

Лабораторна робота №7

Інтегральне числення функції однієї змінної в середовищі GNU Octave

Мета заняття:

- ✚ обчислення невизначених інтегралів засобами середовища GNU Octave;
- ✚ обчислення визначених інтегралів засобами середовища GNU Octave;
- ✚ обчислення площі фігури, що обмежена лініями;
- ✚ обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена певними лініями навколо відповідної осі.

7.1. Обчислення невизначених інтегралів засобами середовища GNU Octave

За допомогою ППП Symbolic Math у середовищі GNU Octave можливо аналітично обчислювати невизначені інтеграли від математичних функцій. Реалізація цих обчислень здійснюється за допомогою функції `int`. Вхідним аргументом функції `int` є символічний вираз, що визначає функцію, яка інтегрується, другим – змінна інтегрування.

Для того щоб обчислити невизначений інтеграл від функції $f(x)$ необхідно послідовно виконати наступні дії:

задати всі символічні змінні, які використовуються в описі функції, за допомогою команди `syms` ;

задати функцію (або створити символічну функцію за допомогою функції `sym`, при цьому немає необхідності виконувати крок 1);

викликати функцію `int`.

Правила виклику функції `int` для обчислення невизначеного інтегралу наведено у табл.1.

Опис функції `int` для обчислення невизначеного інтегралу

Інтеграл	Команда Octave	Опис команди
$\int f(x)dx$	<code>int(f)</code> або <code>int(f, 'x')</code>	За замовчуванням x є змінною для функції
$\int f(x,t)dt$	<code>int(f, 't')</code>	Для функцій, у яких присутні не тільки змінна, а також деякі параметри, за якими відбувається інтегрування

Зауваження 1: при обчислюванні декількох інтегралів не обов'язково кожен раз оголошувати змінні та параметри, якщо раніше вони вже були описані.

Зауваження 2: для уникання плутанини при роботі з функцією `int` рекомендується викликати її у формі `int(f, 'x')`.

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $\int x^5 dx$.

Розв'язання.

```
>> syms x
>> f=sym('x^5')
f = (sym)
  5
  x
>> I1=int(f, 'x')
I1 = (sym)
  6
  x
  —
  6
```

Приклад 2. Обчисліть інтеграл $\int \left(2 \sin x - 4 + 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2 + 4} - \frac{1}{x} \right) dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('2*sin(x)-4+3*sqrt(x)+5/(x^2+4)-1/x')
```

```
f = (sym)
```

$$3\sqrt{x} + 2\sin(x) - 4 + \frac{5}{x+4} - \frac{1}{x}$$

```
>> I2=int(f,'x')
```

```
I2 = (sym)
```

$$2\cdot x^{3/2} - 4\cdot x - \log(x) - 2\cdot \cos(x) + \frac{5\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл $\int \sqrt[3]{x} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('x^(1/3)')
```

```
f = (sym)
```

$$\sqrt[3]{x}$$

```
>> I3=int(f,'x')
```

```
I3 = (sym)
```

$$\frac{3\cdot x^{4/3}}{4}$$

Приклад 4. Обчисліть інтеграл $\int 2^{3x-1} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('2^(3*x-1)')
```

```
f = (sym)
```

$$2^{3x-1}$$

```
>> I4=int(f,'x')
```

$$I4 = (\text{sym})$$

$$\frac{3 \cdot x - 1}{2}$$

$$3 \cdot \log(2)$$

Приклад 5. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{4x+3}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('1/(4*x+3)')
f = (sym)
  1
  -----
 4*x + 3
>> I5=int(f,'x')
I5 = (sym)
  log(4*x + 3)
  -----
 4
```

Приклад 6. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{9x^2-1}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('1/(9*x^2-1)')
f = (sym)
  1
  -----
  2
 9*x  - 1
>> I6=int(f,'x')
I6 = (sym)
  log(x - 1/3)  -  log(x + 1/3)
  -----          -----
 6              6
```

Приклад 7. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2 + 25}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('1/(4*x^2+25)')
```

```
f = (sym)
```

$$\frac{1}{4x^2 + 25}$$

$$4x^2 + 25$$

```
>> I7=int(f,'x')
```

```
I7 = (sym)
```

$$\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x}{5}\right)}{10}$$

$$10$$

Приклад 8. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('1/sqrt(4*x^2+1)')
```

```
f = (sym)
```

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\sqrt{4x^2 + 1}$$

```
>> I8=int(f,'x')
```

```
I8 = (sym)
```

$$\frac{\operatorname{asinh}(2x)}{2}$$

$$2$$

Приклад 9. Обчисліть інтеграл $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('cos(x)/(sin(x))^2')
```

```
f = (sym)
```

```
cos(x)
```

2

sin (x)

```
>> I9=int(f,'x')
```

```
I9 = (sym)
```

```
-1
```

sin(x)

Приклад 10. Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln x}}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('1/(x*sqrt(4-log(x)))')
```

```
f = (sym)
```

1

x·√ 4 - log(x)

```
>> I10=int(f,'x')
```

```
I10 = (sym)
```

-2·√ 4 - log(x)

Приклад 11. Обчисліть інтеграл $\int \frac{2\sin x dx}{\cos^3 x}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(2*sin(x))/(cos(x))^3')
```

```
f = (sym)
```

```
2*sin(x)
```

3

cos (x)

```
>> I11=int(f,'x')
I11 = (sym)
      1
      —
      2
cos (x)
```

Приклад 12. Обчисліть інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(2*x+3)/(x^2+3*x+5)')
f = (sym)
      2·x + 3
      —
      2
      x  + 3·x + 5
```

```
>> I12=int(f,'x')
I12 = ((sym)
      2
      log(x  + 3·x + 5))
```

Приклад 13. Обчисліть інтеграл $\int e^{-2x+7} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('exp(-2*x+7)')
f = (sym)
      7 - 2·x
      e
```

```
>> I13=int(f,'x')
I13 = (sym)
      7 - 2·x
      -e
      —
```

2

Приклад 14. Обчисліть інтеграл $\int xe^{-x^2} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('x*exp(-x^2)')
```

```
f = (sym)
      2
     -x
    x·e
>> I14=int(f,'x')
I14 = (sym)
      2
     -x
    -e
-----
     2
```

Приклад 15. Обчисліть інтеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('sqrt(log(x))/x')
f = (sym)
      _____
     \  log(x)
      _____
             x
```

```
>> I15=int(f,'x')

I15 = (sym)
      3/2
     2·log  (x)
      _____
             3
```

Приклад 16. Обчисліть інтеграл $\int xe^{-2x} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('x*exp(-2*x)')
f = (sym)
     -2·x
    x·e
```

```
>> I16=int(f,'x')
I16 = (sym)
      -2·x
      (-2·x - 1)·e
      -----
           4
```

Приклад 17. Обчисліть інтеграл $\int (x^3 + 1) \ln x dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(x^3+1)*log(x)')
f = (sym)
     3
     (x  + 1)·log(x)
>> I17=int(f,'x')
I17 = (sym)
      4
      x
      - --- - x +
      16
      (
      4
      x
      + x
      )·log(x)
```

Приклад 18. Обчисліть інтеграл $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('exp(2*x)*sin(3*x)')
f = (sym)
     2·x
     e   ·sin(3·x)
>> I18=int(f,'x')
I18 = (sym)
      2·x          2·x
      2·e   ·sin(3·x) - 3·e   ·cos(3·x)
      -----
           13          13
```

Приклад 19. Обчисліть інтеграл $\int \frac{(x-1)dx}{(x-2)(x+3)}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(x-1)/((x-2)*(x+3))')
```

```
f = (sym)
      x - 1
      -----
      (x - 2)·(x + 3)
>> I19=int(f,'x')
I = (sym)
      log(x - 2)   4·log(x + 3)
      ----- + -----
           5             5
```

Приклад 20. Обчисліть інтеграл $\int \frac{(4x+1)dx}{x^3+4x}$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(4*x+1)/(x^3+4*x)')
f = (sym)
      4·x + 1
      -----
           3
      x  + 4·x
>> I20=int(f,'x')
I20 = (sym)
      log(x)   log(x2 + 4)
      ----- - ----- + 2·atan(| $\frac{x}{-1}$ |)
           4             8
```

7.2. Обчислення визначених інтегралів засобами середовища GNU Octave

За допомогою ППП Symbolic Math у середовищі GNU Octave можна аналітично обчислювати визначені інтеграли (включаючи невластні) від математичних функцій. Реалізація цих обчислень здійснюється також, як і в невизначених інтегралів за допомогою функції `int`. Як і у невизначених інтегралів вхідним аргументом функції `int` є символічний вираз, що визначає функцію, яка інтегрується, другим – змінна

інтегрування. Окрім того для визначених інтегралів передбачені третій та четвертий аргументи, які становлять межі інтегрування.

Так, для того щоб обчислити визначений інтеграл $f(x)$, за межами інтегрування a та b (наприклад $\int_a^b f(x)dx$) необхідно послідовно виконати наступні дії:

1. задати всі символічні змінні, які використовуються в описі функції, за допомогою команди `syms`;
2. задати функцію (або створити символічну функцію за допомогою функції `sym`, при цьому не має необхідності виконувати крок 1);
3. викликати функцію `int`.

Правила виклику функції `int` для обчислення визначених інтегралів наведено у табл. 2.

Таблиця 2

Опис функції `int` для обчислення визначених інтегралів

Інтеграл	Команда Octave	Опис команди
$\int_a^b f(x)dx$	<code>int(f,a,b)</code> або <code>int(f,'x',a,b)</code>	Якщо функція залежить тільки від однієї змінної, то її можна не вказувати у вхідних аргументах <code>int</code>
$\int_a^b f(x,t)dt$	<code>int(f,'t',a,b)</code>	Для функцій, у яких присутні не тільки змінна, а також деякі параметри, за якими відбувається інтегрування
$\int_a^{\infty} f(x)dx$ $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	<code>int(f,'x',a,Inf)</code> <code>int(f,'x',-Inf,a)</code> <code>int(f,'x',-Inf,Inf)</code>	Обчислення невласних інтегралів

Приклад 21. Обчисліть інтеграл $\int_9^{16} \frac{3^{\sqrt{x}} - 1}{2\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(3^(sqrt(x))-1)/(2*sqrt(x))')
```

```
f = (sym)
```

$$\sqrt{x}$$

$$3 \quad - \quad 1$$

$$2 \cdot \sqrt{x}$$

```
>> I21=int(f,'x',9,16)
```

```
I21 = (sym)
```

$$54$$

$$-1 + \frac{\quad}{\log(3)}$$

$$\log(3)$$

Приклад 22. Обчисліть інтеграл $\int_0^{2\pi} (2x - 5) \cos 2x dx$.

Розв'язання.

```
>> f=sym('(2*x-5)*cos(2*x)')
```

```
f = (sym) (2*x - 5) * cos(2*x)
```

```
>> I22=int(f,'x',0,2*pi)
```

```
I21 = (sym) 0
```

7.3. Обчислення площі фігури, що обмежена лініями засобами середовища GNU Octave

Визначений інтеграл має широке застосування у математиці та фізиці. Розглянемо застосування визначеного інтеграла у геометрії, зокрема для знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, та об'ємів тіл.

Приклад 23. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2$ та $y = x - 1$.

Розв'язання.

Для обчислення площі фігури спочатку побудуємо графіки функцій $y = 5 - x^2$ та $y = x - 1$ (рис.1).

```
>> x=-5:0.25:5;  
>> y1=5-x.^2;  
>> y2=x-1;  
>> plot(x,y1,'b','linewidth',3,x,y2,'r','linewidth',3);  
xlabel('x'); ylabel('y'); legend('y=5-x^2','y=x-1');  
grid on
```

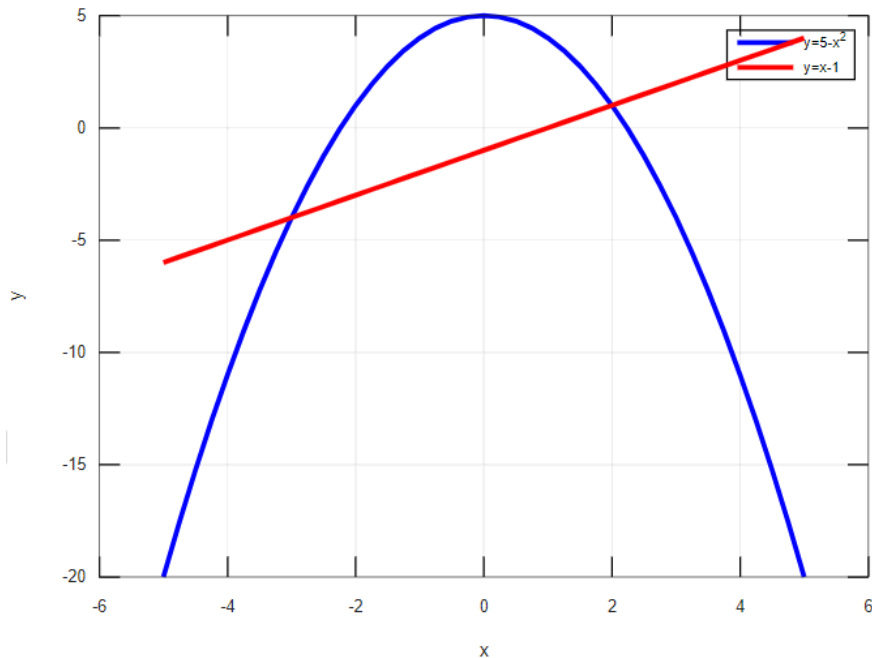


Рис.1. Графіки функцій $y=5-x^2$ та $y=x-1$

```
>>set(gca,'XTick',[-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6])  
%задаємо крок по осі ОХ
```

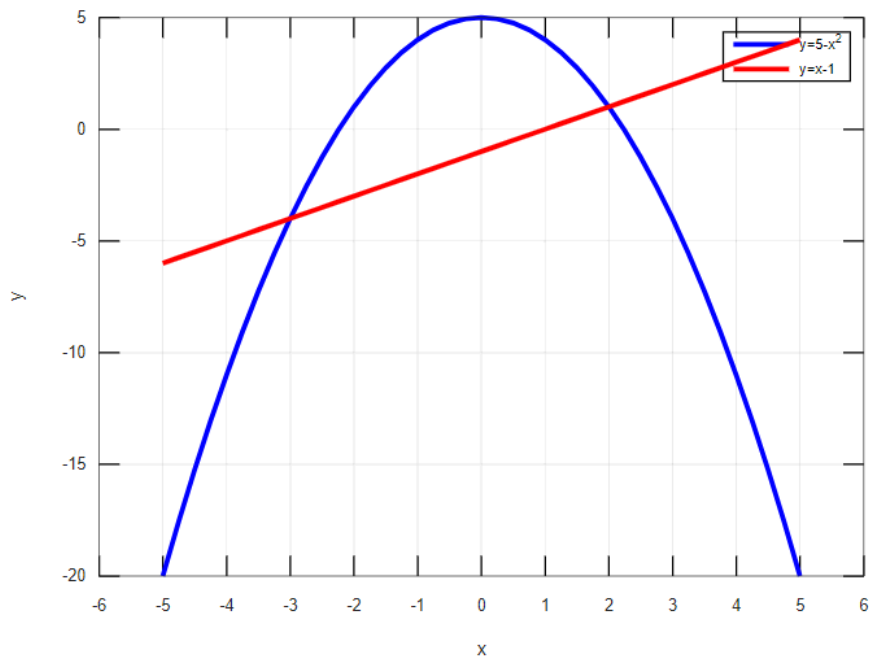


Рис.2. Криволінійна трапеція

```
>> hold on %фіксуємо вікно
```

Тепер необхідно знайти межі інтегрування (абсциси точок перетину графіків функцій), розв'язавши рівняння $y_1(x) = y_2(x)$.

```
>> y1=sym('5-x^2')
y1 = (sym)
      2
      5 - x
>> y2=sym('x-1')
y2 = (sym) x - 1
>> roots=solve(y1-y2)
roots = (sym 2x1 matrix)
      [-3]
      |  |
      [2 ]
>> limits=double([roots(1) roots(2)])
limits =
      -3  2
```

Межами інтегрування є $x = -3$ та $x = 2$. Нанесемо ці точки на графік (рис.3).

```
>>plot(limits(1),double(subs(y1,'x',limits(1))),'yo',
'linewidth',4,limits(2),double(subs(y1,'x',limits(2))),
'yo','linewidth',4)
```

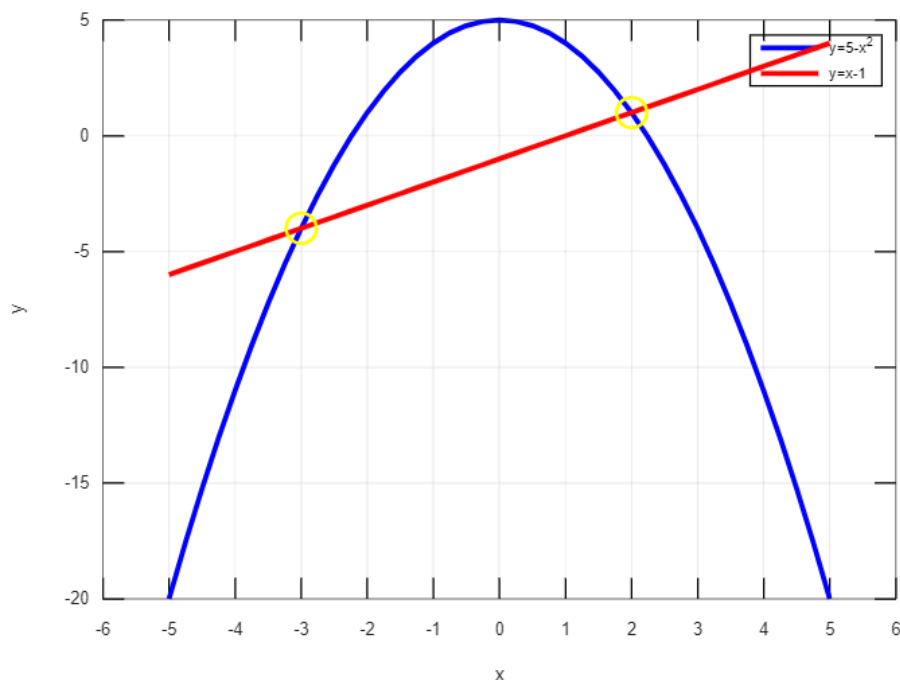


Рис.3. Межі інтегрування

За допомогою визначеного інтегралу та середовища GNU Octave обчислюємо площу криволінійної трапеції

```
>> S=int(y1-y2,'x',limits(1),limits(2))  
S = (sym) 125/6
```

7.4. Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена певними лініями навколо відповідної осі.

Відомо, що об'єм тіла, утвореного від обертання криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, де $x \in [a; b]$, навколо осі OX ,

обчислюють за формулою
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Приклад 24. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, що обмежена лініями $y = 2x$, $y = \frac{x^2}{2}$ навколо осі OX .

Розв'язання.

Побудуємо фігуру, яка утворює тіло обертання (рис.4).

```
>> x=-5:0.25:5;  
>> y1=2*x;  
>> y2=x.^2/2;  
>>plot(x,y1,'g','linewidth',2,x,y2,'r','linewidth',2);  
xlabel('x'); ylabel('y'); legend('y=2x','y=x^2/2');  
grid on
```

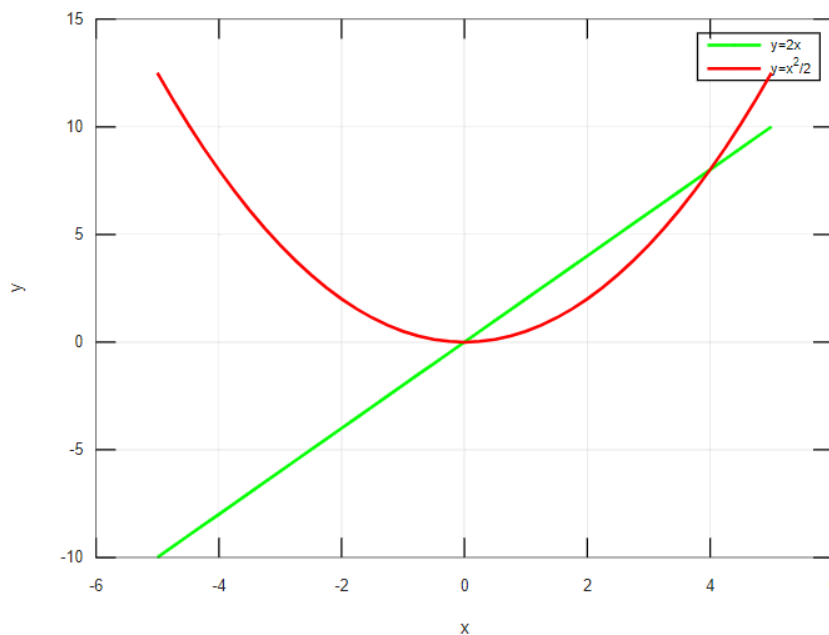


Рис.4. Лінії, що утворюють фігуру

```
>> hold on %фіксуємо вікно
```

Визначаємо границі інтегрування, розв'язавши рівняння

$$y_1(x) = y_2(x), \text{ що еквівалентно рівнянню } y_1(x) - y_2(x) = 0.$$

```
>> y1=sym('2*x')
y1 = (sym) 2*x
>> y2=sym('x^2/2')
y2 = (sym)
      2
      x
      —
      2
>> roots=solve(y1-y2)
roots = (sym 2x1 matrix)
      [0]
      [ ]
      [4]
>> limits=double([roots(1) roots(2)])
limits =
      0  4
```

Межами інтегрування є $x = 0$ та $x = 4$. Нанесемо ці точки на графік (рис.5).

```
>>plot(limits(1),double(subs(y1,'x',limits(1))),'yo',
'linewidth',4,limits(2),double(subs(y1,'x',limits(2))),
'yo','linewidth',4)
```

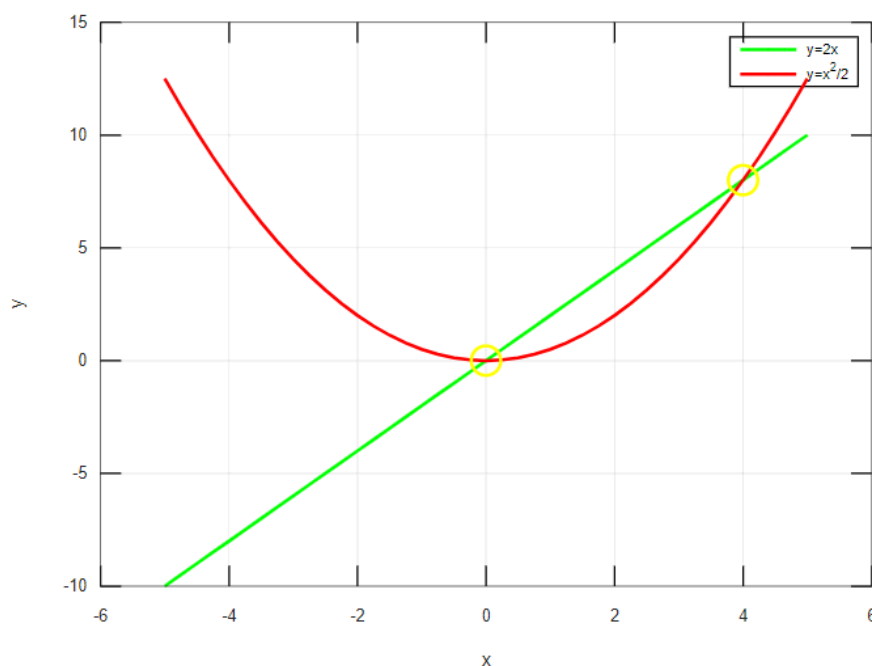


Рис.5. Межі інтегрування

За допомогою визначеного інтегралу та середовища GNU Octave обчислюємо об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис

фігури, що обмежена лініями $y = 2x$, $x = \frac{x^2}{2}$ навколо осі OX .

```
>> V=pi*int(y1^2-y2^2,'x',limits(1),limits(2))
V = (sym)
512·π
-----
15
```

Завдання для самостійної роботи

1. Обчисліть невизначені інтеграли.
2. Обчисліть визначені інтеграли.
3. Знайдіть площу криволінійної трапеції.
4. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, що обмежена лініями.
5. Зробіть звіт.

Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант 1

1. $\int \cos 7x dx$; $\int (3x-5)^6 dx$; $\int \sqrt{2x+3} dx$; $\int e^{-2x} dx$; $\int \frac{dx}{9x^2+4}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;
 $\int \frac{dx}{x(5+\ln x)}$; $\int \frac{\sin x dx}{2+7\cos x}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3-2\operatorname{tg} x)}$; $\int \frac{x^2 dx}{5-x^3}$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2+5}}$;
 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+2}}$; $\int \frac{2x+7}{x^2+7x-3} dx$; $\int \frac{x^3 dx}{9+x^8}$; $\int \frac{7\cos x dx}{2+4\sin x}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^8}}$; $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$;
 $\int e^{\sin x} \cos x dx$; $\int \frac{\sqrt{5+\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{4+\operatorname{ctg}^2 x}}$; $\int x e^{-5x^2} dx$;
 $\int (x+2)\cos x dx$; $\int x^2 e^{-x} dx$; $\int x \ln x dx$; $\int e^{2x} \sin 2x dx$.

$$2. \text{ а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}; \quad \text{ б) } \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}; \quad \text{ в) } \int_1^3 \ln x dx.$$

$$3. y = 2\sqrt{x}, \quad 6 - y = 0, \quad x = 0.$$

$$4. xy = 3, \quad x + y = 4.$$

Варіант 2

$$1. \int (2x-5)^7 dx; \int \sqrt[5]{2x+1} dx; \int e^{-7x} dx; \int \frac{dx}{9x^2+16}; \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+16}}; \int \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x}; \int \frac{14x+6}{7x^2+6x-1} dx; \int \frac{xdx}{\sqrt{9+4x^2}}; \int e^{3x} (5+e^{3x})^3 dx;$$

$$\int \frac{xdx}{4-2x^2}; \int x^2 \sqrt{3+8x^3} dx; \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-9\sin^2 x}}; \int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} dx; \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x dx}{1+x^2};$$

$$\int \frac{dx}{x(9+\ln^2 x)}; \int \frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}; \int \arcsin x dx; \int e^{2x} \cos 3x dx; \int \frac{5x-2}{x^2+4x+5} dx;$$

$$\int \frac{(2x-3)dx}{x(x+1)(x-2)}; \int \frac{(3x^2+1)dx}{(x-1)(x^2-4x+5)}; \int \frac{dx}{x^4-16}; \int \frac{\sqrt{x} dx}{7-3\sqrt{x}}; \int \frac{dx}{3-5\sin x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx; \quad \text{ б) } \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx; \quad \text{ в) } \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2};$$

$$3. y = 0, \quad y = 4(x-2), \quad y = (x-1)^2.$$

$$4. y = 0, \quad y = 2-x, \quad y = \sqrt{x}.$$

Варіант 3

$$1. \int \cos(4x-1) dx; \int (7x+1)^9 dx; \int e^{-3x+1} dx; \int \frac{dx}{6x+7}; \int \frac{dx}{4x^2-25};$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+25}; \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}}; \int \frac{x^8 dx}{7+3x^9}; \int \frac{dx}{x(\ln x+8)}; \int \frac{(2x+6) dx}{x^2+6x-9}; \int \frac{e^{5x} dx}{e^{5x}+5}; ;$$

$$\int \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{8+3\cos x}}; \quad \int e^{2x} \sqrt{7+3e^{2x}} dx; \quad \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)};$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4+\operatorname{arctg}^2 x}}; \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}; \quad \int x e^{-5x} dx; \quad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{(5x-2) dx}{x^2+6x+7};$$

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx; \quad \int \frac{(4x+3) dx}{x(x^2+2x+5)}; \quad \int \sqrt{16+x^2} dx; \quad \int \frac{dx}{5+3\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1}; \quad \text{ б) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx; \quad \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$3. y = \ln x, \quad x = e, \quad x = e^2, \quad y = 0.$$

$$4. y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

Варіант 4

$$1. \int \sin(7x+1) dx; \int (5x-7)^{10} dx; \int e^{3x} dx; \int \frac{dx}{(4x+1)^5}; \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{16x^2+9}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+16}}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\operatorname{ctg} x)^2}; \quad \int \frac{\ln^3 x dx}{x}; \quad \int \frac{e^{5x} dx}{e^{10x}+4};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+8x^3}}; \quad \int \frac{x dx}{(9+x^2)^2}; \quad \int e^x \cos(e^x) dx; \quad \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad \int x^3 e^{-x^4} dx;$$

$$\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}; \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x dx}{1+x^2}; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{9\ln^2 x+16}}; \quad \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx; \quad \int \frac{(3x+5) dx}{x^2-2x+10};$$

$$\int \frac{(3x-4) dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}; \quad \int \frac{(2x^2+x-1) dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81+x^2}}; \quad \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x}; \quad \int \frac{dx}{4+5\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx; \quad \text{ б) } \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx; \quad \text{ в) } \int_1^2 x \ln x dx.$$

$$3. y = \sqrt{4-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

4. $y = 5 \cos x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Варіант 5

1. $\int (7-9x)^{12} dx$; $\int \frac{dx}{6-5x}$; $\int \frac{dx}{4x^2+9}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$; $\int \frac{dx}{x(2+3\ln x)^2}$;

$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^5 x}$; $\int \frac{(4x+3)dx}{2x^2+3x-7}$; $\int \cos 3x(5+7\sin 3x)^5 dx$;

$\int e^{4x}\sqrt{3+e^{4x}} dx$; $\int \frac{(1+2\operatorname{tg} x)^2 dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{x(12+3\ln^2 x)}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$;

$\int (x+3)\cos 2x dx$; $\int e^{2x}\sin 2x dx$; $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2-6x+10}$; $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$;

$\int \frac{(x^2+x-1)dx}{x(x+2)(x-3)}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^2}}$; $\int \sqrt{4+x^2} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81-x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$;

$\int \sin^3 x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{4-3\cos x}$.

2. а) $\int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx$; в) $\int_1^2 \ln(x+1) dx$.

3. $y = x^2 - 2x + 3$, $y - 3x + 1 = 0$.

4. $y + x = 2$, $x^2 = y$.

Варіант 6

1. $\int \sqrt[3]{3+5x} dx$; $\int e^{-5x} dx$; $\int \frac{dx}{3-2x}$; $\int \frac{dx}{3x^2-2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{x(7+3\ln x)^2}$;

$\int \frac{\operatorname{arctg} 3x dx}{1+9x^2}$; $\int \frac{\sin 3x dx}{3\cos 3x+4}$; $\int \frac{x^3 dx}{4-x^8}$; $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}-4}$; $\int \cos 2x(5+7\sin 2x)^4 dx$;

$$\int \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad \int x^2 \cdot 4^{x^3} dx; \quad \int x^2 \sqrt{5+4x^3} dx; \quad \int \frac{x^8 dx}{\sqrt{5-x^9}}; \quad \int e^{\cos 3x} \sin 3x dx;$$

$$\int \frac{(1+3\operatorname{ctg} x)^4 dx}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}}; \quad \int x e^{-2x} dx; \quad \int e^{2x} \cos x dx; \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx;$$

$$\int \frac{(5x+4) dx}{x^2+4x+13}; \quad \int \frac{(x^2+2) dx}{x(x+3)(x-1)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{100+x^2}}; \quad \int \frac{dx}{3-7\sin x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1} dx; \quad \text{ б) } \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx; \quad \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

$$3. \quad y = x^2 - x, \quad y = 3x.$$

$$4. \quad y = 0, \quad y = 2x^2 + 1, \quad x = -1, \quad x = 1.$$

Варіант 7

$$1. \quad \int (2x-1)^5 dx; \quad \int \frac{dx}{3x+4}; \quad \int \frac{dx}{9x^2+1}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}; \quad \int \frac{x^5 dx}{4+5x^6}; \quad \int \frac{(6x^2+8) dx}{x^3+4x-2};$$

$$\int \frac{dx}{x \ln^4 x}; \quad \int \frac{\sqrt{2+3\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(2+x^5)^3}}; \quad \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}-4}; \quad \int \ln(x^2+3) dx;$$

$$\int \frac{(2x+3) dx}{x^2+8x+17}; \quad \int \frac{(4x-3) dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}; \quad \int \frac{(3x^2+x+2) dx}{x(x+1)(x-1)}; \quad \int \frac{3x dx}{(x+1)^2(x+2)};$$

$$\int \frac{(5x-6) dx}{(x^2+6x+18)(x-1)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{x^4-16}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \int \sqrt{16+x^2} dx; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16+x^2}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{5-7\sqrt{x}}; \quad \int \operatorname{tg}^4 x dx; \quad \int \sin^4 x \cos^2 x dx; \quad \int \cos^7 x dx; \quad \int \frac{dx}{5+3\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx; \quad \text{ б) } \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx; \quad \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin x}.$$

$$3. \quad y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2.$$

4. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Варіант 8

1. $\int (6-7x)^7 dx$; $\int \frac{dx}{4x^2+49}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}$; $\int \frac{dx}{x(5+6\ln x)^2}$; $\int \frac{\arcsin^5 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$; $\int \frac{e^{5x} dx}{\sqrt{1+e^{5x}}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+5x^3}}$; $\int \frac{(2+5\operatorname{tg} x)^4 dx}{\cos^2 x}$; $\int x^3 e^{-x^4} dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{9-\operatorname{tg}^2 x}}$; $\int x^5 \sqrt{8-4x^6} dx$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$; $\int e^{3x} \sin x dx$; $\int \frac{(2x+3) dx}{x^2-2x+8}$;

$\int \frac{(2x-3) dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$; $\int \frac{(x^3+x-1) dx}{(x+1)(x+2)}$; $\int \frac{(2x-3) dx}{x^2(x+1)}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81-x^2}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81+x^2}}$;

$\int \frac{(1+\sqrt{x}) dx}{4+\sqrt{x}}$; $\int \sin^5 x dx$; $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

2. а) $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; в) $\int_1^2 \ln(x+2) dx$.

3. $y = (x-4)^2$, $y = 16-x^2$, $y = 0$.

4. $y = x^3$, $y = x$.

Варіант 9

1. $\int \sqrt{4x+1} dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int \frac{dx}{(3x-7)^2}$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arccotg}^2 x}$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x(3+5\operatorname{tg} x)}$; $\int \frac{(12x-16) dx}{3x^2-8x+1}$; $\int \frac{\ln^4 x dx}{x}$; $\int \frac{x^3 dx}{x^8+4}$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{16+25x^2}}$;

$\int \frac{e^{-2x} dx}{1-e^{-4x}}$; $\int x^2 \sqrt{3+x^3} dx$; $\int x^2 e^{-4x^3} dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$; $\int \frac{x^3 dx}{2-9x^4}$;

$$\int \frac{xdx}{4-x^4}; \int \frac{\sqrt{5-\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}; \int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int \frac{dx}{x(25+\ln^2 x)}; \int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}};$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx; \int \frac{(4x+3)dx}{x^2-6x+10}; \int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{-x^2+2x+4}}; \int \frac{(4x^2+5)dx}{x^2(x-2)};$$

$$\int \frac{(7x+2)dx}{x(x^2+6x+18)}; \int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{2x+\sqrt{x}}.$$

$$2. \text{ а) } \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx; \text{ б) } \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}; \text{ в) } \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$3. y = 2x - x^2, y + x = 0.$$

$$4. y = x^3, y = x^2.$$

Варіант 10

$$1. \int \frac{dx}{6x^2+9}; \int \frac{dx}{25x^2-4}; \int \frac{dx}{\sqrt{49x^2-4}}; \int \frac{dx}{\cos^2 x(4-3\operatorname{tg} x)}; \int \frac{dx}{x\ln^5 x};$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+3}}; \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}; \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2+x^4}}; \int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\operatorname{ctg} x}}; \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\int \ln(3x+1) dx; \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+2}; \int \frac{(5x-1)}{\sqrt{x^2-2x+17}} dx; \int \frac{(x^2+x-1)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+2)}; \int \frac{(x^3+1)dx}{x(x^2+4x+20)}; \int \frac{x^3 dx}{x^3+8}; \int \sqrt{64-x^2} dx; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^2}};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{100+x^2}}; \int \frac{(\sqrt{x}+1)dx}{7+2\sqrt{x}}; \int \operatorname{tg}^5 x dx; \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx; \int \cos^4 x dx; \int \frac{dx}{7+9\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}; \text{ в) } \int_0^1 x \ln(x+1) dx.$$

$$3. y + x^2 = 0, x + y + 2 = 0.$$

4. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Варіант 11

1. $\int \frac{dx}{2x^2 - 6}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$; $\int \frac{\arcsin^7 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg}^2 x}$; $\int \frac{\cos 2x dx}{1 - \sin 2x}$;
 $\int \frac{(5 + 3 \operatorname{tg} x)^{10} dx}{\cos^2 x}$; $\int e^{-2x} \sqrt{2 + e^{-2x}} dx$; $\int \frac{\sqrt{\ln x + 2} dx}{x}$; $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$;
 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 x}}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 4}}$; $\int \frac{2^x dx}{2^{2x} - 4}$; $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}$; $\int e^{-x} \cos 2x dx$;
 $\int \frac{(3x + 4) dx}{x^2 + 5x - 6}$; $\int \frac{(5x - 2) dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 17}}$; $\int \frac{(x^2 + 4) dx}{x(x + 2)(x - 3)}$; $\int \frac{(3x^2 + x - 1) dx}{x^2(x + 4)}$;
 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 + x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)}$; $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; $\int \sin 3x \sin 2x dx$; $\int \sin^2 3x dx$;
 $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$.

2. а) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$; б) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x + 1}}$; в) $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

3. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

4. $y = 2x - x^2$, $y = x$.

Варіант 12

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 9}}$; $\int \frac{dx}{(7 + \ln x)x}$; $\int \frac{\sin x dx}{15 + 7 \cos x}$; $\int \frac{(4 + \operatorname{ctg} x) dx}{\sin^2 x}$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{8x^2 + 5}}$;
 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}$; $\int \frac{\sqrt{3 + \operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x(4 + \operatorname{ctg}^2 x)}$; $\int \frac{dx}{x(2 - \ln^2 x)}$;
 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$; $\int \frac{(5x + 1) dx}{x^2 - 2x + 10}$; $\int \frac{(6x - 5) dx}{x^2 + 2x - 15}$; $\int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx$;

$$\int \frac{4x-1}{\sqrt{9-2x-x^2}} dx; \quad \int \frac{(2x^2+x-1)dx}{x(x+1)(x-3)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{(x+2)(x+1)^2}; \quad \int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x+1)};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{49-x^2}}; \quad \int \sqrt{16+x^2} dx; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16+x^2}}; \quad \int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{2\sqrt{x+x}}; \quad \int \sin^4 x dx;$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx; \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx; \quad \int \frac{dx}{3-2\sin x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_1^e \frac{dx}{x(1-\ln^2 x)}; \quad \text{ б) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx; \quad \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$3. \quad y = (x+1)^2, \quad y^2 = x+1.$$

$$4. \quad y = 2x - x^2, \quad y = 2x, \quad y = 1.$$

Варіант 13

$$1. \quad \int \sqrt[5]{(2x-1)^2} dx; \quad \int \frac{dx}{6x^2+9}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x(4-3\operatorname{ctg} x)};$$

$$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+5}; \quad \int \frac{dx}{x \ln^9 x}; \quad \int \frac{6\sin x dx}{15-\cos x}; \quad \int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx; \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+2}}; \quad \int \frac{\sqrt{1+3\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx;$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}+4}; \quad \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x}+9}}; \quad \int (3x-2)\sin 3x dx; \quad \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad \int \frac{(5x-4)dx}{x^2-6x+10};$$

$$\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}; \quad \int \frac{(x^2+3)dx}{(x+2)^2(x+1)}; \quad \int \frac{(6x-7)dx}{x(x^2+4x+20)}; \quad \int \sqrt{81-x^2} dx;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \int \frac{\sqrt{x} dx}{2\sqrt{x}+3}; \quad \int \operatorname{ctg}^5 x dx; \quad \int \sin^4 x dx; \quad \int \frac{dx}{7+9\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx; \quad \text{ б) } \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx; \quad \text{ в) } \int_1^3 (x+1)e^x dx.$$

$$3. \quad y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

4. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Варіант 14

1. $\int \frac{dx}{2x^2 - 18}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 49}}$; $\int \frac{dx}{x(4 - \ln x)}$; $\int \frac{\cos 2x dx}{5 + 3\sin 2x}$; $\int \frac{(2 + 5\operatorname{ctg} x) dx}{\sin^2 x}$;;
 $\int \frac{xdx}{\sqrt{16x^2 + 1}}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 3}}$; $\int \frac{6\sin 2x dx}{(8 - 5\cos 2x)^2}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(9 + \operatorname{tg}^2 x)}$; $\int \frac{\sqrt{4 - \operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$
; $\int \frac{dx}{x(1 - \ln x)^3}$; $\int \arcsin x dx$; $\int \frac{3x - 7}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} dx$; $\int \frac{(2x + 5) dx}{x(x - 2)(x + 4)}$;;
 $\int \frac{(3x - 2) dx}{x^2(x - 1)}$; $\int \frac{xdx}{x^3 + 8}$; $\int \sqrt{4 - x^2} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\int \sqrt{4 + x^2} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$;
 $\int \frac{(\sqrt{x + 1}) dx}{5 - 6\sqrt{x}}$; $\int \operatorname{tg}^6 x dx$; $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$; $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$; $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$.

2. а) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$; б) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$; в) $\int_1^e (x + 1) \ln x dx$.

3. $y = \frac{5}{x}$, $y + x = 6$.

4. $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Варіант 15

1. $\int \frac{dx}{25x^2 - 4}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 + 4}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin^3 x}$; $\int \frac{(3 + 4\operatorname{ctg} x)^2 dx}{\sin^2 x}$;
 $\int \frac{dx}{(x + 1)\ln(x + 1)}$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2 + 4}}$; $\int e^{4x} (7 + e^{4x})^3 dx$; $\int x^2 \sqrt{8 - 5x^3} dx$;
 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{9 - 4\cos^2 x}} dx$; $\int \cos 2x \sqrt{(5 - \sin 2x)^5} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x dx}{1 + x^2}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{49 + \ln^2 x}}$;

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}}; \quad \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+5x+4}; \quad \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{7+2\cos x}}; \quad \int \frac{6x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx;$$

$$\int \frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x+1)(x-3)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{121-x^2}}; \quad \int \frac{dx}{(\sqrt{x}-9)\sqrt{x}}; \quad \int \frac{(x^2+5x-1)dx}{x(x^2+2x+17)};$$

$$\int \frac{(2-x^2)dx}{x^3+64}; \quad \int \operatorname{tg}^5 x dx; \quad \int \cos x \sin^7 x dx; \quad \int \sin 2x \cos 5x dx; \quad \int \frac{dx}{3-5\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx; \quad \text{ б) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}; \quad \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx.$$

$$3. \quad y = \frac{x^2}{2} - x + 2, \quad y = x, \quad x = 0.$$

$$4. \quad x^2 = 8y, \quad 2y - 3x + 8 = 0.$$

Варіант 16

$$1. \quad \int \frac{dx}{1+25x^2}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+1}}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x (1+\operatorname{tg} x)^2}; \quad \int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{\sin 2x dx}{\cos 2x};$$

$$\int \frac{\ln^7 x dx}{x}; \quad \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+81}; \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^7 x dx}{(1+x^2)}; \quad \int 5^{\sin x} \cos x dx; \quad \int \frac{dx}{(4-\ln^2 x)x};$$

$$\int \frac{3x-4}{x^2-2x+5} dx; \quad \int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx; \quad \int \frac{(2x-5)dx}{(x-2)(x+1)(x+3)}; \quad \int \frac{(x^2+5)dx}{x^2(x-1)};$$

$$\int \sqrt{100-x^2} dx; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \sqrt{100+x^2} dx; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \int \frac{(2-\sqrt{x})dx}{2\sqrt{x}-x};$$

$$\int \frac{(2x+8)dx}{x^2+8x-1}; \quad \int \frac{\cos x dx}{6-5\sin x}; \quad \int \cos^7 x dx; \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx; \quad \int \sin^4 x \cos^2 x dx;$$

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x}.$$

2. а) $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; в) $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$.

3. $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

4. $y = \sin 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Варіант 17

$$\begin{aligned}
& 1. \int 2^{-2x} dx; \quad \int \sqrt[3]{(2-3x)^5} dx; \quad \int \frac{dx}{6x^2-12}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}; \quad \int \frac{dx}{x(7-2\ln x)}; \\
& \int \frac{dx}{(1+x^2)\arctg^3 x}; \quad \int e^{4x}\sqrt{7-e^{4x}} dx; \quad \int x^2\sqrt{7+3x^3} dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\ctg^2 x}}; \\
& \int \frac{(1+5\ctg x)^6 dx}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{3+7\cos x}; \quad \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x}-25}}; \quad \int \frac{7x-2}{x^2+4x+29} dx; \\
& \int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2-8x+15}}; \quad \int \frac{(5x-3)dx}{x(x-1)(x-2)}; \quad \int \frac{x^5 dx}{(x-3)(x-1)}; \quad \int \frac{(x+3)dx}{x^2(x^2-4x-5)}; \\
& \int \frac{dx}{x^3-8}; \quad \int \frac{2x^2 dx}{x^4-81}; \quad \int \sqrt{4-x^2} dx; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+x^2}}; \quad \int \sqrt{4+x^2} dx; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}; \\
& \int \frac{3\sqrt{x} dx}{7-\sqrt{x}}; \quad \int \sin^3 x \cos^4 x dx.
\end{aligned}$$

$$2. \text{ а) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 4x dx; \quad \text{ б) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{9+16x}}; \quad \text{ в) } \int_0^1 x e^{2x} dx.$$

$$3. y = x^2 - x, \quad y = 3x.$$

$$4. x^2 = 4y, \quad x + y = 3, \quad x = 0.$$

Варіант 18

$$\begin{aligned}
& 1. \int \frac{dx}{4x^2+1}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}; \quad \int \frac{x^6 dx}{4+7x^7}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x(6+3\ctg x)}; \quad \int \frac{\cos 2x dx}{3+5\sin 2x}; \\
& \int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x-8}; \quad \int e^x \sqrt{8+5e^x} dx; \quad \int \frac{dx}{1+\sin x}; \quad \int \frac{x dx}{x^4+1}; \quad \int \frac{e^{18x} dx}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^4}}; \\
& \int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\ctg x}}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-\tg^2 x}}; \quad \int (2x-1)\sin 4x dx; \quad \int x^2 \ln x dx;
\end{aligned}$$

$$\int \ln^2 x dx; \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx; \int \frac{(2x+9)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}; \int \frac{(4x+5)dx}{x^2+8x+17}; \int \frac{(x^2+5)dx}{x(x+1)(x+3)};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-2)^2(x-1)}; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}; \int \sqrt{9+x^2} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}; \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + \operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$$

$$3. \quad y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2x.$$

$$4. \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$$

Варіант 19

$$1. \int \frac{dx}{6x^2+5}; \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-81}}; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}; \int \frac{e^x dx}{(e^x+3)^2}; \int \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$\int \frac{7x-2}{7x^2-4x+1} dx; \int \frac{(1+2\operatorname{tg} x)^4 dx}{\cos^2 x}; \int \frac{dx}{x(2+5\ln x)^3}; \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1+2^{2x}}};$$

$$\int \frac{(5x-1)dx}{x^2+4x+29}; \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-8x+15}} dx; \int \frac{3x-1}{\sqrt{15+8x-x^2}} dx; \int \frac{(4x-7)dx}{x^2+8x+15};$$

$$\int \frac{(x^2+2)dx}{x(x-1)(x-4)}; \int \frac{(x^4+2)dx}{(x+3)(x+1)}; \int \frac{(2x+1)dx}{x^2(x^2-4x+5)}; \int \frac{x^3 dx}{x^3-1}; \int \frac{dx}{x^4-16};$$

$$\int \sqrt{16-x^2} dx; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16+x^2}}; \int \sqrt{16+x^2} dx; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}; \int \frac{(2\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt{x-x}};$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx; \int \frac{dx}{3-7\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^1 x\sqrt{1+2x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 2x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

$$3. \quad y^2 = 2x+1, \quad x-y-1=0.$$

$$4. \quad y = 2\sqrt{x-1}, \quad y = 4\sqrt{x-1}, \quad x = 2.$$

Варіант 20

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-49x^2}}$; $\int \frac{dx}{1+3x^2}$; $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)^3 dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^4 x}$;
 $\int \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$; $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}+1}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-5x^3}}$; $\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx$; $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2-5\cos 2x}}$;
 $\int \frac{\operatorname{arctg}^6 x dx}{1+x^2}$; $\int \frac{dx}{x(81-\ln^2 x)}$; $\int e^{6x} \sin 3x dx$; $\int \frac{2x-5}{x^2-2x+26} dx$;
 $\int \frac{(4x+3) dx}{\sqrt{x^2-2x+26}}$; $\int \frac{(x^2+x-1) dx}{x(x-1)(x+2)}$; $\int \frac{(x^3+x-12) dx}{x(x+2)}$; $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$;
 $\int \frac{x dx}{x^3+64}$; $\int \sqrt{144-x^2} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int \frac{\sqrt{x} dx}{2\sqrt{x}-3}$; $\int \sin^4 x dx$;
 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$.
2. а) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$.
3. $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, $x = 1$.
4. $y + x^2 = 1$, $y - x - 1 = 0$.

Варіант 21

1. $\int \sqrt[3]{(4x-5)^2} dx$; $\int \frac{dx}{4x^2+1}$; $\int \frac{dx}{9x^2-4}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x(2-5\operatorname{ctg} x)}$;
 $\int \frac{\cos x dx}{4\sin x+7}$; $\int \frac{(2x+6) dx}{x^2+6x-7}$; $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}$; $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+4}}$; $\int \frac{\sqrt{1+3\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}$;
 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$; $\int x^6 \ln x dx$; $\int e^x \cos 3x dx$; $\int \frac{(2x-5) dx}{x^2-3x-7}$; $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-3x-7}} dx$;

$$\int \frac{(x^2 + 5)dx}{x(x+1)(x-2)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+2)}; \quad \int \frac{(5x+7)dx}{x(x^2 + 4x + 20)}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+x^2}}; \quad \int \frac{\sqrt{x} dx}{3+4\sqrt{x}}; \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}; \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx; \quad \int \frac{dx}{8+7 \cos x}.$$

$$2. \quad \text{а) } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}}; \quad \text{б) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$3. \quad y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$$

$$4. \quad y = x^3, \quad y = 4x.$$

Варіант 22

$$1. \quad \int \frac{dx}{4x^2 + 121}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{121 - 4x^2}}; \quad \int \frac{dx}{x(10 + \ln x)}; \quad \int \frac{\cos 7x dx}{3 + 5 \sin 7x}; \quad \int \frac{2x+1}{1-x-x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{2 - \operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}; \quad \int e^{\sin 3x} \cos 3x dx; \quad \int \frac{dx}{x(10 + \ln x)^2}; \quad \int \frac{e^{3x} dx}{100 + e^{6x}}; \quad \int x e^{-3x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 16}; \quad \int \frac{\cos x dx}{16 - \sin^2 x}; \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{16 + \sin^2 x}}; \quad \int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx; \quad \int x^5 \ln x dx;$$

$$\int \frac{(4x+5)dx}{x^2 - 2x - 8}; \quad \int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} dx; \quad \int \frac{3x+5}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x+1} dx}{5+2\sqrt{x+1}};$$

$$\int \frac{(x-7)dx}{x^2 - 2x + 17}; \quad \int \frac{(3x^2 + 5)dx}{x(x+4)(x-2)}; \quad \int \frac{(3x+2)dx}{(x-2)x^2}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{100-x^2}}; \quad \int \sqrt{49+x^2} dx;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{49+x^2}}.$$

$$2. \quad \text{а) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{x^2-1} dx; \quad \text{б) } \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx; \quad \text{в) } \int_1^e x \ln x dx.$$

$$3. \quad y^2 = 4x; \quad x^2 = \frac{1}{2}y, \quad x = 0.$$

$$4. \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad y = 0.$$

Варіант 23

1. $\int \frac{dx}{16x^2 - 121}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{121 - 16x^2}}$; $\int \frac{x^7 dx}{4 + 5x^8}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(4 - 7tg x)}$; $\int \frac{e^{ctg x} dx}{\sin^2 x}$;
 $\int \frac{(x+2)dx}{x^2 + 4x - 9}$; $\int \sin x(8 - 3\cos x)^4 dx$; $\int \frac{dx}{x \ln^7 x}$; $\int e^x \sqrt{1 - 2e^x} dx$; $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}$;
 $\int \frac{2^x dx}{1 + 2^{2x}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1 + 2ctg x}}$; $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin^2 2x + 4}}$; $\int \frac{e^x \arctg e^x dx}{1 + e^{2x}}$; $\int \frac{(7x - 2) dx}{x^2 - 3x + 2}$;
 $\int \frac{(7x + 1) dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; $\int \frac{(x^2 + 4) dx}{(x + 2)^2 (x + 1)}$; $\int \frac{(x^2 + x - 1) dx}{x(x - 1)(x + 3)}$; $\int \sqrt{81 - x^2} dx$;
 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81 - x^2}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\int \frac{\sqrt{x + 1} dx}{5 + 2\sqrt{x + 1}}$; $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$; $\int ctg^5 x dx$; $\int \frac{dx}{7 + 9\cos x}$.
 2. а) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x} dx}{1 + e^{3x}}$; б) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$; в) $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$.
 3. $y = (x - 1)^2$, $y^2 = x - 1$.
 4. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Варіант 24

1. $\int \frac{dx}{9x^2 + 100}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 100}}$; $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x(7 - 8ctg x)}$; $\int \frac{\ln^5 dx}{x}$;
 $\int \frac{(5x + 4) dx}{5x^2 + 8x - 1}$; $\int \frac{x dx}{x^4 + 100}$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 100}}$; $\int e^{3x} (3 + 5e^{3x})^4 dx$; $\int \frac{e^{-x} dx}{e^{-2x} + 4}$;
 $\int x^2 \sqrt{6 - 7x^3} dx$; $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{100 - 9\cos^2 x}}$; $\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}$; $\int \frac{x^2 dx}{5 - 9x^3}$; $\int \frac{\cos 3x dx}{4 - 5\sin 3x}$;
 $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{9\cos^2 3x + 4}}$; $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 + x}}$; $\int e^{-5x} \cos 3x dx$; $\int \frac{(2x - 3) dx}{x^2 + 5x + 4}$;

$$\int \frac{7x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx; \quad \int \frac{(2x^2+1)dx}{(x-1)(x^2-4x+5)}; \quad \int \frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x-2)(x+3)}; \quad \int \frac{(1-x^2)dx}{x^3+8};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{49-x^2}}; \quad \int \frac{\sqrt{x+1} dx}{9+5\sqrt{x+1}}; \quad \int \operatorname{tg}^4 x dx; \quad \int \sin^7 x \cos x dx; \quad \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x};$$

$$\int \frac{dx}{7-5\cos x}.$$

$$2. \quad \text{а) } \int_4^5 x\sqrt{x^2-16} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx.$$

$$3. \quad y = 5\cos x, \quad y = 2\cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4. \quad y = \sin 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Варіант 25

$$1. \quad \int \frac{dx}{49x^2-100}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{49x^2+100}}; \quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{2+\ln x}}; \quad \int \frac{\sin x dx}{\cos x-1}; \quad \int \frac{x^2 dx}{4x^6+1};$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+5\sin x}}; \quad \int e^{2x}\sqrt{3-7e^{2x}} dx; \quad \int \frac{\ln^5(x+1)dx}{x+1}; \quad \int x \cdot 5^{-x^2} dx; \quad \int \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} dx}{\cos^2 2x};$$

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}; \quad \int 5^{\cos 2x} \sin 2x dx; \quad \int \frac{\arcsin^2 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}; \quad \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{(4-\sin^2 2x)}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)(9+\operatorname{arctg}^2 2x)}; \quad \int e^{-x} \cos 5x dx; \quad \int \frac{(4x-7)dx}{x^2+4x-5}; \quad \int \frac{(6x-1)dx}{x^2+4x+5};$$

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x-5}} dx; \quad \int \frac{(3x^2-5)dx}{(x-1)(x+4)(x+5)}; \quad \int \frac{x^3 dx}{x^3-27}; \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{49-x^2}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{5-6\sqrt{x+1}}; \quad \int \frac{\cos^6 x dx}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{3+8\cos x}.$$

$$2. \text{ а) } \int_{-2}^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx; \quad \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx; \quad \text{ в) } \int_{-\pi}^{2\pi} x \sin 2x dx.$$

$$3. y = (x-2)^2, \quad y = 4x - 8.$$

$$4. xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$$

Варіант 26

$$1. \int \frac{dx}{2x^2 + 16}; \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 16}}; \int \frac{11x^5 dx}{13 + 10x^6}; \int \frac{2 \cos x dx}{3 + 4 \sin^2 x}; \int \frac{dx}{x(11 \ln^2 x - 16)};$$

$$\int \frac{5 dx}{(2 + tg^2 x) \cos^2 x}; \int \frac{\sqrt{\arctg x} dx}{1 + x^2}; \int \frac{(7 - 8x) dx}{-4x^2 + 7x - 10}; \int \frac{e^x dx}{\sqrt{3 + e^x}}; \int x^2 e^{x^3} dx;$$

$$\int 8^{x^4} x^3 dx; \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{x^4 + 1}}; \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[3]{e^{2x} + 5}}; \int (2x - 3) \sin 3x dx; \int 2^x \sin x dx;$$

$$\int \frac{3 - 5x}{x^2 - 2x + 8} dx; \int \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 8}} dx; \int \frac{(x^2 + x - 1) dx}{x(x + 2)(x - 3)}; \int \frac{(x^2 + 5x - 1) dx}{x(x^2 + 2x + 1)};$$

$$\int \frac{(1 - x^2) dx}{1 + x^3}; \int \sqrt{9 - x^2} dx; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}; \int \frac{2 + \sqrt{x} dx}{3 - 2\sqrt{x}}; \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}; \int \frac{dx}{1 + 2 \cos x};$$

$$2. \text{ а) } \int_e^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx; \quad \text{ б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{ в) } \int_0^{2\pi} (2x - 5) \cos 2x dx.$$

$$3. y = -x^2 - 2x + 3, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

$$4. y = \frac{3}{x}, \quad y = 5 - 3x.$$

Варіант 27

$$1. \int \frac{dx}{(4 - 7x)^5}; \int \frac{dx}{\sqrt{20 - 9x^2}}; \int \frac{dx}{9x^2 + 20}; \int \frac{\arccos^5 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \int \frac{2x - 3}{x^2 + 3x - 10} dx;$$

2. $\int \frac{\sin 4x dx}{(\cos 4x - 5)^3}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9x^3 + 2}}$; $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^{2x} + 5)^4}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 5}}$; $\int \frac{\sqrt[3]{(6 + \ln x)} dx}{x}$;
- $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt[3]{\sin 5x - 3}}$; $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 25}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{25 - x^8}}$; $\int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5)^2 dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{4^{\ln 2x}}{x} dx$;
- $\int \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{\sin^2 x} dx$; $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1 + x^2} dx$; $\int \frac{7e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; $\int x \cdot 8^{x^2} dx$; $\int x \sqrt[4]{2 - x^2} dx$;
- $\int \frac{3x + 1}{x(x - 2)(x - 1)} dx$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 49}}$; $\int \frac{24}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$; $\int \frac{\sin^2 3x}{\cos 3x} dx$; $\int \cos^4 2x dx$.
3. а) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{(x^2 + 2 \sin x)^3} dx$; б) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1 + 3x}}$; в) $\int_1^9 x \ln^2 x dx$.
4. $y = 3x - x^2$, $5x - y - 8 = 0$.
5. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Варіант 28

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{18 - 9x^2}}$; $\int \frac{dx}{9x^2 + 18}$; $\int \frac{x^2 dx}{(9x^3 + 2)^4}$; $\int \frac{\sqrt{\arcsin x} dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\int \frac{(6x - 4) dx}{3x^2 - 4x + 1}$;
- $\int \sin x \sqrt[4]{(1 - 3 \cos x)} dx$; $\int x e^{-x^2} dx$; $\int \frac{(3 \operatorname{tg} x - 8)^3 dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{8 - e^{2x}}}$; $\int \frac{x^2 dx}{8 + x^6}$;
- $\int \frac{dx}{x(5 + 6 \ln x)^2}$; $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{2 \sin x + 3}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7 + 5x^3}}$; $\int \sin 2x \cdot 12^{\cos 2x} dx$; $\int \frac{\operatorname{ctg}(\ln x)}{x} dx$;
- $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 16}}$; $\int x^2 \arccos x dx$; $\int \operatorname{arcctg}(1 - 2x) dx$; $\int \frac{x}{x^2 + x - 2} dx$;
- $\int \frac{7 + 4x}{\sqrt{x^2 + 6x - 8}} dx$; $\int \frac{(16x - 27) dx}{(x - 2)^2 (x + 3)}$; $\int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} dx$; $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$; $\int \sin^2 9x dx$.

$$2. \text{ а) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx; \quad \text{б) } \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\ln 2}{3}} (5x-2)e^{3x} dx.$$

$$3. y^2 = 16x, \quad y = x.$$

$$4. y = \cos x, \quad y = 0, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Варіант 29

$$1. \int \frac{dx}{(9x-5)^8}; \int \frac{dx}{\sqrt{18-15x^2}}; \int \frac{dx}{15x^2-18}; \int \frac{(8x-9)dx}{4x^2-9x+2}; \int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt[3]{\cos 5x-3}};$$

$$\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \sqrt{1-x^2}}; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{9x^3-4}}; \int \frac{e^{4x} dx}{e^{8x}+8}; \int \frac{(3-2 \operatorname{tg} x)^2 dx}{\cos^2 x}; \int \frac{dx}{x(5-6 \ln x)^2};$$

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2} dx; \int \frac{e^x dx}{\sqrt{10-e^{2x}}}; \int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx; \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x+1} dx}{1+x^2}; \int \frac{1}{x \ln^3 x} dx;$$

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx; \int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-4x-1}} dx; \int \frac{(x^2-x-6)dx}{(x-1)(x^2+6x+5)}; \int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x+2)^2};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-81}}; \int \frac{\sqrt{x} dx}{2x-1}; \int \sin^4 4x \cos^3 4x dx; \int \operatorname{ctg}^{-4} 2x dx; \int \cos 4x \cos 5x dx;$$

$$\int \sin^2 7x dx.$$

$$2. \text{ а) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx; \quad \text{б) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-16x) \sin 4x dx.$$

$$3. y = \frac{1}{2}x^2, \quad 4x - 2y + 5 = 0.$$

$$4. y = \frac{4}{x}, \quad y = 0, \quad x = 3, \quad x = 12.$$

Варіант 30

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{15-9x^2}}; \int \frac{dx}{9x^2+15}; \int \frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+8}; \int \frac{\arcsin^4 x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int \frac{2^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{2+tg x}}{\cos^2 x} dx; \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx; \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5-1}}; \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2\sqrt{x}} dx; \int \frac{5e^{2tg x}}{\cos^2 x} dx;$$

$$\int \frac{\arctg^6 x}{1+x^2} dx; \int x^2 \sqrt[3]{5+x^3} dx; \int \frac{\sqrt[3]{ctg x}}{\sin^2 x} dx; \int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x} dx; \int \frac{dx}{2x(5-6\ln x)^3};$$

$$\int \frac{\arcsin 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}; \int \frac{(x+2)dx}{x^2+3x-4}; \int \frac{x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx; \int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx; \int \frac{(4x+1)dx}{x^3+4x};$$

$$\int \frac{x+8}{x(x-4)(x+1)} dx; \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}; \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx; \int ctg^3 2x dx; \int \cos^3 2x \sin^5 2x dx.$$

$$2. \text{ а) } \int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x^2+1)^2}; \quad \text{ б) } \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}; \quad \text{ в) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \arctg(4x-1) dx.$$

$$3. y = -4x^3, \quad y = -x.$$

$$4. y = x^2, \quad x = y^2.$$

Контрольні питання

1. Яка функція використовується для обчислення інтегралів? Що є її аргументами у разі обчислення невизначеного та визначеного інтеграла?
2. За яким алгоритмом знаходять площу фігури, що обмежена заданими лініями?
3. За яким алгоритмом знаходять об'єм тіла, що утворене шляхом обертання фігури навколо осі OX ?
4. Як знайти межі інтегрування при обчисленні площі криволінійної трапеції або об'єму тіла обертання та нанести їх на графік?