Лабораторна робота №5

Диференціальне числення функції однієї змінної в середовищі GNU Octave

Мета заняття:

За допомогою середовища GNU Octave виконати

- Обчислення похідної функції
- Обчислення похідної функції в точці
- Обчислення похідної функції, що задана неявно
- Обчислення похідної функції, що задана параметрично
- Побудова графіка функції

Застосування граничного аналізу є характерним для усієї маржиналістської економічної теорії. Такі поняття, як гранична корисність і оптимізація економічного стану засновані на методах диференційного числення.

У середовищі GNU Octave символьний аналіз здійснюється за допомогою ППП Symbolic Math, деякі функції якого призначені для розв’язування задач математичного аналізу, а саме, для обчислення похідних математичних функцій.

5.1. Обчислення похідної функції

За допомогою функції `diff` можна обчислити похідні явної функції, неявної функції та функції, що задана параметрично. Можна обчислити як перші похідні, так і похідні вищих порядків. Першим вхідним аргументом функції `diff` є символьний вираз, що визначає функцію, яка диференціюється, другим – змінна диференціювання, а третім – порядок похідної. Для того щоб обчислити похідну деякої функції $f(x)$ необхідно послідовно виконати наступні дії:

1) задати всі символьні змінні, які використовуються в описі функції, за допомогою команди `syms` ;
2) задати функцію (або створити символьну функцію за допомогою функції `sym`, при цьому немає необхідності виконувати крок 1);
3) викликати функцію `diff`.

У таблиці 5.1 наведений опис функції `diff`.

Таблиця 5.1

Опис функції `diff`

Похідна функції	Команда GNU Octave	*Опис команди*
$f'(x)$	`diff(f)`, `diff(f,'x')`	За замовчуванням x є змінною функції. Якщо не вказується порядок похідної, то обчислюється похідна першого порядку
$f'(x,a)$	`diff(f,'a')`	Для функцій, які залежать від змінної x, і від параметру a, за яким знаходять першу похідну
$f^{(n)}(x)$	`diff(f,'x',n)`, `diff(f,n)`	Похідна n-го порядку за змінною x
$f^{(n)}(x,a)$	`diff(f,'a',n)`	Похідна n-го порядку за змінною a

Зауваження 1: при обчислюванні декількох границь не обов’язково кожен раз оголошувати змінні та параметри, якщо раніше вони вже були описані.

Зауваження 2: для уникнення плутанини при роботі з функцією `diff` рекомендується викликати її у формі `diff(f,'x',n)`.

Розглянемо декілька прикладів знаходження похідної функції.

Приклад 1. Обчисліть похідну функції

$$y = \frac{5}{x^3} + 8x^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt[4]{x} + 9x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3.$$

Розв’язання. Спочатку описуємо змінну, потім вводимо функцію і обчислюємо похідну:

```
>> syms x
>> f=sym('5/x^3+8*x^(3/4)+2*x^(1/4)+9*x*x^(2/3)-3')
```

```
f = (sym)
     3/4    4 ___        5/3        5
  8·x     + 2·\/ x  + 9·x    - 3 + ──
                                    3
                                   x
>> diff(f,'x')
ans = (sym)

       2/3    15       6          1
  15·x     -  ── +  ─────  +  ──────
               4    4 ___        3/4
              x    \/ x      2·x
```

Приклад 2. Обчисліть похідну функції $y = \dfrac{x - \sin x}{\sqrt{x}}$.

Розв’язання.

```
>> syms x
>>f=sym('(x-sin(x))/sqrt(x)')
f = (sym)
  x - sin(x)
  ──────────
      √x
>> diff(f,'x')
ans = (sym)
  1 - cos(x)   x - sin(x)
  ────────── - ──────────
      √x            3/2
               2·x
```

Приклад 3. Обчисліть похідну функції $y = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Розв’язання.

```
>> syms x
>> f=sym('x^3*atan(x)')
f = (sym)
   3
  x ·atan(x)
```

```
>>  diff(f,'x')
ans = (sym)
      3
     x           2
   ────── + 3·x ·atan(x)
    2
   x  + 1
```

Приклад 4. Обчисліть похідну функції $y=\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

Розв'язання.

```
>> syms x
>> f=sym('(x^3-1)*(x^2+x+1)')
f = (sym)
 ⎛ 3    ⎞ ⎛ 2        ⎞
 ⎝x  - 1⎠·⎝x  + x + 1⎠

>> diff(f,'x')
ans = (sym)
     2 ⎛ 2        ⎞               ⎛ 3    ⎞
  3·x ·⎝x  + x + 1⎠ + (2·x + 1)·⎝x  - 1⎠
```

Приклад 5. Обчисліть похідну функції $y=\sin(3x+1)$.

Розв'язання.

```
>> syms x
>> f=sym('sin(3*x+1)')
f = (sym) sin(3·x + 1)
>> diff(f,'x')
ans = (sym) 3·cos(3·x + 1)
```

Приклад 6. Обчисліть похідну функції $y=(1-x^4-x^8)^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання.

```
>> syms x
>>f=sym('(1-x^4-x^8)^(-1/2)')
f = (sym)
```

```
           1
  ──────────────────
     _______________
    /     8     4
  \/   - x   - x   + 1

>> diff(f,'x')
ans = (sym)

         7       3
    4·x   + 2·x
  ──────────────────
  ⎛                ⎞3/2
  ⎜    8     4     ⎟
  ⎝- x   - x   + 1 ⎠
```

Приклад 7. Обчисліть похідну функції $y = \left(\cos 3x + arc\sin^2 \sqrt{x}\right)^3$.

Розв'язання.

```
>> syms x
>> f=sym('(cos(3*x)+(asin(sqrt(x)))^2)^3')
f = (sym)

  ⎛                        ⎞3
  ⎜                   2    ⎟
  ⎝cos(3·x) + asin (√x)   ⎠

>> diff(f,'x')
ans = (sym)
                                                                  2
⎛                   3·asin(√x)  ⎞ ⎛                      2     ⎞
⎜-9·sin(3·x) + ─────────────────⎟·⎝cos(3·x) + asin (√x)⎠
⎜                    _______    ⎟
⎝              √x·\/ 1 - x     ⎠
```

Приклад 8. Обчисліть похідну функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання.

```
>> syms x
```

```
>> f=sym('exp(-x^2)')
f = (sym)

     2
   -x
  e

>> diff(f,'x')
ans = (sym)

          2
        -x
  -2·x·e
```

5.2. Обчислення похідної функції в точці

Для того, щоб знайти значення похідної функції в точці, необхідно застосувати команду `subs(вираз,змінна,точка)`.

Приклад 9. Обчисліть похідну функції $y = x^2 - 3x + 4$ в точці $x = 1$.

Розв'язання.

```
>> syms x
>> f=sym('x^2-3*x+4')
f = (sym)

   2
  x  - 3·x + 4

>> df=diff(f,'x')
df = (sym) 2·x - 3
>> subs(df,'x',1)
ans = (sym) -1
```

Приклад 10. Необхідно скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3 + 2x - 1$ в точці з абсцисою $x = 0$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіку функції у заданій точці має вигляд:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \text{ або } y = kx + b,$$

де коефіцієнти рівняння обчислюються за формулами:

$$k = f'\left(x_0\right),\ b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0.$$

```
>> syms x
>> x0=0; %значення абсциси точки дотику
>> f=sym('x^3+2*x-1') %визначаємо функцію
f = (sym)
   3
  x  + 2·x - 1
>> f0=subs(f,'x',0) %знаходимо значення функції в точці 0
f0 = (sym) -1
>> df=diff(f,'x') %знаходимо похідну заданої функції
df = (sym)
     2
  3·x  + 2
>> df0=subs(df,'x',0) % значення похідної в точці 0
df0 = (sym) 2
>> y=sym('k*x+b') %рівняння дотичної
y = (sym) b + k·x
>> k=df0
k = (sym) 2
>> b=f0-x0*df0
b = (sym) -1
>> y=k*x+b
y = (sym) 2·x - 1
```

5.3. Обчислення похідної функції, що задана неявно

Функція, що задана неявно визначається рівнянням $F\left(x, y\right) = 0$, де вважається, що змінна y є функцією від $x: y = y\left(x\right)$. Похідна y' обчислюється за формулою $y' = -\dfrac{F_x^{'}\left(x, y\right)}{F_y^{'}\left(x, y\right)}$, де $F_x^{'}\left(x, y\right)$ – це похідна від функції $F\left(x, y\right)$ за змінною x, коли змінна y вважається параметром, і відповідно $F'_y(x,y)$ – це похідна від функції $F(x,y)$ за змінною y, коли змінна x вважається параметром.

Приклад 11. Обчисліть похідну функції $x^2y^2 = tgy$

Розв'язання.

```
>> syms x
>> F=sym('x^2*y^2-tan(y)') % визначення функції
F(x,y)
F = (sym)

   2  2
  x ·y  - tan(y)

>> dFx=diff(F,'x') % обчислення F'x
dFx = (sym)

       2
  2·x·y

>> dFy=diff(F,'y') % обчислення F'y
dFy = (sym)

     2        2
  2·x ·y - tan (y) - 1

>> dy=-dFx/dFy
dy = (sym)

              2
        -2·x·y
  ────────────────────
     2        2
  2·x ·y - tan (y) - 1
```

5.4. Обчислення похідної функції, що задана параметрично

Функцію $y=f(x)$ називають поданою в параметричній формі, якщо вона визначається за допомогою двох функцій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ від допоміжної змінної t (параметра), а саме:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

Тоді її похідна обчислюється за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад 12. Обчисліть похідну функції $\begin{cases} x = t^3 + 5\sin t, \\ y = t\cos 3t. \end{cases}$

Розв’язання.

```
>> syms t
>> x=t^3+5*sin(t)
x = (sym)
   3
  t  + 5·sin(t)

>>  y=t*cos(3*t)
y = (sym) t·cos(3·t)
>> dxt=diff(x,'t')
dxt = (sym)
     2
  3·t  + 5·cos(t)

>> dyt=diff(y,'t')
dyt = (sym) -3·t·sin(3·t) + cos(3·t)
>> dyx=dyt/dxt
dyx = (sym)

  -3·t·sin(3·t) + cos(3·t)
  ————————————————————————
         2
      3·t  + 5·cos(t)
```

5.5. Побудова графіка функції

Розглянемо побудову графіків у лінійному масштабі, для чого можна скористатися функцією `plot`. Залежно від вхідних аргументів функція `plot` дозволяє будувати один або декілька графіків, змінювати колір та стиль ліній і додавати маркери на кожен графік. Побудова простішого графіка здійснюється наступним чином:

визначається вектор значень аргументу `x`;

обчислюється вектор *y* значень функції `y(x)`;

викликається функція `plot(x,y)` для побудови графіка (в результаті чого з'являється графічне вікно, в якому зображений графік функції).

Команди для визначення вектору `x` і обчислення значень функції `y(x)` краще закінчувати крапкою з комою, щоб їх значення не виводилися у командне вікно.

Команда `plot` з'єднує точки з координатами (x_i, y_i) прямими відрізками, автоматично підбираючи масштаб кожної осі у графічному вікні.

Існує можливість за допомогою команди `plot` власноруч задати колір і стиль зображених ліній, визначаючи параметри цієї команди наступним кроком:

```
>>plot (x,y,'s')
```

де `s` є одним з наступних символів (табл.5.2)

Таблиця 5.2

Колір	Маркери	Стиль лінії
b синій g зелений r червоний c лимонний m фіолетовий y жовтий k чорний	. крапка o коло x хрестик + плюс * астериск s квадрат d ромб v трикутник (униз) ^ трикутник (уверх) < трикутник (вліво) > трикутник (вправо) p п'ятикутник h шестикутник	- суцільна : пунктирна -. штрих-пунктирна -- штрихова (none) без лінії

Змінюючи третій аргумент функції `plot`, комбінуючи кольори, стилі й маркери, можна створювати різноманітні оформлення графіків. Зазначимо, що функції, які будуються, не обов'язково визначені на однакових проміжках. У такому випадку при побудові обирається максимальний проміжок, і вся побудова відбувається на ньому.

За необхідністю побудови декількох графіків на одній координатній площині до функції `plot` передати одразу декілька функцій:

```
plot(x1,y1,x2,y2,…).
```

Також до функції `plot` можна передавати параметри, що визначають вид кривої графіка функції. Наприклад, якщо потрібно, щоб перший графік був нарисований красною лінією, а другий – синіми точками, необхідно використати функцію:

```
plot(x1,y1,'-r',x2,y2,'.b')
```

Масив даних задається так:

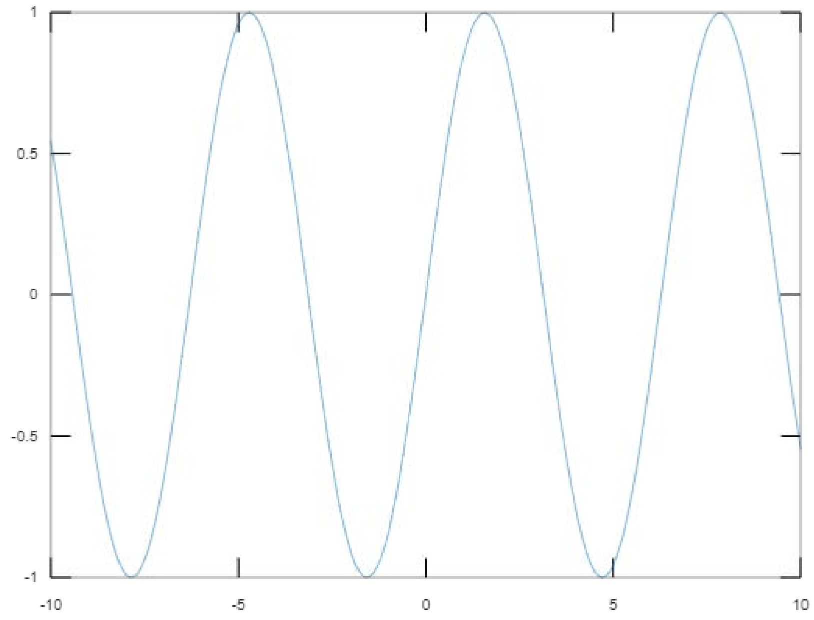
```
X=початкове значення:крок:кінцеве значення
```

Можна також використати функцію `linspace`, аргументами якої початкове значення, кінцеве значення та кількість точок між ними.

Приклад 13. Побудуйте графік функції $y = \sin x$.

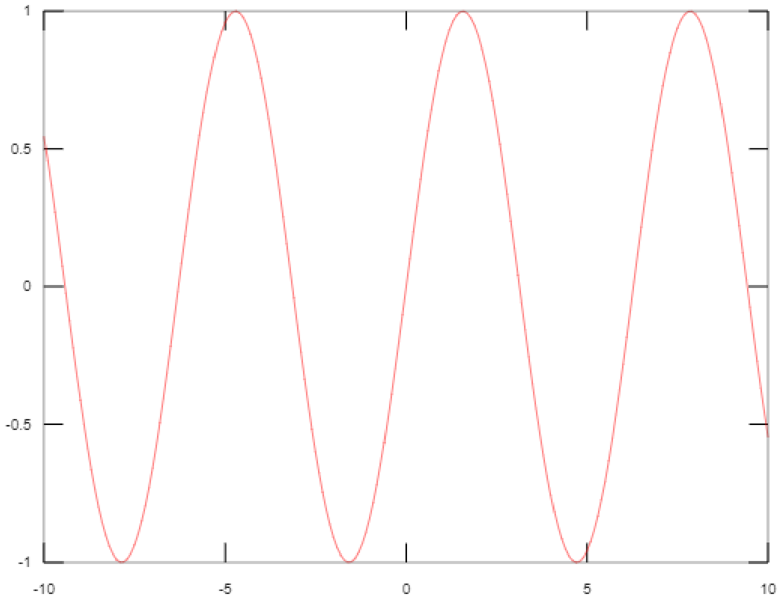
Розв'язання.

```
>> x=-10:0.1:10;
>> y=sin(x);
>> plot(x,y)
```



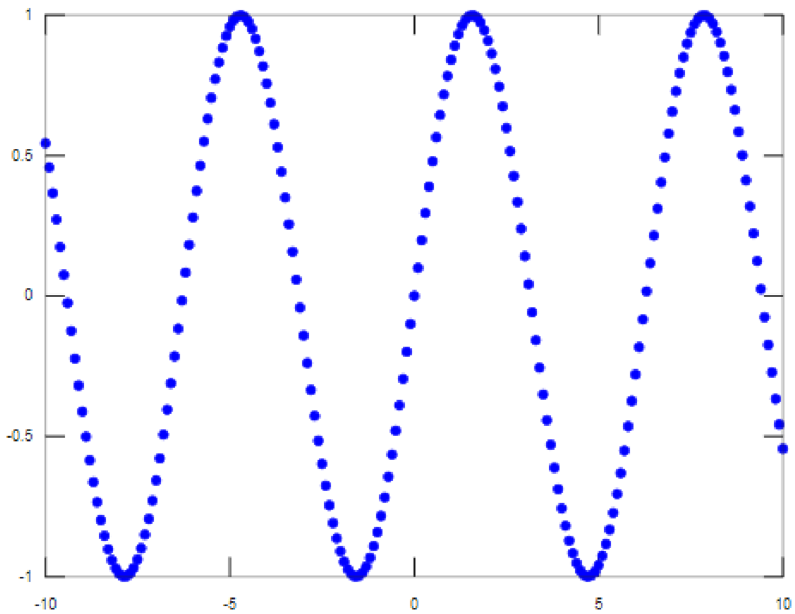
Зобразимо тепер той же самий графік лінією червоного кольору:

```
>> x=-10:0.1:10;
>> y=sin(x);
>> plot(x,y,'-r')
```



А тепер – точками синього кольору:

```
>> x=-10:0.1:10;
>> y=sin(x);
>> plot(x,y,'.b')
```



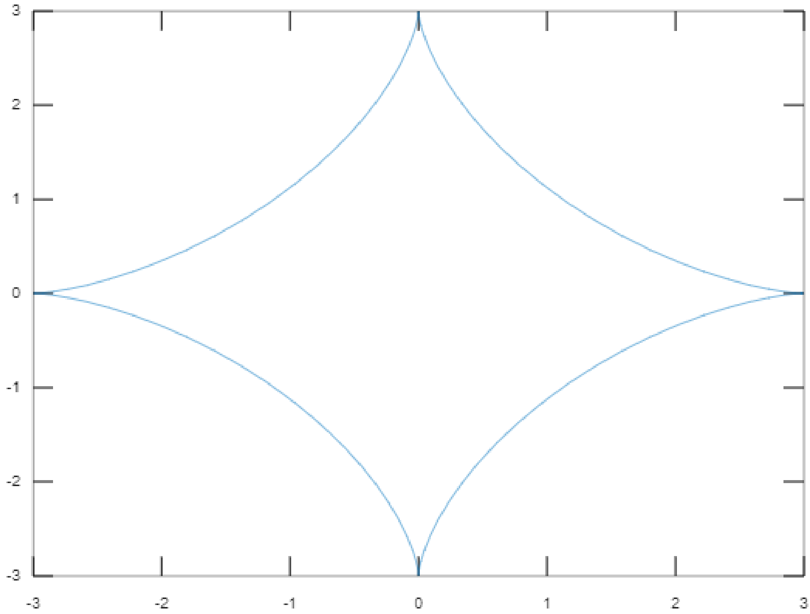
Для побудови графіків параметричних та кускових функцій також використовується функція `plot`.

Приклад 14. Побудувати графік астроїди, яка задана рівнянням:

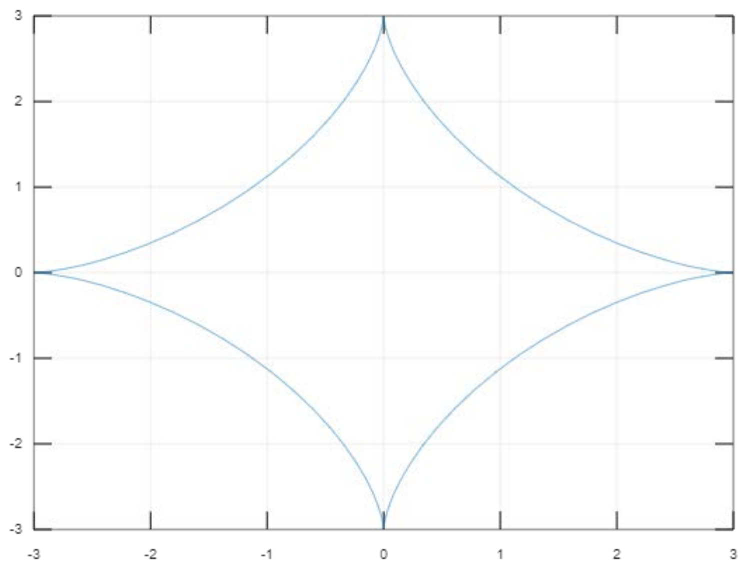
$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \\ t \in [0;\ 2\pi]. \end{cases}$$

Розв'язання.

```
>> t=0:pi/50:2*pi;
>> x=3*cos(t).^3;
>> y=3*sin(t).^3;
>> plot(x,y)
```

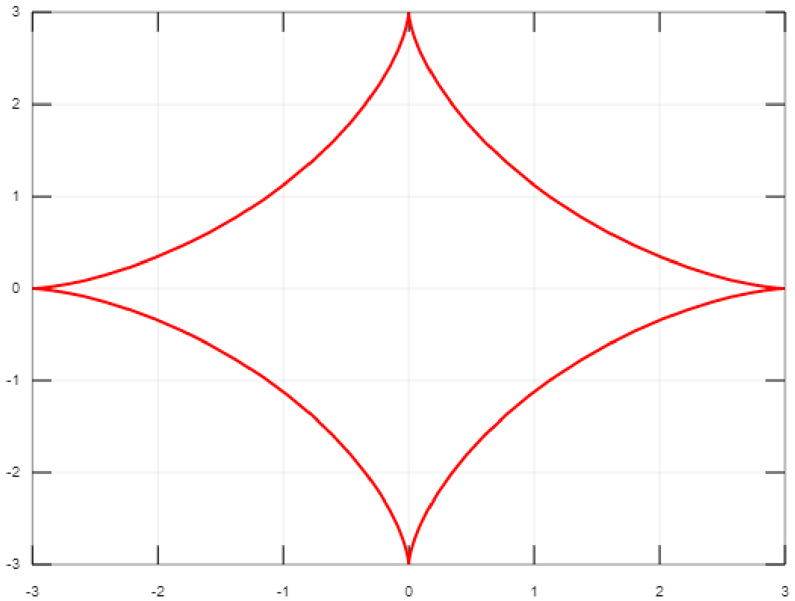


За допомогою команди `grid on` можна додати сітку до графіку



За допомогою функції `linewidth` можна змінювати товщину лінії. Наприклад, якщо необхідно, щоб графік астроїди був червоного кольору та товщина лінії дорівнювала 3 пікселя, то необхідно написати так:

```
>> plot(x, y, 'r','linewidth', 2)
>> grid on
```



Завдання для самостійної роботи

1. Обчисліть похідні функцій, що наведені в прикладах 1-12.
2. Побудувати графіки функцій, що наведені в прикладах 13-14. Зробити їх суцільною лінією зеленого кольору товщиною 2 пікселя.
3. Обчисліть похідні функцій відповідно до кожного варіанта (завдання 1).
4. Написати рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці відповідно до кожного варіанта (завдання 2).
5. Побудувати графік функції відповідно до кожного варіанта (завдання 3) двома кольорами різними видами ліній та товщиною 2 пікселя.
6. Зробіть звіт.

Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант 1

1. а) $y=(2+x)\sqrt{3-x}$; б) $y=\dfrac{4arctg2x}{(x-1)^2}$;

в) $y=\sqrt{25x^2+1}arctg5x-\dfrac{1}{(2x+1)^2}$; г) $y=(x^2+1)^{\cos x}$;

д) $y=\dfrac{\sqrt{x+5}\cdot(x-5\ )^3}{(x+7)^2}$; е) $x^2+2xy+y^3=3$; ж) $x=\sqrt{1-t^2}$, $y=\dfrac{1}{t}$.

2. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ в точці $x_0=2$.

3. а) $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^3$; б) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\sin^2 t, \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 2

1. а) $x\sqrt{x^2-1}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{(x-4)^3}$; в) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{x^3}{3}\arccos x$;

г) $y=(x^4+5)^{ctgx}$; д) $y=\dfrac{(x-6)^3\cdot(x+4)^5}{\sqrt{(x+1)^5}}$;

е) $y^2=x\sin y$; ж) $x=\sqrt{1-t}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

2. $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ в точці $x_0=-2$.

3. а) $y=2x^3+3x^2-5$; б) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=3\sin t, \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 3

1. а) $y=3^{ctgx}$; б) $y=\dfrac{\ln(x-1)}{(x+5)^4}$; в) $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$;

г) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$; д) $y=\dfrac{(x+2)^4\cdot(x-7)^5}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$;

е) $xy^2-y\ln x=5$; ж) $x=te^t$, $y=\arcsin t+sin t$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ в точці $x_0=1$.

3. а) $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3$; б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=5\sin t, \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 4

1. а) $y=\arcsin(\ln x)$; б) $y=\dfrac{2\arccos 4x}{(x+2)^3}$; в) $y=x\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

г) $y=(x^2+3)^{\sin x}$; д) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}\cdot(x-4)^3}{(x+5)^6}$;

е) $x+y+e^y arctgx=0$; ж) $x=\sqrt{1+2t}$, $y=3t^2cos^2\sqrt{t}$.

2. $y=\dfrac{x}{8-x}$ в точці $x_0=3$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$; б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 5

1. а) $y=\ln\left(\arcsin 3x\right)$; б) $y=\dfrac{\ln\left(x-4\right)}{\left(x+15\right)^2}$; в) $y=\sqrt{x^2+\sqrt{\cos 3x}}-\dfrac{1}{\ln x}$;

   г) $y=\left(3x-2\right)^{\frac{2}{x}}$; д) $y=\dfrac{\left(x-5\right)^3\cdot\left(x-4\right)^7}{\sqrt{\left(x+1\right)^3}}$;

   е) $arctgy=2x+\sqrt{y}$; ж) $x=2+\sqrt{\sin t}$, $y=t^2\cos t$.

2. $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ в точці $x_0=3$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2$; б) $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \\ t\in\left[0,2\pi\right]. \end{cases}$

Варіант 6

1. а) $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^4$; б) $y=\dfrac{4arctg3x}{\left(x-2\right)^3}$; в) $y=\ln\sin\sqrt[3]{arctge^{3x}}+\dfrac{1}{2\left(x+1\right)^2}$;

   г) $y=(x^4+5)^{ctgx}$; д) $y=\dfrac{\left(x+5\right)^8\cdot\left(x-4\right)^4}{\sqrt[5]{\left(x-2\right)^2}}$;

   е) $arctg\,y=x\sin y$; ж) $x=t^3+5\sin t$, $y=t\cos 3t$.

2. $y=\dfrac{x^4+1}{4x^2}$ в точці $x_0=-1$.

3. а) $y=\dfrac{3}{4}x^4-x^3$; б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ t\in\left[0,2\pi\right]. \end{cases}$

Варіант 7

1. а) $y=\sqrt{arctgx}$; б) $y=\frac{\ln(x+9)}{(x-3)^4}$; в) $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\sin^2 3x+\frac{1}{2x-1}+\ln 2$;

г) $y=(ctgx)^{\frac{1}{\sin x}}$; д) $y=\frac{(x-2)^3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^4}}{(x+5)^6}$;

е) $y=5-xe^{2y}$; ж) $x=\sqrt{1+3t},\ y=t^2\cos 5t$.

2. $y=\frac{x}{-x^2-1}$ в точці $x_0=3$.

3. а) $y=-\frac{1}{3}x^3-x^2$; б) $\begin{cases} x=7(t-\sin t), \\ y=7(1-\cos t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 8

1. а) $y=\sqrt[3]{5+3x^2}$; б) $y=\frac{\arcsin 4x}{(x-4)^3}$; в) $y=\frac{x}{(x+5)^2}-x^4\cdot tg^2\sqrt{3x}-\log_3 2$;

г) $y=(\ln(2x+1))^{2+\cos x}$; д) $y=\frac{(x+1)^3\cdot(x-7)^3}{\sqrt{(x+4)^5}}$;

е) $x^3-y^3=3x^2y^2+3$; ж) $x=\ln^3 t,\ y=t^2+ctg\sqrt{t}$.

2. $y=\left(2-\frac{2}{x}\right)^2$ в точці $x_0=6$.

3. а) $y=-\frac{1}{9}x^3+x^2$; б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 9

1. а) $y = x^4\sqrt{4-x^2}$; б) $y = \dfrac{arctg5x}{(x-12)^4}$;

в) $y = \dfrac{3}{(\sqrt{x}+3)^3} + (x-1)^3\cos^2 2x - \dfrac{1}{5}$; г) $y = (ctgx)^{\sin 3x}$;

д) $y = \dfrac{(x-2)^2 \cdot (x+5)^7}{\sqrt{(x+9)^5}}$; е) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$; ж) $x = te^t$, $y = \arcsin t + \sin^2 t$.

2. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ в точці $x_0 = -3$.

3. а) $y = \dfrac{1}{4}x^3 + x^2$;

б) $\begin{cases} x = 7\cos^3 t, \\ y = 7\sin^3 t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 10

1. а) $y = x\sqrt{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{3arctg4x}{(x-8)^4}$;

в) $y = \dfrac{2}{(x+3)^4} - (2x+5)^3\sin^4\sqrt{2x} + \dfrac{1}{2}$; г) $y = (x^2+1)^{\cos x}$;

д) $y = \dfrac{\sqrt{x+8} \cdot (x-4)^3}{(x+3)^4}$; е) $2y\ln y = x$; ж) $x = 3 - \sqrt{\sin 2t}$, $y = t^2\cos 2t$.

2. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ в точці $x_0 = 1$.

3. а) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$;

б) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 11

1. а) $y = x^2 \sin x;$ б) $y = \dfrac{\ln(5x+9)}{(x-4)^3};$ в) $y = \dfrac{arctg 3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x};$

г) $y = (tg^2 x - x^2)^x;$ д) $y = \dfrac{(x-12)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+4)^3}}{(x+2)^6};$

е) $2^x + 2^y = \sin y;$ ж) $x = \cos t + \sin t,\ y = \sin t - t\cos t.$

2. $y = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$ в точці $x_0 = 2$.

3. а) $y = \dfrac{1}{9}x^3 + x^2;$ б) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 12

1. а) $y = \dfrac{x^2}{\cos x};$ б) $y = 2^{2x} \cdot \sqrt{3x^2 + 1};$ в) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(arctge^{2x})^3} - \dfrac{2}{(x+1)^3};$

г) $y = (\ln 3x)^{\cos x};$ д) $y = \dfrac{(x-1)^2 \cdot (x+7)^3}{\sqrt{(x+4)^7}};$

е) $2^{x+y} = x + 10y;$ ж) $x = \sqrt{1+3t},\ y = t^2 \sin t.$

2. $y = \dfrac{9 - x^2}{9 + x^2}$ в точці $x_0 = 0$.

3. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2;$ б) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 13

1. а) $y=\sqrt{x^3+x}$; б) $y=\dfrac{\ln(x-4)}{(x+13)^5}$; в) $y=\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2arctge^{x}$;

г) $y=x^{\sqrt{x}}$; д) $y=\dfrac{(x+2)^2\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}}{(x-5)^4}$;

е) $x+tgy=2^x+y^2$; ж) $x=2t-\sin 2t^2,\ y=\sin^2(2t)$.

2. $y=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ в точці $x_0=3$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-3x^2$; б) $\begin{cases} x=\sin t,\\ y=\cos t,\\ t\in[0,2\pi].\end{cases}$

Варіант 14

1. а) $y=tg^2 3x$; б) $y=\dfrac{\ln(x-5)}{(x+4)^8}$; в) $y=e^{\sin x}+\left(x-\dfrac{1}{\cos x}\right)^4$;

г) $y=(1+e^x)^{x^2+2}$; д) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}\cdot(x+7)^3}{(x-5)^4}$;

е) $x-y+7\cos y=0$; ж) $x=\ln\,(t^5+3),\ y=\dfrac{t^2}{t^5+3}$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ в точці $x_0=-1$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2$; б) $\begin{cases} x=16\sin^3 t,\\ y=13\cos t-5\cos(2t)-2\cos(3t)-\cos(4t),\\ t\in[0,2\pi].\end{cases}$

Варіант 15

1. а) $y = x^2 arctgx;$ б) $y = \dfrac{\ln(2x-3)}{(x+2)^7};$ в) $y = \sin^4(\sqrt[3]{x}-1)e^{-x^3};$

г) $y = (arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)};$ д) $y = \dfrac{(x-10)^3 \cdot \sqrt[6]{(x+4)^3}}{(x-6)^6};$

е) $x^3 y^2 + (x-y)^2 = b;$ ж) $x = arctgt,\ \ y = \ln(1+t^2).$

2. $y = \dfrac{x}{4-x}$ в точці $x_0 = 8.$

3. а) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3;$ б) $\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 16

1. а) $y = x^3 \cos x;$ б) $y = \dfrac{\arcsin 5x}{(x-5)^3};$ в) $y = \left(\dfrac{4}{5x^2} - \dfrac{1}{3x}\right)\sqrt{6x+x^2};$

г) $y = (x^4+4)^{\sin 2x};$ д) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}\cdot(x-5)^8}{(x+2)^7};$ е) $\ln y + \dfrac{x^2}{y} = 3a;$

ж) $x = 3t - \sin 3t^2,\ \ y = \sin^2 3t.$

2. $y = \dfrac{x^4+1}{x^2}$ в точці $x_0 = -1.$

3. а) $y = -\dfrac{1}{9}x^3 - x^2;$ б) $\begin{cases} x = 20(\cos t + \dfrac{1}{5}\cos 5t), \\ y = 20(\sin t - \dfrac{1}{5}\sin 5t), \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 17

1. а) $y=\dfrac{x^4}{\cos x}$; б) $y=\sqrt{x^2-1}\cdot\arcsin 2x$; в) $y=x^2e^{-x^3}-3^{1-\ln^2 5x}$;

г) $y=(x^2+e^x)^{tg^3 x}$; д) $y=\dfrac{(x+1)^5\cdot(x+7)^4}{\sqrt{(x+14)^3}}$; е) $y\sin x-\cos(x-y)=a$;

ж) $x=\dfrac{1}{t}-t,\ y=\sqrt{t^2+1}.$

2. $y=\dfrac{x^2+2}{2-x}$ в точці $x_0=-4$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$; б) $\begin{cases} x=4.4(\cos t+\dfrac{1}{1.1}\cos(1.1t)), \\ y=4.4(\sin t-\dfrac{1}{1.1}\sin(1.1t)), \\ t\in[0,20\pi]. \end{cases}$

Варіант 18

1. а) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{\ln(4x+3)}{(x-12)^3}$; в) $y=\sqrt[5]{(2-\sqrt{x\sin 2x})^3}$;

г) $y=(1+2^x)^{x^2+2}$; д) $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x+4)^2}\cdot(x-2)^5}{(x+5)^3}$; е) $xy=ctgy$;

ж) $x=3t^2+5,\ y=arctg\sqrt{t}$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ в точці $x_0=2$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{4}x^4+x^3$; б) $\begin{cases} x=24.8(\cos t+\dfrac{1}{6.2}\cos(6.2t)), \\ y=24.8(\sin t-\dfrac{1}{6.2}\sin(6.2t)), \\ t\in[0,10\pi]. \end{cases}$

Варіант 19

1. а) $y = x^3 \ln x$; б) $y = \dfrac{2\arccos 3x}{(x+4)^3}$; в) $y = \sin^3(\sqrt[3]{x} - x\sqrt{x})$;

г) $y = (\cos 2x)^{\sin x}$; д) $y = \dfrac{(x-3)^2 \cdot (x-4)^4}{\sqrt{(x+6)^3}}$; е) $xy = ctgy$; ж) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

2. $y = \left(3 - \dfrac{3}{x^2}\right)^2$ в точці $x_0 = 3$.

3. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2$; б) $\begin{cases} x = (1+\cos t)\cos t, \\ y = (1+\cos t)\sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 20

1. а) $y = (1+x^2)arctgx$; б) $y = \dfrac{\ln(5x+2)}{(x-8)^6}$; в) $y = (1+ctg^3 3x)e^{-\frac{x}{3}}$;

г) $y = (x^3+1)^{tg^2\frac{x}{2}}$; д) $y = \dfrac{(x-11)^2 \cdot \sqrt[6]{(x+5)^5}}{(x-9)^6}$;

е) $arctgy = x + y^2$; ж) $x = \ln(t^3+2)$, $y = \dfrac{t}{t^3+2}$.

2. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ в точці $x_0 = 0$.

3. а) $y = -\dfrac{1}{4}x^4 - x^3$; б) $\begin{cases} x = 6\cos t - 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 21

1. а) $y = 2^{tgx}$; б) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{(x-14)^3}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{1-\sin^3 2x}}{1+\cos 4x}$; г) $y = (tgx)^{\sin^2 x}$;

д) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}\cdot(x-2)^4}{(x-5)^5}$; е) $e^x \sin y = e^{-y}\cos x$; ж) $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = t - arctgt. \end{cases}$

2. $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ в точці $x_0 = -2$.

3. а) $y = \dfrac{1}{9}x^3 - x^2$; б) $\begin{cases} x = 8(\cos t + \dfrac{1}{4}\cos(4t)), \\ y = 8(\sin t - \dfrac{1}{4}\sin(4t)), \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 22

1. а) $y = x\sin^2 x$; б) $y = \dfrac{\ln(4x+2)}{(x-6)^6}$; в) $y = \ln(x^3 + \sqrt[3]{x^6+3})$;

г) $y = (x^3-1)^{\cos\sqrt{x}}$; д) $y = \dfrac{(x+6)^5 \cdot \sqrt[7]{(x+1)^2}}{(x-9)^4}$; е) $e^{xy} - x^2 + y^2 = b$;

ж) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t.$

2. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ в точці $x_0 = -3$

3. а) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2$; б) $\begin{cases} x = 6.2(\cos t + \dfrac{1}{3.1}\cos(3.1t)), \\ y = 6.2(\sin t - \dfrac{1}{3.1}\sin(3.1t)), \\ t \in [0, 20\pi]. \end{cases}$.

Варіант 23

1. а) $y = x^3 \cos 2x$; б) $y = \dfrac{\ln(2x+2)}{(x+3)^5}$; в) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}} + \ln^5 \sin 2x$;

г) $y = (\sin 2x)^{\ln x}$; д) $y = \dfrac{(x-8)^2 \cdot (x+4)^3}{\sqrt{(x+4)^5}}$; е) $2y^2 x = \sin(xy)$;

ж) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = tg^2 t. \end{cases}$

2. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ в точці $x_0 = 3$.

3. а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; б) $\begin{cases} x = 13(\cos t + \dfrac{1}{6.5}\cos(6.5t)), \\ y = 13(\sin t - \dfrac{1}{6.5}\sin(6.5t)), \\ t \in [0, 4\pi]. \end{cases}$

Варіант 24

1. а) $y = e^{-2x} \cdot \sin x$; б) $y = \dfrac{5arctg 3x}{(x+4)^4}$; в) $y = \sqrt{(1+x^2)^3} + \dfrac{1}{\ln^2(2x+1)}$;

г) $y = x^{\arcsin x}$; д) $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x+3)^2} \cdot (x+2)^5}{(x+5)^6}$; е) $\sin(x+y) = \cos(x+y)$;

ж) $x = arctgt,\ y = \dfrac{t^2}{2}$.

2. $y = \dfrac{8-x}{x}$ в точці $x_0 = 7$.

3. а) $y = 2 - 3x^3 + x^4$; б) $\begin{cases} x = \sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y = \sin(2t), \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Варіант 25

1. а) $y=\dfrac{x^3}{\sin x}$; б) $y=e^{-4x}\cdot arctg\,2x$; в) $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}-\ln tg\left(\dfrac{x}{3}\right)$;

г) $y=(\ln x)^{3x}$; д) $y=\dfrac{(x-9)^2\cdot\sqrt[3]{(x+5)^5}}{(x-5)^6}$;

е) $2y^3-5y+3x=b$; ж) $x=\sqrt{t},\ y=\sqrt[3]{t-1}$.

2. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ в точці $x_0=-1$.

3. а) $y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2$; б) $\begin{cases} x=\sin\left(3t+\dfrac{\pi}{2}\right), \\ y=\sin(2t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 26

1. а) $y=(1+x)\sqrt{5+2x}$; б) $y=\dfrac{4\arccos 2x}{(x-5)^4}$;

в) $\sqrt{1+4x^2}\,arctg\,2x+\ln^2\sin 4x$; г) $y=(x^3-1)^{\sin x}$;

д) $y=\dfrac{(x+3)^2\cdot(x+4)^4}{\sqrt{(x-1)^5}}$; е) $x^3-3xy+y^2-1$; ж) $x=\sqrt{1+t^2},\ y=\dfrac{1}{t}$.

2. $y=\dfrac{4x^2}{x^4+1}$ в точці $x_0=1$.

3. а) $y=x^4-3x^3+2$; б) $\begin{cases} x=\sin\left(5t+\dfrac{\pi}{2}\right), \\ y=\sin(6t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$.

Варіант 27

1. а) $y=\sqrt{x+1}\cdot\ln 5x$; б) $y=\dfrac{7arctg\,2x}{(x+6)^4}$; в) $y=\sin^4 3x+x^2\arccos x$;

г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{ctgx}$; д) $y=\dfrac{(x-8)^2\cdot(x+4)^3}{\sqrt{(x+4)^5}}$;

е) $y^2+x^2=\sin y$; ж) $x=2\cos^2 t,\ y=3\sin^2 t.$

2. $y=\dfrac{x^2+1}{-x}$ в точці $x_0=3$.

3. а) $y=2x^3+9x^2+12x$; б) $\begin{cases} x=16\sin^3 t, \\ y=13\cos t-5\cos(2t)-2\cos(3t)-\cos(4t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 28

1. а) $y=x\sqrt{9-x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln(6x+2)}{(x-3)^4}$; в) $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x+tg^3\ln x$;

г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$; д) $y=\dfrac{(x-8)^4\cdot\sqrt[6]{(x+5)^5}}{(x-15)^8}$; е) $\sin y=xy^2+4$;

ж) $x=arctgt,\ y=\ln\left(1+t^2\right).$

2. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ в точці $x_0=-2$.

3. а) $y=2x^3+3x^2-5$; б) $\begin{cases} x=16\sin^3 t, \\ y=13\cos t-5\cos(2t)-2\cos(3t)-\cos(4t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Варіант 29

1. а) $y=\dfrac{\arcsin x}{tgx}$; б) $y=x^4\cdot\cos^2 x$; в) $y=arctg(\ln x)+\sin^3\left(\sqrt{x^2-1}\right)$;

г) $y=(tg2x)^{\cos 3x}$; д) $y=\dfrac{(x-3)^6\cdot(x+14)^5}{\sqrt{(x+6)^7}}$; е) $x^2+y^2=\sin y$;

ж) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$.

2. $y=\dfrac{4x^2-8x+4}{x^2}$ в точці $x_0=2$.

3. а) $y=-x^3+3x+2$; б) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t\cos t,. \\ t\in[0,5\pi]. \end{cases}$

Варіант 30

1. а) $y=\sqrt{x-1}\ln(2x+1)$; б) $y=\dfrac{2\arcsin 2x}{(x+4)^4}$; в) $y=arctgx^2+\sin\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$;

г) $y=\left(\dfrac{x}{x+4}\right)^{2x}$; д) $y=\dfrac{(x+2)^8\cdot(x+14)^3}{\sqrt{(x+3)^9}}$; е) $xy^2=ctgy$; ж) $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$

2. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ в точці $x_0=4$.

3. а) $y=2x^3+9x^2+12x$; б) $\begin{cases} x=\sin t\left(e^{\cos t}-2\cos(4t)+\sin^5\left(\dfrac{1}{12}t\right)\right), \\ y=\cos t\left(e^{\cos t}-2\cos(4t)+\sin^5\left(\dfrac{1}{12}t\right)\right), \\ t\in[0,12\pi]. \end{cases}$

Контрольні питання

1. Як обчислити похідну першого порядку?
2. Як обчислити похідну неявної функції?
3. Як обчислити похідну від функції, що задана параметрично?
4. Як обчислити похідну функції в точці?
5. Як отримати рівняння дотичної?
6. Які команди використовують для побудови графіка функції?