ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Мета: навчитись використовувати функції математичного пакету Octave для розв'язання задач диференціального числення функцій однієї змінної.

Згадаємо коротко матеріал лекційного заняття, необхідний для розв'язання задач.

За означенням **похідна функції** $y = f(x)$ **в точці** x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$C' = 0, C = const \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0, C = const \in \mathbb{R};$

2. $(C\cdot f)' = C\cdot f'$;

3. $(f\pm g)' = f'\pm g'$;

4. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$;

5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$, якщо $g(x)\neq 0$.

Диференціювання складеної функції $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Почнемо з найпростіших прикладів, в яких будемо використовувати лише таблицю та основні правила.

Приклад 1. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = x^2\cdot \arcsin x$;

б) $y = 5(x^4-3)\cdot \sin x - \dfrac{3\ln x}{x^3}$.

Розв'язання (з докладними роз'ясненнями)

а) $$y' = \left(x^2\cdot \arcsin x\right)' =$$

{*скористаємось правилом* 4: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$}

$$= \left(\underbrace{x^2}_{f}\cdot\underbrace{\arcsin x}_{g}\right)' = \left(x^2\right)'\cdot \arcsin x + x^2\cdot\left(\arcsin x\right)' =$$

{*для обчислення похідної* $\left(x^2\right)'$ *у виразі першого доданку використаємо формулу з таблиці похідних*: $\left(x^\mu\right)' = \mu\cdot x^{\mu-1}$,

а для $\left(\arcsin x\right)'$ – *формулу*: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ }

$$= \left(2 \cdot x^{2-1}\right) \cdot \arcsin x + x^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) $$y' = \left(5(x^4 - 3) \cdot \sin x - \frac{3 \ln x}{x^3} \right)' =$$

{*скористаємось правилом* 3: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

та правилом 2: $(C \cdot f)' = C \cdot f'$}

$$= 5 \cdot \left((x^4 - 3) \cdot \sin x\right)' - 3 \cdot \left(\frac{\ln x}{x^3} \right)' =$$

{*в першому доданку скористаємось правилом* 4: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,

а в другому – правилом 5: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$}

$$= 5 \cdot \left(\underbrace{(x^4 - 3)}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} \right)' - 3 \cdot \left(\frac{\overbrace{\ln x}^{f}}{\underbrace{x^3}_{g}} \right)' =$$

$$= 5 \cdot \left((x^4 - 3)' \cdot \sin x + (x^4 - 3) \cdot (\sin x)'\right) - 3 \cdot \left(\frac{(\ln x)' \cdot x^3 - \ln x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} \right) =$$

{*для обчислення похідних використаємо формули з таблиці*:

$\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu - 1}$, $(\sin x)' = \cos x$ та $(\ln x)' = \frac{1}{x}$}

$$= 5 \cdot \left(4x^3 \cdot \sin x + (x^4 - 3) \cdot \cos x\right) - 3 \cdot \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} \right) =$$

$$= 20x^3 \sin x + 5(x^4 - 3) \cos x - \frac{3x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} =$$

$$= 20x^3 \sin x + 5(x^4 - 3) \cos x - \frac{3(1 - 3\ln x)}{x^4}.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

1. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 5\sqrt{x} - \frac{3}{x} - 8x + 2;$

б) $y = (x^3 + 5) \cdot tgx;$

в) $y = \frac{\sin x}{x^2};$

г) $y = \frac{x^2 + 1}{3arctgx} + (2x^5 + x^2) \cdot \ln x;$

д) $y = 8\sqrt[4]{x^5} - \frac{5}{x^2} + x^3 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - 4x + 1;$

е) $y = -(x^2 + 1) \cdot arcctgx;$

є) $y = \frac{2^x}{x};$

ж) $y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} - x^3 \cdot \log_4 x.$

Приклад 2. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = (4x^2 + x)^{15};$

б) $y = arctg\sqrt{x};$

в) $y = e^{\cos(x^3 - x)};$

г) $y = \log_3(x^2 - \sin x).$

Розв'язання (з докладними роз'ясненнями)

а) $$y' = \left((4x^2 + x)^{15}\right)' =$$

$\{$*функція* $y = (4x^2 + x)^{15}$ *є складною* $y = f(g(x))$, *де в якості внутрішньої функції виступає* $g(x) = 4x^2 + x$, *а в якості зовнішньої – степенева* $f(u) = u^{15}$, *і застосовуючи правило диференціювання складної функції* $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, *отримаємо*$\}$

$$= \underbrace{15 \cdot \left(4x^2 + x\right)^{15-1}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\left(4x^2 + x\right)'}_{g'(x)} = 15 \cdot \left(4x^2 + x\right)^{14} \cdot (8x + 1).$$

б) Перед тим, як обчислювати похідну функції $y = arctg\sqrt{x}$, дещо спростимо її запис для більш зручного застосування таблиці похідних (ірраціональності краще записувати у вигляді степенів):

$$y = arctg\sqrt{x} = arctg(x^{\frac{1}{2}}).$$

Навмисно $x^{\frac{1}{2}}$ записали в дужках для наочного вигляду внутрішньої функції. Так, внутрішньою функцію складної функції $y = f(g(x)) = arctg(x^{\frac{1}{2}})$ є степенева функція $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, а зовнішньою – обернена тригонометрична $f(u) = arctgu.$ Використовуючи правило диференціювання складної функції, отримаємо:

$$y' = \left(arctg(x^{\frac{1}{2}}) \right)' = \frac{1}{1+\left(\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{g(x)}\right)^2} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \right) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}.$$

в) Функція $y = e^{\cos(x^3 - x)}$ є складною. Більш того – вона дещо «складніше», ніж функції з попередніх прикладів. Функція $y = e^{\cos(x^3 - x)}$ може бути представлена як $y = f(g(h(x)))$, де $f(u) = e^u$, $g(v) = \cos v$, $h(x) = x^3 - x$, і відповідно для обчислення її похідної потрібно бути скористатися формулою:

$$y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Таким чином, отримаємо:

$$y' = (e^{\cos(x^3 - x)})' = \underbrace{e^{\cos(x^3 - x)}}_{f'(g(h(x)))} \cdot \underbrace{(-\sin(x^3 - x))}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{(3x^2 - 1)}_{h'(x)} =$$

$$= -(3x^2 - 1) \cdot e^{\cos(x^3 - x)} \cdot \sin(x^3 - x).$$

г) $$y' = \left(\log_3(x^2 - \sin x)\right)' =$$

{*функція* $y=\log_3(x^2-\sin x)$ *є складною* $y=f(g(x))$, *де в якості внутрішньої функції виступає* $g(x)=x^2-\sin x$, *а в якості зовнішньої – логарифмічна* $f(u)=\log_3 u$, *і застосовуючи правило диференціювання складної функції* $(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$, *отримаємо*}

$$=\left(\log_3(x^2-\sin x)\right)'=\frac{1}{(x^2-\sin x)\ln 3}\cdot(2x-\cos x)=\frac{(2x-\cos x)}{(x^2-\sin x)\ln 3}.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

2. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=\left(4x^2+\frac{2}{5}\sqrt{x}\right)^3$;

б) $y=10^{x^3\cdot tgx}$;

в) $y=\arcsin(\ln x)$;

г) $y=(1+\sin^2 x)^4$;

д) $y=arcctg^2\frac{1}{x}$;

е) $y=e^{1-\cos^5 2x}$;

є) $y=\lg(x-\cos x)$;

ж) $f(x)=\frac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

На відміну від чисельних розрахунків, які ми робили на перших двох лабораторних заняттях, у другому модулі нам потрібно вже працювати в техніці символьних змінних: задавати функції, обчислювати похідні, аналізувати поведінку функцій. Для підключення символьних обчислень необхідно у командному рядку ввести:

```
x = sym ( "x" )
```

Після чого вже можна задавати функції та працювати з ними.

В Таблиці наведені функції для **визначення елементарних функцій** в Octave. Для обчислення похідної заданої функції **f** необхідно використати функцію **`diff(f,x)`**, де в дужках на першому місці стоїть назва функції **f**, а на другому змінна **x.** В прикладах відразу наведені і функції, і їх похідні.

Степенева функція		**Показникова функція**	
x^n $\sqrt{x}$	x^n sqrt(x)	a^x	a^x
Приклад: `f=x^(1/3)` $\sqrt[3]{x}$ `f1=diff(f,x)` $\frac{1}{3\cdot x^{2/3}}$		Приклад: `g=4^x` 4^x `g1=diff(g,x)` $4^x\cdot \log(4)$	
Експоненціальна функція		**Логарифмічна функція**	
e^x	$\exp(x)$	$\log_2 x$ $\log x$	$\log 2(x)$ $\log 10(x)$
Приклад: `g=exp(x)` e^x `g1=diff(g,x)` e^x		Приклад: `h=log2(x)` $\frac{\log(x)}{\log(2)}$ `h1=diff(h,x)` $\frac{1}{x\cdot\log(2)}$	
Натуральний логарифм		**Тригонометричні та обернені тригонометричні функції**	
$\ln x$	$\log(x)$	$\sin x$ $\arcsin x$	$\sin(x)$ $a\sin(x)$
Приклад: `f=log(x)` $\log(x)$ `f1=diff(f)` $\frac{1}{x}$		$\cos x$ $\arccos x$	$\cos(x)$ $a\cos(x)$
		tgx $arctgx$	$\tan(x)$ $a\tan(x)$
		$ctgx$ $arcctgx$	$\cot(x)$ $a\cot(x)$

Приклад обчислення першої похідної функції $f(x)=\dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

– Диференціювання в Octave відбувається в техніці символьних змінних, тому спочатку потрібно включити цей пакет. Для цього в командному рядку потрібно ввести:

```
x = sym ( "x" )
```

– Після підключення символьних обчислень визначимо функцію $f(x)=\dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Введемо у командному рядку:

```
f=(5*sin(2*x))/sqrt(cos(2*x))
```

– Для обчислення похідної заданої функції f необхідно використати функцію `diff(f,x)`, де в дужках на першому місці стоїть назва функції f, а на другому змінна **x**

```
f1=diff(f,x)
```

Лістинг обчислення першої похідної функції $f(x)=\dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ **в Octave**

```
x = sym ( "x" )
f=(5*sin(2*x))/sqrt(cos(2*x))
Symbolic pkg v2.9.0: Python communication link active, SymPy v1.5.1.
x = (sym) x
f = (sym)

   5⋅sin(2⋅x)
  ____________
    __________
  ╲╱ cos(2⋅x)

f1=diff(f,x)
f1 = (sym)

        2
```

```
5·sin (2·x)                 __________
─────────── + 10·╲╱ cos(2·x)
   3/2
cos   (2·x)
```

Приклад обчислення першої похідної функції $y = \ln^5(e^{2x}+1) - 2arctg^4(e^x)$ **в Octave**

```
y=(log(exp(2*x)+1))^5-2*(atan(exp(x)))^4
y = (sym)

     5⎛ 2·x    ⎞          4⎛ x⎞
  log ⎝e    + 1⎠ - 2·atan ⎝e ⎠

y1=diff(y,x)
y1 = (sym)

     2·x    4⎛ 2·x    ⎞      x    3⎛ x⎞
  10·e   ·log ⎝e    + 1⎠   8·e ·atan ⎝e ⎠
  ──────────────────── - ──────────────
          2·x                 2·x
         e    + 1            e    + 1
```

Приклад обчислення першої похідної функції $y = 5(x^4-3)\cdot\sin x - \dfrac{3\ln x}{x^3}$.

в Octave

```
y=(5*(x^4-3))*sin(x)-(3*log(x))/(x^3)
y = (sym)
⎛   4     ⎞           3·log(x)
⎝5·x  - 15⎠·sin(x) - ────────
                         3
                        x
y1=diff(y,x)
y1 = (sym)

     3           ⎛   4     ⎞          9·log(x)   3
  20·x ·sin(x) + ⎝5·x  - 15⎠·cos(x) + ──────── - ──
                                          4       4
                                         x       x
```

Вказівки до виконання та оформлення роботи

1. Загальні технічні вимоги:

– ім'я файлу Лаб3Фамілія.pdf

– орієнтація – книжна;

– поля: всі по 20 мм;

– міжрядковий інтервал – 1,5 (без додаткових інтервалів до та після абзаців);

– шрифт – Times New Roman (для основного тексту), Courier New (для лістингу програми);

– розмір шрифту (кегль) – 14;

– вирівнювання – за шириною рядка.

2. Приклад оформлення:

Лабораторна робота №2

Тема: Диференціальне числення функцій однієї змінної

Звіт студента(-ки) групи ______________

ПІБ

1. *Записуємо функцію (наприклад,* $y = \ln^5(e^{2x}+1) - 2arctg^4(e^x)$*)*

– фотографії обчислення похідної вручну;

– лістинг обчислення похідної в Octave.

І таким же чином оформлюємо всі завдання
