

Лабораторна робота №4

Обчислення границь функцій в середовищі GNU Octave

Мета заняття:

- ✚ Обчислення границі функції в точці та на нескінченності за допомогою середовища GNU Octave

Застосування граничного аналізу є характерним для усієї маржиналістської економічної теорії. Такі поняття, як гранична корисність і оптимізація економічного стану засновані на методах диференційного числення.

У середовищі GNU Octave символічний аналіз здійснюється за допомогою ППП Symbolic Math, деякі функції якого призначені для розв'язування задач математичного аналізу, а саме, для обчислення границь математичних функцій.

Для цього в даному ППП існує функція `limit`. За допомогою цієї функції можна обчислити границю функції у деякій точці, включаючи й плюс або мінус нескінченність. Першим вхідним аргументом функції `limit` є символічний вираз, другим – змінна, а третім – точка, у якій обчислюється границя. Для того щоб обчислити границю деякої функції $f(x)$, необхідно послідовно виконати наступні дії:

- 1) задати всі символічні змінні, які використовуються в описі функції, за допомогою команди `syms`;
- 2) задати функцію (або створити символічну функцію за допомогою функції `sym`, при цьому не має необхідності виконувати крок 1));
- 3) викликати функцію `limit`

У таблиці 4.1 наведені деякі правила виклику функції `limit` у різних випадках.

Таблиця 4.1

Правила виклику функції `limit`

| Математична операція | Команда GNU Octave | Опис команди |
|-------------------------------------|--|---|
| 1 | 2 | 3 |
| $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | <code>limit(f)</code> | <code>f</code> – визначається як символічна змінна. Використовується, коли $x \rightarrow 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ | <code>limit(f, 'x', a)</code> або <code>limit(f, a)</code> | Для функції від однієї змінної можна скористатися другим варіантом виклику |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | <code>limit(f, 'x', inf)</code> або <code>limit(f, inf)</code> | Обчислення границі, коли аргумент прямує до нескінченності (<code>inf = ∞</code>) |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | <code>limit(f, 'x', -inf)</code> або <code>limit(f, -inf)</code> | Обчислення границі, коли аргумент прямує до від'ємної нескінченності (<code>-inf = -∞</code>) |
| $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ | <code>limit(f, 'x', a, 'left')</code> | Ліва границя функції |
| $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ | <code>limit(f, 'x', a, 'right')</code> | Права границя функції |

Зауваження 1: при обчислюванні декількох границь не обов'язково кожен раз оголошувати змінні та параметри, якщо раніше вони вже були описані.

Зауваження 2: для уникнення плутанини при роботі з функцією `limit` рекомендується викликати її у формі: `limit(f, 'x', a)`.

Приклад 4.1. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 7)$.

Розв'язання. Спочатку описуємо змінну, потім вводимо функцію і обчислюємо границю, якщо $x \rightarrow 2$:

```
>> syms x
>> f=sym('3*x^2-2*x+7')
f = (sym)
      2
    3·x  - 2·x + 7
>>limit(f,'x',2)
ans = (sym) 15
```

Приклад 4.2. Обчисліть границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{x + 1}; 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{x - 1}; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x + 1}; 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2}}.$$

Розв'язання.

```
1) >> syms x
>> f=sym('(3*x^2-2*x)/(x+1)')
f = (sym)
      2
    3·x  - 2·x
    -----
      x + 1
>> limit(f,'x',1)
ans = (sym) 1/2

2) >> syms x
>> f=sym('(3*x^2-2*x)/(x-1)')
f = (sym)
      2
    3·x  - 2·x
    -----
      x - 1
>> limit(f,'x',1)
ans = (sym) ∞
```

```
3) >> syms x
>> f=sym('(3*x-3)/(x+1)')
f = (sym)
      3·x - 3
      -----
          x + 1
>> limit(f,'x',1)
ans = (sym) 0
```

```
4) >>syms x
>> f=sym('(x-2)/sqrt(x+2)')
f = (sym)
      x - 2
      -----
      √ x + 2
>> limit(f,'x',2)
ans = (sym) 0
```

Приклад 4.3. Обчисліть границі функцій:

Розв'язання.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^4 - x}; 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}; 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; 4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}.$$

```
1) >> syms x
>> f=sym('(3*x^2-2*x-1)/(x^4-x)')
f = (sym)
      2
      3·x  - 2·x - 1
      -----
          4
          x  - x
>> limit(f,'x',1)
ans = (sym) 4/3
```

```
2) >>syms x
>> f=sym('(x^3-1)/(x-1)')
f = (sym)
      3
      x  - 1
      -----
      x  - 1
>> limit(f,'x',1)
ans = (sym) 3
```

```
3) >> syms x
>> f=sym('(x^3+3*x^2+2*x)/(x^2-x-6)')
f = (sym)
      3      2
      x  + 3·x  + 2·x
      -----
      2
      x  - x - 6
>> limit(f,'x',-2)
ans = (sym) -2/5
```

```
4) >>syms x
>>f=sym('(3*x^2-7*x-6)/(2*x^2-7*x+3)')
f = (sym)
      2
      3·x  - 7·x - 6
      -----
      2
      2·x  - 7·x + 3
>> limit(f,'x',3)
ans = (sym) 11/5
```

Приклад 4.4. Обчисліть границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16 - x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3}$$

Розв'язання.

1) >> syms x

>> f=sym('(x-sqrt(3*x+4))/(16-x^2)')

f = (sym)

$$\frac{x - \sqrt{3 \cdot x + 4}}{16 - x^2}$$

>> limit(f,'x',4)

ans = (sym) -5/64

2) >> syms x

>> f=sym('(sqrt(4*x+1)-3)/(sqrt(x+2)-2)')

f = (sym)

$$\frac{\sqrt{4 \cdot x + 1} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}$$

>> limit(f,'x',2)

ans = (sym) 8/3

3) >> syms x

>>f=sym('x/(sqrt(x+1)-1)')

f = (sym)

$$\frac{x}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

>> limit(f,'x',0)

ans = (sym) 2

```
4) >>syms x
>>f=sym(' (sqrt(x^2+4)-2)/(sqrt(x^2+9)-3) ')
f = (sym)

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$$

>> limit(f,'x',0)
ans = (sym) 3/2
```

Приклад 4.5. Обчисліть границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2}{2x^4 + 3x - 5}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 3x^2 + 2x}{4x^3 - 2x + 1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 3x^2 + 2x}{4x^3 - 2x + 1}.$$

Розв'язання. Зверніть увагу, що тепер змінна прямує до нескінченності. Тому при обчисленні границі потрібно замість певного числа писати `inf`.

```
1) >> syms x
>>f=sym(' (5*x^3+3*x^2)/(2*x^4+3*x-5) ')
f = (sym)

$$\frac{5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2}{2 \cdot x^4 + 3 \cdot x - 5}$$

>> limit(f,'x',inf)
ans = (sym) 0
```

```
2) >> syms x
>> f=sym('(8*x^3-3*x^2+2*x)/(4*x^3-2*x+1)')
f = (sym)
      3      2
      8·x  - 3·x  + 2·x
      -----
      3
      4·x  - 2·x + 1
>> limit(f,'x',inf)
ans = (sym) 2
```

```
3) >> syms x
>> f=sym('(6*x^5-3*x^2+2*x)/(4*x^3-2*x+1)')
f = (sym)
      5      2
      6·x  - 3·x  + 2·x
      -----
      3
      4·x  - 2·x + 1
>> limit(f,'x',inf)
ans = (sym) ∞
```

Приклад 4.6. Обчисліть границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 6x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}.$$

Розв'язання.

```
1) >> syms x
>> f=sym('tan(5*x)/sin(3*x)')
f = (sym)
      tan(5·x)
      -----
      sin(3·x)
>> limit(f,'x',0)
ans = (sym) 5/3
```

```
2) >> syms x
>>f=sym('(1-cos(6*x))/(tan(6*x))^2')
f = (sym)
      1 - cos(6·x)
      ───────────
            2
      tan (6·x)
>>limit(f,'x',0)
ans = (sym) 1/2
```

```
3) >> syms x
>>f=sym('sin(5*x)/atan(6*x)')
f = (sym)
      sin(5·x)
      ───────────
      atan(6·x)
>>limit(f,'x',0)
ans = (sym) 5/6
```

```
4) >>syms x
>>f=sym('(sin(x/3))^2/x^2')
f = (sym)
      2 ( x )
      sin ( - )
          ( 3 )
      ───────────
            2
            x
>>limit(f,'x',0)
ans = (sym) 1/9
```

Приклад 4.7. Обчисліть границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}.$$

Розв'язання.

1) >> syms x

>>f=sym('(1+1/x)^(2*x)')

f = (sym)

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2 \cdot x}$$

>>limit(f,'x',inf)

ans = (sym)

$$e^2$$

2) >> syms x

>>f=sym('(1+2/(3*x))^(x)')

f = (sym)

$$\left(1 + \frac{2}{3 \cdot x}\right)^x$$

>>limit(f,'x',inf)

ans = (sym)

$$e^{2/3}$$

3) >> syms x

>>f=sym('(1+1/(x-1))^(2*x)')

f = (sym)

$$\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{2 \cdot x}$$

>>limit(f,'x',inf)

ans = (sym)

$$e^2$$

```

4) >> syms x
    >>f=sym('((6*x-7)/(6*x+5))^(2*x-1)')
    f = (sym)
        (
        (
        6·x - 7
        -----
        6·x + 5
        )
        )2·x - 1
    >>limit(f,'x',inf)
    ans = (sym)
        -4
        e

```

Завдання для самостійної роботи

1. Обчисліть усі границі, що наведені в прикладах 4.1-4.7.
2. Обчисліть границі відповідно до кожного варіанта.
3. Зробіть звіт.

Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант 1

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 3x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{4x^3 - 5x + 7};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + x - 12}{x^2 - 15x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 6x};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{8x+1}.$$

Варіант 2

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{4x^2 - x + 5};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x + 2}{9x^3 - 15x - 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x - 9}{x^2 - 5x + 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 - x - 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x - 2};$

е) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{3x+4} - 4};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x-1}.$

Варіант 3

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4x - 1}{6x^2 - x + 3};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x - 5}{9x^3 + 5x + 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 3x - 7}{x^2 + 25x - 6};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x+6} - 2};$

е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{3x} - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-7} \right)^{3x+4}.$

Варіант 4

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 2}{2x^2 + x + 4};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 16x - 8}{8x^3 + 9x + 3};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 13x + 9}{4x^2 + 5x - 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4};$

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{2x+7} - 3};$

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{8-x} - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-5}{4x-3} \right)^{3x+1}.$

Варіант 5

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 15x - 1}{2x^2 - 7x + 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x + 8}{x^4 + 9x - 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 3x - 8}{4x^2 - 5x + 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x};$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+6} - 3}{x-1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{8x+1} - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 6x}{\operatorname{ctg} 2x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-3} \right)^{3x-1}.$

Варіант 6

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x + 1}{6x^3 + 2x - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x - 2}{4x^4 - 9x + 7};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 3}{4x^2 + 3x - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+6} - 2}{x+1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+9} - 3}{\sqrt{8x+1} - 1};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 2x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+7}{3x-5} \right)^{2x-1}.$

Варіант 7

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x^2 - 1}{x^3 + 5x + 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 16x - 9}{9x^4 - 9x^2 - 13};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 17x + 9}{4x^2 - 4x - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x};$

е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{8x-4}};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-5} \right)^{2x+3}.$

Варіант 8

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - x}{2x^3 + 6x - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 - 3x - 8}{7x^4 + 9x^2 - 3};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - 7x + 3}{3x^2 + 4x - 5};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2 - x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+1} - 3}{x-1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{8}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-4} \right)^{3x+5}.$

Варіант 9

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 2}{4x^2 + 7x - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 8}{8x^4 - 9x^2 + 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 7x^2 + 19}{4x^2 - 4x + 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 3x - 4};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{5x+9} - 3};$

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+11} - 3}{\sqrt{8-x} - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 6x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{2x+3}.$

Варіант 10

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x - 7}{2x^2 + 3x - 4};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x - 9}{9x^4 - 7x^2 - 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 7}{5x^2 + 2x - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 5x - 8}{x^2 - 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+4} - 2}{3x};$

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{\sqrt{5x-3} - \sqrt{2}};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \operatorname{ctg} 5x;$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{4x-1}.$

Варіант 11

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x^2 + x}{6x^3 + 5};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{3x^3 - 2x^2 - 12};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 17}{15x^2 - 6x + 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 3x - 14}{x^2 - 4};$

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{3x-11} - 1}$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 8x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-7} \right)^{6x-1}.$

Варіант 12

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 4x - 1}{3x^2 + 2x + 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x + 3}{5x^4 - 12x^2 + 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + x^2 + 7}{5x^2 - 2x - 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 3x}{2x^2 - x - 3};$

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{2}}$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{2x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1} \right)^{2x+1}.$

Варіант 13

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x + 5}{4x^2 - 3x + 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 12x + 5}{x^4 - 2x^2 + 12};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 7}{8x^2 + 2x - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 6x - 11}{x^2 + 2x - 3};$

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{3x - 6};$

е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{7}}$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} 6x;$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-3} \right)^{4x-1}.$

Варіант 14

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + x + 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 12x^2 - 5}{2x^4 - 2x^2 + 7};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 7}{8x^2 + 2x - 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 5x - 22}{x^2 - 4};$

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{\sqrt{2x} - 2};$

е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{\sqrt{5x} - 5};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^{4x+1}.$

Варіант 15

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - 3x^2}{2 - 2x + 3x^2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 5}{2x^4 - 12x^2 + 7};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 9x^2 - 17}{8x^2 - 3x + 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3x + 2};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{3x+4} - 2};$

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+11} - 3}{\sqrt{15-x} - 4};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 6x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-3}.$

Варіант 16

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 2}{2x^3 - x^2 + 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^3 - 8x^2 + 5}{12x^4 - 2x^2 + 7};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x^2 - 7}{8x^2 + x + 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x+3} - 2};$

д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2x - 6};$

е) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+11} - 3}{\sqrt{5-2x} - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{3x+3}.$

Варіант 17

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x + 4}{4x^3 + x^2 + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 8x^2 - 5x}{2x^4 - 2x^3 + 9}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7}{2x^2 + 11x + 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{\sqrt{15-2x} - \sqrt{15}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 4x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4} \right)^{3x+1}$.

Варіант 18

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 2x - x^2}{2 - x - 2x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 5x}{2x^4 + 2x^3 - 9x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7}{2x^2 + 11x + 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x - 2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{\sqrt{3x-2} - 2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+30} - 6}{\sqrt{13-2x} - 3}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-6} \right)^{5x-1}$.

Варіант 19

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x + 1}{8x^2 - x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 14x^2 + 5x}{12x^4 + 2x^3 - 7x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^3 - 4x^2 + 17}{2x^2 - 11x + 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{4x - 8}$; е) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x+31} - 5}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{5}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \operatorname{tg} 3x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{7x-1}$.

Варіант 20

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - x + 3}{4x^2 + 2x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 15x}{2x^4 + 12x^3 - 9x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 14x^2 + 7}{2x^2 - 6x + 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x - 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x+31} - 5}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{5}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 3x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-7} \right)^{6x+1}$.

Варіант 21

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 1}{3x^2 - x + 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 14x^2 + 15x}{x^4 + 12x^3 + 9x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 14x^2 - 3}{2x^2 + 16x + 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+1} - 1}{5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+24} - 5}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{5}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-2} \right)^{7x-1}$.

Варіант 22

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5x + 6x^2}{7 - 3x - 2x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 15x}{2x^4 + 12x^3 + 9x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 + 13}{4x^2 + 16x - 5}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{x - 2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{3x-3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+28} - 6}{\sqrt{1+x} - \sqrt{5}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{2x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{2x+7} \right)^{3x+2}$.

Варіант 23

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 1}{10x^2 + x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - 14x^2 + 5x}{3x^4 + 2x^3 - 9x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 7x^2 - 13}{2x^2 + 16x - 15}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{3x+9} - 3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+25} - 5}{\sqrt{1+x} - 1}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg^2 x}{\sin^2 2x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{x+1}$.

Варіант 24

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{3x^4 - 2x^3 - 8x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 17x^2 - 3}{2x^2 + 6x - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 + 5x + 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+6} - 3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+16} - 5}{\sqrt{3x} - 3}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{3x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^{3x-1}$.

Варіант 25

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 5x - 2x^3}{1 + 4x + x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - x^2 - 11}{3x^4 - 18x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 17x^2 + 3}{12x^2 - 6x - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 7x - 12}{x^2 + 3x - 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+x}}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3x+25} - 4}{\sqrt{1-3x} - \sqrt{10}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 ctg 2x}{\sin 3x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{x+1}$.

Варіант 26

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 1}{3x^2 - x + 7};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 12x^2 + 15}{3x^4 - 8x^2 + 17};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 6x^2 - 7}{9x^2 - 3x + 13};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+1} - 1}{5x};$

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+22} - 5}{\sqrt{1+3x} - 2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-2} \right)^{7x-1}.$

Варіант 27

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5x + 6x^2}{7 - 3x - 2x^2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 11x}{3x^4 + 2x^3 - 9x};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 9}{x^2 + 6x - 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{x - 2};$

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{3x-3};$

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x+19} - 4}{\sqrt{1-3x} - 2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{2x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{2x+7} \right)^{3x+2}.$

Варіант 28

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 1}{10x^2 + x - 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 8x^2 - 4}{11x^4 - 2x^2 + x};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 2x^2 - 7}{2x^2 + 6x + 13};$

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{3x+9} - 3};$

е) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{3x+28} - 4}{\sqrt{1-2x} - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 2x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{x+1}.$

Варіант 29

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 3}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^3 - 8x^2 - 4x}{x^4 - 12x^2 + 3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 12x^2 - 9}{2x^2 - 6x + 15}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 + 5x + 4}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+6}-3}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+25}-5}{\sqrt{1-6x}-1}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{3x}$;

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^{3x-1}$.

Варіант 30

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x-2x^3}{1+4x+x^3}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 5x^2 - 4x}{3x^4 - 12x^2 + 5x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 2x^2 - 3}{12x^2 + 8x + 5}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 7x - 12}{x^2 + 3x - 4}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+x}}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+24}-5}{\sqrt{13+3x}-4}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$;

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{x+1}$.

Контрольні питання

1. Як обчислити границю функції в точці?
2. Як обчислити границю функції на нескінченності?