Лабораторна робота №15
Дослідження моделей, заснованих на диференціальних рівняннях (D-схемах)

15.1. Мета роботи

Вивчення способів проведення експериментів з динамічними моделями, що описуються диференціальними рівняннями; придбання навичок розв'язання диференціальних рівнянь із застосуванням математичних пакетів.

15.2. Методичні рекомендації щодо організації самостійної роботи

За темою лабораторної роботи студент повинен: *знати*, як записується динамічна модель за допомогою звичайних диференціальних рівнянь [5]; *вміти* розв'язувати задачу Коші (задачу з початковою умовою) для звичайних диференціальних рівнянь із застосуванням математичних пакетів Python.

Динамічна модель, у загальному випадку, з декількома виходами $s_1 = s_1(t), \ldots, s_k = s_k(t)$ описується за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (нормальна форма):

$$
\begin{aligned}
s_1' &= f_1(t, s_1, s_2, \ldots, s_k), \\
s_2' &= f_2(t, s_1, s_2, \ldots, s_k), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_k' &= f_k(t, s_1, s_2, \ldots, s_k).
\end{aligned}
\tag{15.1}
$$

Якщо відомі значення $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)^T$ у деякий момент часу t_0, $s(t_0) = s^{(0)}$, то в результаті проведення експерименту з динамічною моделлю (15.1), буде знайдена траєкторія поводження вихідних змінних $s = s(t)$ на заданому інтервалі часу $[t_0, t_1]$. Відзначимо, що це є задачею Коші (задачею з початковою умовою) для системи звичайних диференціальних рівнянь (15.1).

15.3. Контрольні приклади

Приклад 1. Процес руху автомобіля на площині в найпростішому випадку може бути описаний системою диференціальних рівнянь [16]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial x}{\partial t} = V\cos\theta \\
\dfrac{\partial y}{\partial t} = V\sin\theta \\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t} = -\dfrac{V}{W\,Ctg\phi + \dfrac{w}{2}}
\end{cases}, \qquad (15.2)
$$

де (x, y) – координати точки M на площині xOy, θ – кут між повздовжньою віссю автомобіля й віссю Ox, V – швидкість, ϕ – кут повороту передніх коліс відносно повздовжньої осі автомобіля, W – відстань між передньою і задньою осями (колісна база), w – відстань між колесами автомобіля на задній осі (колія задніх коліс) (рис. 15.1). У моделі (15.2) всі кути вимірюються в радіанах.

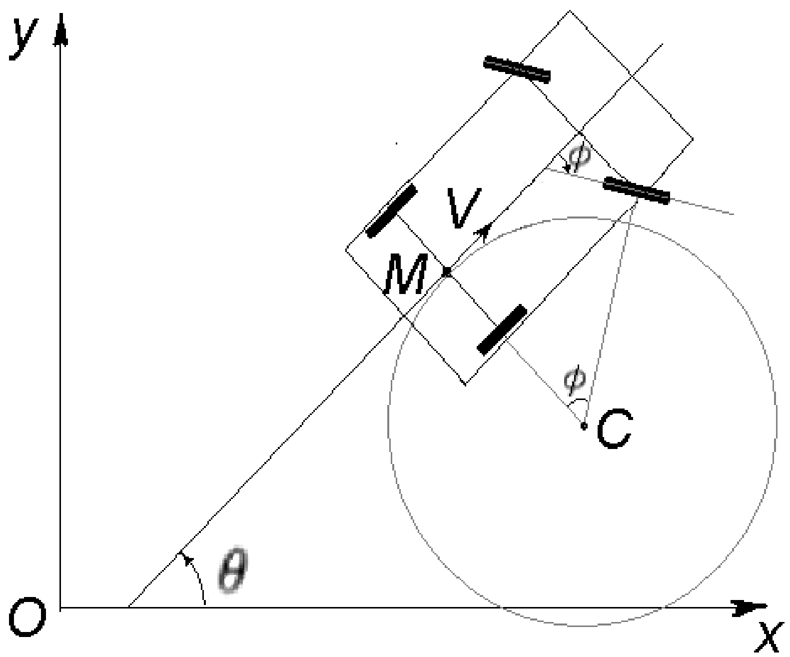

Рис. 15.1. Модель руху автомобіля на площині

Треба визначити траєкторію руху автомобіля (тобто точки M) впродовж 6 секунд, якщо його швидкість V була постійна і дорівнювала 5 км/год., кут ϕ також був постійним і дорівнював 30^0, $W = 2.47$ м, $w = 1.456$ м, на початку руху точка M мала координати $(5;\ 2)$, а кут $\theta = 0$.

*Розв'язання***.** В даному прикладі маємо три координати $s = (x, y, \theta)$, які змінюються у часі, а також три диференціальних рівняння в системі (15.2). Вводимо дані для розв'язання задачі:

```
import math
```

```
W = 2.7
w = 1.456
def V(t):
  return 5
def Fi(t):
  return math.pi/6

# Задаємо рівняння (функцію правої частини)
def FunPr(t, S):
  St = np.zeros((3))
  St[0] = V(t)*math.cos(S[2])
  St[1] = V(t)*math.sin(S[2])
  St[2] = -V(t)/(W/math.tan(Fi(t)) + w/2)
  return St

t0 = 0
t1 = 6
S0 = [5, 2, Fi(a)]
n = 20
```

Отримаємо розв'язок задачі за допомогою процедури *solve_ivp* пакету *scipy.integrate* для Python:

```
from scipy.integrate import solve_ivp

t_eval = np.arange(t0, t1, (t1-t0)/n)
sol = solve_ivp(FunPr, [t0, t1], S0, t_eval=t_eval)
```

Будуємо графік отриманого розв'язку:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(10, 10))
plt.scatter(Y0[0], Y0[1], color = "green")
plt.plot(sol.y.T[:, 0], sol.y.T[:, 1], color="red")
plt.scatter(sol.y.T[-1, 0], sol.y.T[-1, 1], color = "red")
```

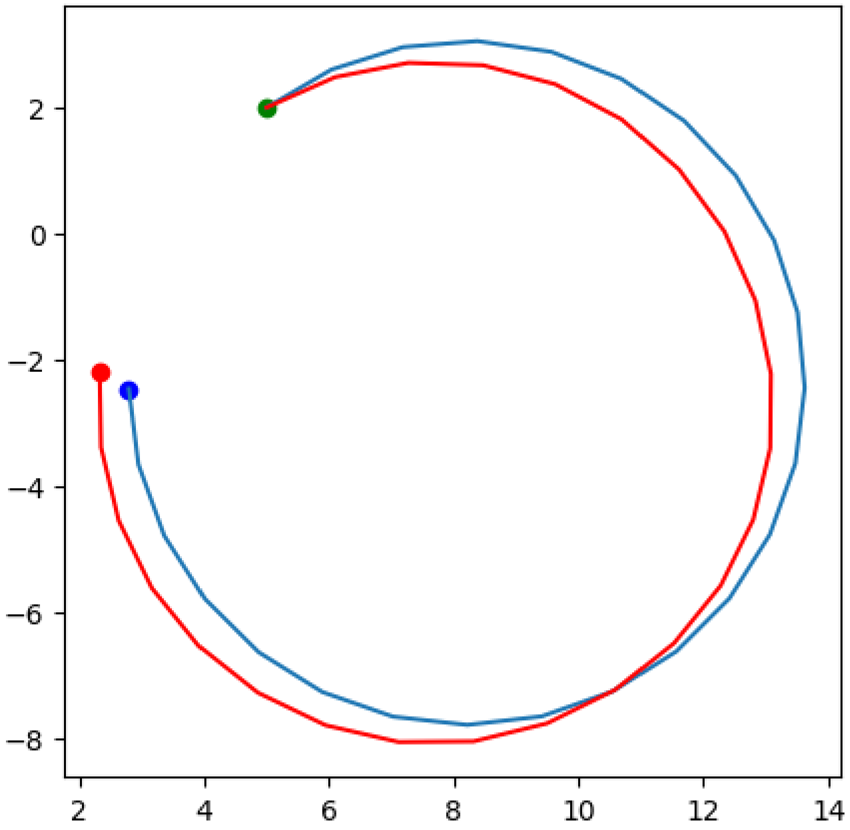

Рис. 15.2. Траєкторія руху автомобіля

Як бачимо, при постійному куті повороту передніх коліс рух автомобіля буде відбуватись по колу (анімація lab_05.mp4).

Приклад 2. Припустимо, що автомобіль почав рух від пункту А і його швидкість будь-який момент t була у півтора рази більша за середню швидкість, відносно попереднього руху. На яку відстань від'їде автомобіль від пункту А через 4 години, якщо відомо, що через 15 хвилин він вже був на відстані 19 км.

Розв'язання

Позначимо через $s = s(t)$ відстань від пункту А у момент t з початку руху. Тоді s' – швидкість автомобіля у момент t (миттєва швидкість), $\frac{s}{t}$ – середня швидкість, відносно попереднього руху. Оскільки швидкість автомобіля у будь-який момент t була у півтора рази більша за середню швидкість, то справедливе відношення:

$$s' = \frac{1.5s}{t}. \qquad (15.3)$$

Тобто записано диференційне рівняння, що описує рух автомобіля. Відомо, що через 15 хвилин він вже був на відстані 19 км, це є початковою умовою: $s(0.25) = 19$ (15 хвилин – це 0.25 години). Треба знайти відстань, на яку від'їде автомобіль від пункту А через 4 години, тому інтервал $[t_0, t_1]$ = [0.25, 4].

Отримаємо розв'язок за допомогою процедури *solve_ivp* пакету *scipy.integrate* для Python:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

# Задаємо рівняння (функцію правої частини)
def MyFunPr(t, s):
  return 1.5*s/t

t0 = 0.25
t1 = 4
s0 = 19
n = 100

t_eval = np.arange(t0, t1, (t1-t0)/(n+1))
sol = solve_ivp(MyFunPr, [t0, t1], [s0], t_eval=t_eval)

print(sol.y.T[-1, 0])
```

Результат

```
1199.008491081161
```

Тобто відповідь: автомобіль за 4 години від'їде від пункту А на 1199 км.

15.4. Порядок виконання роботи і варіанти завдань

15.4.1. Зміст звіту

У практичній частині роботи необхідно:

– виконати приклади, що наведені в розділі 15.2;
– виконати завдання наведене нижче;
– привести тексти складених програм та результати їх виконання.

15.4.2. Варіанти індивідуальних завдань

Варіанти 1-7.

Провести експеримент із динамічною моделлю (15.2), що описує процес руху автомобіля на площині з прикладу 1, на інтервалі $[t_0, t_1]$ за умови, що зміна в часі швидкості $V(t)$ та угла повороту передніх коліс $\varphi(t)$ задані, в початковий момент часу t_0 $s(t_0)=s^{(0)}$. Побудувати графік траєкторії руху автомобіля на інтервалі $[t_0, t_1]$.

Варіант 1. $V(t) = 1.2\,t$, $\varphi(t) = \sin(1+t)$, $t_0=0$, $t_1=6$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

Варіант 2. $V(t) = 1.5\,t$, $\varphi(t) = \sin(0.1+0.5t)$, $t_0=0$, $t_1=7$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Варіант 3. $V(t) = 1.1\,t$, $\varphi(t) = cos(t)$, $t_0=0$, $t_1=5$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Варіант 4. $V(t) = 1.3\,t$, $\varphi(t) = cos(t/2)$, $t_0=0$, $t_1=4$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

Варіант 5. $V(t) = 10$, $\varphi(t) = cos(t/3)$, $t_0=0$, $t_1=7$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

Варіант 6. $V(t) = 0.1t^2$, $\varphi(t) = cos(t/5)$, $t_0=0$, $t_1=8$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Варіант 7. $V(t) = 0.01 * t^3$, $\varphi(t) = cos(2*t)$, $t_0=0$, $t_1=9$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

.

Варіанти 8-13.

Нехай положення тіла на площині визначено координатами $s=(x,y)^T$, а зміна положення тіла в часі описується системою

$$\begin{cases} x^! = a\,t^2 y \\ y^! = -b\,x \end{cases},$$

де *a, b* – параметри моделі.

Провести експеримент з цією динамічною моделлю на інтервалі $[t_0, t_1]$ за умови, що в початковий момент часу t_0 $s(t_0)=s^{(0)}$. Побудувати графік траєкторії руху тіла на інтервалі $[t_0, t_1]$.

Варіант 8. a=1, b=1, $t_0=0$, $t_1=10$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Варіант 9. a=1, b=1, $t_0=0$, $t_1=6$, $s^{(0)}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$.

.

Варіант 10. a=0.5, b=2, $t_0 = 0$, $t_1 = 4$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

Варіант 11. a=1.5, b=3, $t_0 = 0$, $t_1 = 4$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$.

Варіант 12. a=2., b=3.5, $t_0 = 0$, $t_1 = 5$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Варіант 13. a=2.5, b=2, $t_0 = 0$, $t_1 = 11$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.7 \end{pmatrix}$..

Варіант 14. a=-2.5, b=-3, $t_0 = 0$, $t_1 = 7$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \end{pmatrix}$..

Варіант 15. a=-3., b=2, $t_0 = 0$, $t_1 = 12$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ -2.5 \end{pmatrix}$.

Варіанти 14-15.

Модель конвекції рідини в прямокутній металевій коробці, що нагрівається знизу, описується системою нелінійних рівнянь (рівняння Лоренца):

$$\begin{cases} x^! = \sigma(y - x) \\ y^! = x(r - z) - y \\ z^! = xy - \beta z \end{cases}$$

де σ - відношення в'язкості рідини до теплопровідності, ρ - різниця температур між верхньою та нижньою частинами системи, а β - відношення ширини коробки до висоти коробки. Крім того, є три змінні $s = (x, y, z)^T$, що змінюються в часі, тобто описують стан моделі:

x - конвективний потік;

y - горизонтальний розподіл температури;

z - вертикальний розподіл температури.

Провести експеримент з цією динамічною моделлю на інтервалі $[t_0, t_1]$ за умови, що в початковий момент часу t_0 $s(t_0) = s^{(0)}$. Побудувати графік траєкторії зміни стану системи на інтервалі $[t_0, t_1]$.

Варіант 14. σ = 10, ρ = 28, β = 8/3, $t_0 = 0$, $t_1 = 100$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 15. σ = 9, ρ = 30, β = 8/3, $t_0 = 0$, $t_1 = 100$, $s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15.5. Контрольні запитання

1. Яка модель називається динамічною?
2. Як записується динамічна модель за допомогою диференціальних рівнянь?
3. До чого зводиться проведення експерименту із динамічною моделлю, що описується диференціальними рівняннями?
4. В чому полягає задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь?