ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Тема 1. Елементи теорії матриць і визначників

1.1. Матриці

Приклад 1. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 4 & 0\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$.

1) Чи можна додати матрицю B до матриці A?
2) Чи можна додати матрицю A до матриці D?
3) Обчислити $A+D$, $2C+A-3D$.

Розв'язання

1) Матрицю B не можна додати до матриці A, бо операція додавання можлива лише для матриць одного розміру. Розмір матриці B дорівнює 3×3 (квадратна матриця порядку 3), а розмір матриці A дорівнює 3×2 (прямокутна матриця).
2) Матриці A і D мають однаковий розмір – 3×2, отже, їх можна додавати.
3) $A+D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -2\\ 7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 0-3\\ -3+6 & 2-2\\ 4+7 & -5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & 0\\ 11 & -5\end{pmatrix}$;

$$2C+A-3D=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -2\\ 7 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 8 & -6\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & -9\\ 18 & -6\\ 21 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1-12 & 4+0+9\\ 8-3-18 & -6+2+6\\ -4+4-21 & 2-5-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-13 & 13\\ -13 & 2\\ -21 & -3\end{pmatrix}.$$

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

1.1. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4 & -3\\ 8 & -2 & 5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -3 & 0\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 3 & -4\\ 6 & -5 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -5 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

1) Які матриці можна додавати одну до одної?
2) Обчислити $3A+D$, $B-2C$.

1.2. Обчислити $-2A+3B-C$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Приклад 2. Задані матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Які матриці узгоджені, а які ні?
2) Помножте узгоджені матриці.

Розв'язання

1) Визначимо, які матриці є узгоджені, а які ні. Порахуємо розміри заданих матриць: $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$. Звідки отримаємо, що:
   - $A_{2\times \underline{3}}$ узгоджена з $B_{\underline{3}\times 1}$,
   - $A_{2\times \underline{3}}$ узгоджена з $C_{\underline{3}\times 3}$,
   - $B_{3\times \underline{1}}$ не узгоджена з $A_{\underline{2}\times 3}$,
   - $B_{3\times \underline{1}}$ не узгоджена з $C_{\underline{3}\times 3}$,
   - $C_{3\times \underline{3}}$ не узгоджена з $A_{\underline{2}\times 3}$,
   - $C_{3\times \underline{3}}$ узгоджена з $B_{\underline{3}\times 1}$.

2) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2) + 0\cdot 3 \\ -4\cdot(-4) + 5\cdot(-2) + 2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+6+0 \\ 16-10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix};$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -4 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+(-3)\cdot(-1)+0\cdot3 & 1\cdot1+(-3)\cdot0+0\cdot(-4) & 1\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2)+0\cdot5\\ (-4)\cdot2+5\cdot(-1)+2\cdot3 & (-4)\cdot1+5\cdot0+2\cdot(-4) & (-4)\cdot(-3)+5\cdot(-2)+2\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+3+0 & 1+0+0 & -3+6+0\\ -8-5+6 & -4+0-8 & 12-10+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ -7 & -12 & 12\end{pmatrix};$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-4)+1\cdot(-2)+(-3)\cdot3\\ (-1)\cdot(-4)+0\cdot(-2)+(-2)\cdot3\\ 3\cdot(-4)+(-4)\cdot(-2)+5\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-8-2-9\\ 4+0-6\\ -12+8+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\ -2\\ 11\end{pmatrix}.$$

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

1.3. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1) Які матриці узгоджені, а які ні?
2) Помножте узгоджені матриці.

1.4. Обчислити добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Приклад 3. Запишіть матрицю, транспоновану відносно матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -2 & 4 & -7 \\ -4 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Для того, щоб записати матрицю, транспоновану відносно заданої матриці A, необхідно просто замінити в заданій матриці всі рядки відповідними за номерами стовпцями (або, що те ж саме, зробити дзеркальне відображення елементів відносно головної діагоналі, а елементи головної діагоналі залишити без змін), тобто:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -2 & 4 & -7 \\ -4 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -9 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

1.5. Запишіть матрицю, транспоновану відносно заданої матриці:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 8\\ 5 & 9 & -1\\ 3 & 0 & -4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 5 & -8\\ -3 & 5 & 7 & 6\\ 4 & -8 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

1.2. Визначники

Приклад 4. Обчислити визначники:

1) другого порядку $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}$;

2) третього порядку $\begin{vmatrix}-3 & 2 & 0\\ 5 & 2 & -1\\ -4 & 6 & 1\end{vmatrix}$.

Розв'язання

1) Згадаємо формулу для обчислення визначника другого порядку:

$$\begin{matrix} + & - \end{matrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

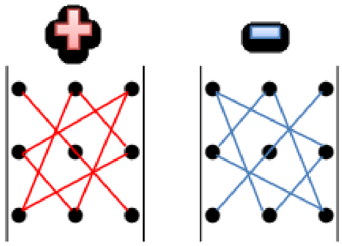
Звідки, за цією формулою, отримаємо:

$$\begin{matrix} + & - \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1-(-4)\cdot 3=2+12=14.$$

2) Для обчислення визначника другого порядку можемо використати два правила – правило трикутників або правило Саррюса. Обчислимо спочатку за одним правилом, а потім – за другим.

Згадаємо правило трикутників:



і обчислимо за цим правилом визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-4) + 0\cdot 5\cdot 6}_{} - \underbrace{0\cdot 2\cdot(-4) - 2\cdot 5\cdot 1 - (-3)\cdot(-1)\cdot 6}_{} =$$

$$= -6 + 8 + 0 + 0 - 10 - 18 = -26.$$

Обчислимо тепер визначник за правилом Саррюса, використовуючи схему:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right),} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right)} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-4) + 0\cdot 5\cdot 6}_{} - \underbrace{0\cdot 2\cdot(-4) - (-3)\cdot(-1)\cdot 6 - 2\cdot 5\cdot 1}_{} =$$

$$=-6+8+0+0-18-10=-26.$$

Як бачимо, обидва правила різняться лише візуально – схемою для запам'ятовування, тому обрання правила трикутників чи правила Саррюса для обчислення визначника третього порядку залежить лише від власного уподобання.

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

1.6. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 10 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

1.7. Обчислити визначники третього порядку:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

1.3. Обернена матриця

Приклад 5. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Відразу згадаємо, що лише невироджена матриця ($|A|\neq 0$) має обернену, тому спочатку перевіримо це:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Визначник матриці A не дорівнює нулю, а значить матриця є невиродженою і має обернену A^{-1}.

Обчислимо обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

В нашому прикладі матриця розміру 2×2:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо елементи приєднаної матриці $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$. A_{11} – це алгебраїчне доповнення елемента a_{11}, тобто для його визначення необхідно $(-1)^{1+1}$ помножити на мінор елемента a_{11}. А мінор цей ми отримаємо, викресливши перший рядок і перший стовпець матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 3 = 3.$$

Обчислимо A_{12}, A_{21}, A_{22}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2;$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot 2=-2;$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^4\cdot 1=1.$$

Звідки приєднана матриця:

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

І можна обчислити обернену:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Перевіримо чи дійсно отримана матриця є оберненою до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. За означенням матриця A^{-1} є оберненою до квадратної матриці *A*, якщо при множенні цієї матриці на задану як справа, так і зліва, в результаті отримуємо одиничну матрицю:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E.$$

Перевіримо:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 1+2\cdot 2 & -3\cdot 2+2\cdot 3\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot(-1)\\ 2\cdot(-3)+3\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Дійсно, A^{-1} є оберненою до квадратної матриці *A*.

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

1.8. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці A:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;   2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;   3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;   4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.