

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Тема 3. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Приклад 1. Задано три точки $A(-1,2)$, $B(2,6)$, $C(2,0)$. Необхідно:

- а) зобразити точки на декартовій системі координат;
- б) визначити вектори \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} та \overrightarrow{BC} та знайти їх довжини;
- в) знайти орти векторів \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} та \overrightarrow{BC} ;
- г) обчислити скалярний добуток векторів \overrightarrow{AC} та \overrightarrow{BC} та знайти косинус кута між ними;
- д) обчислити напрямні косинуси вектора \overrightarrow{AB} .

Вказівки до розв'язування

Для визначення векторів скористуємось тим, що якщо відомі точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, то вектор $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. Для визначення довжини вектора \overrightarrow{AB} : $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Для знаходження ортів

скористуємось $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Вираз скалярного добутку векторів $\bar{a} = (a_x, a_y)$ і

$\bar{b} = (b_x, b_y)$ через координати векторів: $(\bar{a}, \bar{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$. Косинус кута між

векторами: $\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$. Напрямні косинуси знаходяться

за формулами: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3;4)$ та точку $N(6;-2)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

відповідно у нашому випадку рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3;4)$ та точку $N(6;-2)$ записується наступним чином:

$$\frac{x - (-3)}{6 - (-3)} = \frac{y - 4}{-2 - 4},$$

$$\frac{x + 3}{9} = \frac{y - 4}{-6},$$

$$-2(x + 3) = 3(y - 4),$$

$$-2x - 6 - 3y + 12 = 0,$$

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

І ми отримали загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, де $A = 2, B = 3, C = -6$. Відповідно нормальний вектор визначається як $\bar{n} = (2, 3)$.

Рівняння прямої у відрізках має наступний вид:

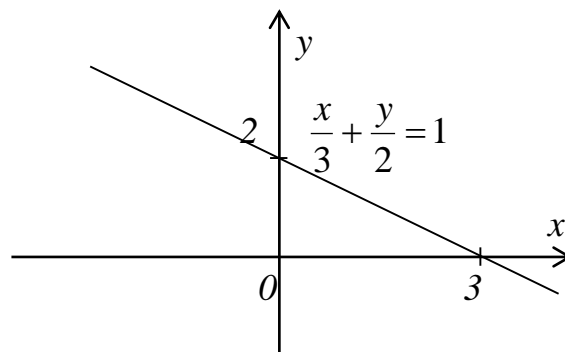
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

перетворимо рівняння $2x + 3y - 6 = 0$ до необхідного вигляду:

$$2x + 3y = 6 \quad | \div 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

І ми отримали *рівняння прямої у відрізках* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де $a = 3, b = 2$. Запис рівняння прямої у відрізках, у випадку, коли пряма не проходить через початок координат, є найзручнішим для подальшого малювання графіку функції. Відмітивши на осі Ox точку $a = 3$, а на осі Oy – точку $b = 2$, необхідно просто провести через них шукану пряму.



Для визначення кутового коефіцієнту k – тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox , необхідно привести рівняння прямої до вигляду $y = kx + b$ (*рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*), де b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy :

$$2x + 3y - 6 = 0,$$

$$3y = -2x + 6,$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Звідки кутовий коефіцієнт $k = -\frac{2}{3}$, а $b = 2$.

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;-3)$ паралельно вектору $\vec{s}(1;0)$. Записати рівняння у загальному вигляді, намалювати графік функції.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (l, m)$ записується наступним чином:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Тобто у нашому випадку:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 3}{0},$$

не потрібно лякатись нуля у знаменнику, бо це лише запис. Приведемо до загального вигляду рівняння:

$$0 \cdot (x - 1) = 1 \cdot (y + 3),$$

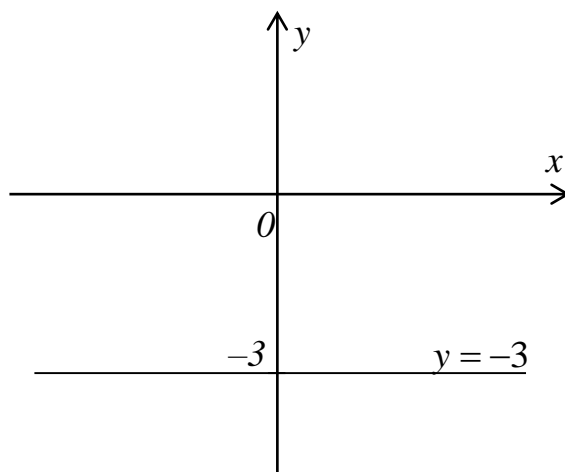
$$y + 3 = 0,$$

тобто $A = 0, B = 1, C = 3$.

Згадаємо, який вигляд має графік функції $y + 3 = 0$ або, якщо перенести 3 у праву частину:

$$y = -3.$$

В декартовій системі координат на площині Oxy необхідно провести пряму, яка перетинає вісь Oy у точці $(0, -3)$, паралельну осі Ox :



Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

3.1. Задано точки $A(3,4,12)$, $B(6,8,0)$. Знайти вектор $\vec{a} = \overline{AB}$, його довжину $|\vec{a}|$ та напрямні косинуси, орт \vec{a}_0 .

3.2. У трикутнику з вершинами $A(2,-1,3)$, $B(-2,2,5)$, $C(1,2,3)$ знайти косинус кута при вершині A .

3.3. Задано вектори $\vec{a} = (2,3,0)$, $\vec{b} = (1,-2,2)$, $\vec{c} = (3,2,1)$. Визначити:

- а) довжину вектора \vec{a} ;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- в) косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b} ;
- г) чи колінеарні вектори \vec{a} і \vec{b} .

3.4. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (1,-1,-1)$ і $\vec{b} = (2,0,2)$.

3.5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;-1)$ та точку $N(-2;3)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.6. Скласти рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{1}{3}$, яка проходить через точку $M_0(-1,3)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках. Побудувати графік прямої.

3.7. Скласти рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = -1$, яка проходить через точку $M_0(2,3)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках. Побудувати графік прямої.

3.8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;0)$ та точку $N(5;4)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.9. Записати рівняння прямої $2x + 3y - 6 = 0$ у вигляді рівняння у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1;2)$ паралельно вектору $\vec{s}(3;-1)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.11. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;1)$ паралельно вектору $\vec{s}(0;-1)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.12. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1)$, з нормальним вектором $\vec{n}(2;0)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

Проценти прості та складені в економічних дослідженнях

Згадаємо з лекції, що розрізняють три основні *задачі на відсотки*:

1. Для того, щоб знайти число, яке складає p відсотків від даного числа A , потрібно:

- представити p процентів у вигляді десяткового дробу;
- помножити число A знайдений десятковий дріб:

$$B = A \cdot \frac{p}{100}.$$

2. Для того, щоб знайти число A по відомій її частині B , яка складає p відсотків від A , потрібно:

- перевести p відсотків в десятковий дріб;
- розділити число B на отриманий десятковий дріб, тобто:

$$A = B \div \frac{p}{100} = B \cdot \frac{100}{p}.$$

3. Якщо відомі число A та число B , то для знаходження який процент p число B складає від числа A , необхідно дріб $\frac{B}{A}$ помножити на 100%:

$$p = \frac{B}{A} \cdot 100\%.$$

Та згадаємо формулу для обчислення капіталу через m років при нарахуванні *простого проценту* p на суму первинного внеску A за кожний рік використання коштами:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{p}{100} \right).$$

Відношення суми, яку виплачують за користування грошовими засобами, до обсягу останніх називають *питомою відсотковою ставкою* (i). Це відношення, виражене у відсотках, називається *відсотковою ставкою*, тобто:

$$i = \frac{P}{100}.$$

І формулу $B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{P}{100}\right)$ можна записати як

$$B(m) = A \cdot (1 + m \cdot i),$$

саме у такому вигляді вона використовується у фінансовій математиці.

Приклад 1

Наприклад, за 1000 грн., узятих у банку, підприємець заплатив 50 грн. Тоді питома відсоткова ставка банку становить

$$\frac{50}{1000} = 0,05,$$

а відсоткова ставка:

$$0,05 = \frac{P}{100} \Rightarrow P = 0,05 \cdot 100 = 5 [\%].$$

Якщо ж питома відсоткова ставка числа 2 відносно числа 200 становить

$$i = \frac{2}{200} = 0,01,$$

а відсоткова ставка, відповідно:

$$P = 0,01 \cdot 100 = 1 [\%].$$

Приклад 2

У банку взято позику 60000 грн. на 4 роки. Річна процентна ставка 12% (простий відсоток). Яка сума погашення позики через 4 роки?

Обчислимо суму за формулою $B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{p}{100}\right)$, де

$A = 60000$, $m = 4$, $p = 12$:

$$B(4) = 60000 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{12}{100}\right) = 60000 \cdot \frac{100 + 4 \cdot 12}{100} = 600 \cdot 148 = 88800.$$

Можна також обчислити суму коштів, яку заплатить позичальник банку за користування коштами, яка становить

$$88800 - 60000 = 28800.$$

Обчислимо, скільки відсотків від позиченої суми (60000 грн.) складає сума за користування коштами (28800 грн.). Скористуємось формулою для 3 типу задач на відсотки: якщо відомі число A та число B , то для знаходження який процент p число B складає від числа A , необхідно дріб $\frac{B}{A}$ помножити на 100%:

$$p = \frac{B}{A} \cdot 100\%.$$

Підставимо наші значення:

$$p = \frac{28800}{60000} \cdot 100 = 48\%.$$

Або можна було 12% помножити на 4 роки, і також отримати 48%.

Приклад 3

Визначити, з якої суми, виданої банком під 10% річних (простий процент), через два роки нагромадиться сума 500 млн. грн.

За формулою $B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{p}{100}\right)$, де $B = 500$, $m = 2$, $p = 10$,

обчислимо суму A :

$$A = \frac{B(m)}{\left(1 + m \cdot \frac{p}{100}\right)} = \frac{500}{\left(1 + 2 \cdot \frac{10}{100}\right)} = \frac{500}{1,2} \approx 416,7 \text{ млн. грн.}$$

Формула для обчислення капіталу через m років при нарахуванні складеного проценту p на суму первинного внеску A за кожний рік використання коштами:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m.$$

Якщо використовувати у формулі позначення *питомої відсоткової ставки*

$i = \frac{p}{100}$, то:

$$B(m) = A \cdot (1 + i)^m.$$

Множник $1 + \frac{p}{100}$ ще називається *коефіцієнтом росту (нарощення)* або

коефіцієнтом складеного відсотку та позначається

$$1 + \frac{p}{100} = q,$$

і формулу можна записати як:

$$B(m) = A \cdot q^m.$$

Приклад 4

У банк під 10% річних відсотків (складений) вкладено суму у 10 тис. грн.
Яку суму отримає вкладник через 5 років?

Обчислимо суму $V(t)$, яку отримає вкладник через 5 років, за формулою

$$V(t) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m, \text{ де } A = 10 \text{ тис. грн.}, m = 5, p = 10:$$

$$V(5) = 10 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 10 \cdot 1,1^5 = 16,1 \text{ тис. грн.}$$

Зауважимо, що коефіцієнт складеного відсотку в цій задачі дорівнює:

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1,1.$$

Якщо відсотки нараховуються декілька разів на рік, то річну процентну ставку ділять на кількість періодів нарахування на рік, а степе́нь умножається на кількість нарахувань на рік:

$$V(t) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot n}\right)^{m \cdot n},$$

де n – кількість нарахувань на рік.

Приклад 5

Обчислимо різницю між отриманим капіталом через 5 років при нарахуванні *складеного проценту* $p = 10\%$ на суму первинного внеску 10000 грн. при нарахуванні один раз на рік та при нарахуванні щоквартально.

Обчислимо капітал при нарахуванні один раз на рік, тобто за формулою

$$V(t) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m:$$

$$V_1(5) = 10000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 10000 \cdot 1,1^5 = 16105,1.$$

При нарахуванні щоквартально скористуємось формулою

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100 \cdot n}\right)^{m \cdot n}, \text{ де } n = 4:$$

$$B_2(5) = 10000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100 \cdot 4}\right)^{5 \cdot 4} = 10000 \cdot 1,025^{20} = 16386,1644.$$

Як бачимо, щоквартальне нарахування надає додатковий прибуток – різниця між $B_2(5)$ та $B_1(5)$ складає:

$$B_2(5) - B_1(5) = 16386,1644 - 16105,1 = 281,0644.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

3.13 На розпродажу перша ціна на ноутбук 15000 грн. була перекреслена, та написано ціну 12000 грн. Визначити знижку на цей товар.

3.14 Після знижки у 30% ціну на навушники ще знизили ще на 10% від останньої ціни. Ціна після цих двох акцій склала 2016 грн. Яка ціна була на початку продажів?

3.15 За використання кредитних коштів у розмірі 30000 грн. дівчина заплатила 500 грн. Обчислити питому відсоткову ставку банку і відповідну відсоткову ставку.

3.16 Чому дорівнює коефіцієнт складеного відсотку q , якщо p дорівнює:

а) 4; б) 5; в) 3,6; г) 5,5; д) $4\frac{3}{4}$; є) $5\frac{1}{3}$.

3.17 Чому дорівнює відсоток p , якщо коефіцієнт складеного відсотку q дорівнює:

а) 1,05; б) 1,04; в) 1,036; г) 1,0475; д) $1\frac{1}{20}$; є) $\frac{26}{25}$.

3.18 Обчислити капітал через 1, 5, 10 років при нарахуванні простого та складеного відсотків $p = 5$ один раз на рік, два рази на рік, чотири рази на рік, при сумі первинного внеску $A = 20000$ грн.

3.19 В якому випадку капітал виявиться більшим, – якщо вкласти кошти на 10 років зі складним відсотком 4%, або на 4 роки зі складним відсотком 10%?