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^x$.

97. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x-1}\right)^{x+1}$.

98. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

99. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^x$.

100. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-2}\right)^{x^2}$.

101. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

102. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

104. $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

105. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+3x}{x+1}\right)^{\frac{5}{x}}$.

106. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3-2x^2}{3+3x^2}\right)^{-\frac{4}{x}}$.

10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}\right)^{-2x}$.

108. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{2x}}$.

109. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

110. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

111. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

112. $\lim\limits_{x\to\infty}x\big(\ln(x+5)-\ln x\big)$.

113. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3-x)-\ln3}{5x}$.

114. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(5-x^2)-\ln5}{2x^2}$.

115. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

116. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{4x}$.

117. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin2x}$.

118. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x^2}-\cos x}{3x^2}$.

119. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin3x}-e^{\sin2x}}{x}$.

Calculate limits, using equivalencies:

120. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin20x}{tg15x}$.

121. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{\sin^24x}$.

122. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin4x}$.

123. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^35x}{x^2tg5x}$.

124. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x+x^2}$.

125. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\left(3x^3\right)}{3x^2arctg^2\left(2x^2\right)}$.

126. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2tg3x}{\arcsin\dfrac{x^3}{3}}$.

127. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^23x}{\ln^2(1+2x)}$.

128. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x\sin5x}{e^{2x^2}-1}$.

129. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg5x}{e^{-3x}-1}$.

130. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}$.

131. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos2x}{1-\cos x}$.

132. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\ln(1-x)}$.

133. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

134. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

135. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin2x}-1}{\ln(1+tg4x)}$.

136. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x+2arctg3x}{x+3tg2x}$.

137. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{tg3x}$.

Answers: **28.** $\dfrac{1}{2}$. **29.** $\dfrac{1}{2}$. **30.** $\dfrac{5}{8}$. **31.** ∞. **32.** $-4,5$. **33.** $-\dfrac{4}{3}$.

34. $\dfrac{4}{9}$. **35.** 0. **36.** $-\dfrac{2}{5}$. **37.** ∞. **38.** -1. **39.** 1.

40. $\dfrac{1}{2}$. **41.** $\dfrac{1}{3}$. **42.** -7. **43.** -12. **44.** $\dfrac{3}{2}$. **45.** -12. **46.** $\dfrac{12}{5}$. **47.** $-\dfrac{1}{4}$. **48.** 3.

49. ∞. **50.** 0. **51.** 0. **52.** 4. **53.** ∞. **54.** $\dfrac{1}{3}$. **55.** $\begin{cases} -\dfrac{3}{4}, x\to-\infty \\ \dfrac{2}{9}, \ x\to+\infty \end{cases}$. **56.** 3. **57.** **5, если**

$x\to-0;$ $\infty,$ **если** $x\to+0.$ **58.** 0. **59.** ∞. **60.** $\dfrac{1}{2}$. **61.** 2.

62. -1. **63. 1.** **64.1.** **65.** -1. **66.** 0. **67.** ∞, **если** $x\to-\infty$; **5, если** $x\to+\infty$. **68.** 1.

69. ∞. **70.** ∞, **если** $x\to-\infty$; $\dfrac{3}{4}$, **если** $x\to+\infty$. **71.** 0. **72.** $\dfrac{7}{3}$. **73.** $\dfrac{3}{4}$. **74.** 0.

75. ∞. **76.** $\dfrac{1}{2}$. **77.** $\dfrac{8}{3}$. **78. 2.** **79.** -8. **80.** 2. **81.** -4. **82.** $-\dfrac{1}{4}$. **83.** $\dfrac{8}{27}$. **84.** 0.

85. $\dfrac{1}{2}$. **86.** 1. **87.** $\dfrac{3}{4}$. **88.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **1.89.** $\dfrac{1}{8}$. **90.** 1. **91.** π. **92.** 1. **93.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **94.** $\sqrt[3]{e}$.

95. e^{-2}. **96.** $\begin{cases} \infty, x\to+\infty \\ 0, \ x\to-\infty \end{cases}$. **97.** $e^{-\frac{3}{2}}$. **98.** e^{-1}. **99.** 1. **100.** $e^{\frac{3}{2}}$. **101.** 0. **102.** 0.

103. e^{-1}. **104.** e^{-5}. **105.** e^{10}. **106.** 1. **107.** e^{-6}. **108.** $\sqrt{e}$. **109.** $\sqrt{e}$. **110.** e.

111 1. **112. 5.** **113.** $-\dfrac{1}{15}$. **114.** $-\dfrac{1}{10}$. **115.** $-\dfrac{1}{2}$. **116.** $\dfrac{3}{4}$. **117. 2.** **118.** $\dfrac{1}{6}$. **119.** 1.

120. $\dfrac{4}{3}$. **121.** $\dfrac{9}{8}$. **122.** $\dfrac{1}{8}$. **123.** 25. **124.** 1. **125.** $\dfrac{3}{4}$. **126. 6.** **127.** $\dfrac{9}{4}$. **128.** $7,5$.

129. $-\dfrac{5}{3}$. **130.** $\dfrac{1}{3}$. **131.** 3. **132.** -1. **133.** -1. **134.** ∞. **135.** $\dfrac{1}{2}$. **136.** $\dfrac{11}{7}$.

137. 1.

Tasks. Find the limits:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}; \quad \lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1} \cdot \lim_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-1}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1} \cdot \lim_{x\to0}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2+x} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^2-2x+5} \cdot \lim_{x\to-2}\frac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x};$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-cos}{7x^2}; \quad \lim_{x\to-5}\frac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5};$$

$$\lim_{x\to5}\frac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}; \quad \lim_{x\to2}\frac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10} \cdot \quad \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}..$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4} \cdot \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+6}{10x^3-5x^2+3} \cdot \quad \lim_{x\to0}\frac{tg^2 7x}{16x^2}, \quad \lim_{x\to0}\frac{1-cos8x}{3x^2}; \quad \lim_{x\to0}\frac{5x^2}{1-cos3x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^3 x}{5x^2 \, sin2x}$$