Лабораторна робота 2.
Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

2.1. Мета роботи

Вивчення методу Гауса із частковим вибором головного елемента та ітераційних методів для практичного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, набуття навичок використання цих методів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням комп'ютера.

2.2. Методичні рекомендації щодо організації самостійної роботи

За темою лабораторної роботи студент повинен: *знати* загальне формулювання задачі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь; *уміти* розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом виключення Гауса [1; 2; 6] і методом ітерацій; *вміти* застосовувати процедури пакетів Python для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Задача розв'язання системи алгебраїчних лінійних рівнянь у загальному вигляді формулюється в такий спосіб: необхідно знайти n невідомих $x_i \in R^1$, $i = \overline{1, n}$, що задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (2.1)$$

де $a_{ij} \in R^1,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}$ – задані коефіцієнти за невідомих; $b_i \in R^1$, $i = \overline{1, n}$ – задані праві частини (вільні члени).

Якщо ввести позначення $A = (a_{ij})_{ij=1}^{n}$ – матриця розмірності $n \times n$ з коефіцієнтами a_{ij}, $b = (b_i)_{i=1}^{n}$ – вектор-стовпець розмірності n з елементами b_i, $x = (x_i)_{i=1}^{n}$ – вектор-стовпець розмірності n з елементами x_i, то систему (2.1) можна записати у матричному вигляді:

$$A \cdot x = b. \qquad (2.2)$$

Для того щоб система (2.2) мала єдиний розв'язок, необхідно та достатньо, щоб $\det A \neq 0$.

Найбільш відомим з методів розв'язання системи (2.1) є **метод виключення Гауса**, ідея якого полягає в послідовному виключенні невідомих з рівнянь.

Розрахункові формули метода Гауса:

1. Позначимо $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$; $a_{i,n+1}^{(0)} = b_i$, $i = \overline{1, n}$.
2. Прямий хід, k -й крок $(k = \overline{1, n})$: $a_{kk}^{(k)} = 1$, $a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$, $j = \overline{k+1, n+1}$;

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \times a_{kj}^{(k)}$, $i = \overline{k+1, n}$, $j = \overline{k+1, n+1}$.

3. Зворотний хід: $x_n = a_{n,n+1}^{(n)}$, $x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j$, $k = \overline{n-1, 1}$.

Для ручного розрахунку застосовують схему, що наведена в табл. 2.1 для випадку, коли $n = 4$.

Таблиця 2.1

Схема ручного розрахунку (метод Гауса)

Коефіцієнти за невідомих				Вільні члени b
x_1	x_2	x_3	x_4	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$a_{15} = b_1$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$a_{25} = b_2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$a_{35} = b_3$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$a_{45} = b_4$
1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$
0	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$
0	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$
0	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$
	1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$
	0	$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$
	0	$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$
		1	$a_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(3)}$
		0	$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$
			1	$a_{45}^{(4)}$

Рядки, що містять одиницю, називають виділеними рядками. Діагональний елемент $a_{kk}^{(k-1)}$, на який проводиться ділення, є **головним** (ведучим) **елементом**. Якщо головний елемент близький до нуля за абсолютною величиною, то необхідно знайти у відповідному (k-ому) стовпці максимальний за модулем елемент і переставити рядки місцями так, щоб цей елемент став головним.

Процес отримання виділених рядків (приведення системи до трикутного вигляду) називають **прямим ходом**, а процес знаходження невідомих шляхом використання виділених рядків – **зворотним ходом** методу Гауса.

Метод ітерацій є найбільш типовим прикладом ітераційного (наближеного) методу розв'язання системи лінійних рівнянь (2.2).

Для застосування методу ітерацій систему (2.2) необхідно подати у вигляді:

$$x = C \cdot x + d, \tag{2.3}$$

де $C \in R^{n \times n}$, $d \in R^n$.

Алгоритм методу ітерацій.

1. Задається $\varepsilon > 0$ – точність розв'язання задачі та початкове наближення розв'язку $x^{(0)} \in R^n$ (наприклад $x^{(0)} = d$).

2. На k-й ітерації методу ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) обчислюється наступне наближення $x^{(k+1)}$ за формулою:

$$x^{(k+1)} = C \cdot x^{(k)} + d.$$

3. Перевіряється критерій "останову" $\frac{q}{1-q}\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \varepsilon$, де $0 < q < 1$ (визначається з умови збіжності).

Метод простої ітерації збігається тільки за виконанні умови:

$$\|C\| \leq q, \tag{2.4}$$

де $0 < q < 1$ (умова збіжності) [1; 2; 6]. Тут, як норму матриці C можна розглядати величину

$$\|C\| \equiv \max_j \sum_{i=1}^{n} \left|c_{ij}\right| \text{ або } \|C\| \equiv \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|c_{ij}\right|. \tag{2.5}$$

Приведення системи (2.1) до виду (2.3) можна здійснити різними способами, важливо тільки, щоб виконувалася умова збіжності (2.4). Розглянемо один з них.

Якщо діагональні елементи матриці відмінні від нуля, тобто $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, то систему (2.1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1), \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - a_{n3}x_3 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} + b_n). \end{cases} . \tag{2.6}$$

Застосування методу ітерацій до системи (2.6) називають **методом Якобі.** З (2.4) – (2.5) витікає, що для збіжності методу Якобі повинна виконуватись умова $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \quad \forall\ i = \overline{1,\ n}$.

2.3. Контрольні приклади

Приклад 1. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}14x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}11 \\ 1{,}07x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}56x_3 = 0{,}48 \\ 0{,}64x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}38x_3 = -0{,}83 \end{cases}$$

Ручний розрахунок. Результати ручного розрахунку наведені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

x_1	x_2	x_3	B
0,14	0,24	–0,84	1,11
1,07	–0,83	0,56	0,48
0,64	0,43	–0,38	–0,83
1	1,7143	–6	7,926
0	–2,6643	6,98	–8,0036
0	0,6672	–3,46	–5,9043
	1	–2,6198	3,004
	0	1,7121	–3,9
		1	–2,2779
	1	0	–2,9636
1			–0,6583

Розв'язок: $x_1 = -0{,}6583$, $x_2 = -2{,}9636$, $x_3 = -2{,}2779$.

Використання процедур пакету numpy в Python. У пакеті *numpy* є модуль для розв'язання задач лінійної алгебри *linalg*, в якому є процедура *solve* призначена для розв'язання системи лінійних рівнянь у матричному вигляді (2.2). Для її виклику необхідно визначити та задати матрицю A та вектор b.

Задається матриця коефіцієнтів *A* та вектор вільних членів *b*:

import numpy as np

```
A = np.array([[0.14, 0.24, -0.84],
              [1.07, -0.83, 0.56],
              [0.64, 0.43, -0.38]])
b = np.array([1.11, 0.48, -0.83])
```

Розв'язання з використанням процедури *solve* з пакета *NumPy.linalg*:

```
x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)
```

```
[-0.65815598 -2.96366386 -2.27788234]
```

Перевірка розв'язку, (A x – b) повинно дорівнювати 0:

```
print(np.dot(A, x) - b)
```

```
[ 0.00000000e+00 -1.11022302e-16 -5.55111512e-16]
```

Приклад 2. Необхідно побудувати площину у тривимірному просторі, що проходить через три точки з координатами $(10,\ 5,\ 3)$, $(1,\ 7,\ 5)$, $(-2,\ 6,\ 1)$.

Розв'язання. У загальному вигляді рівняння площини у тривимірному просторі має вид: $\mathrm{z} = \mathrm{a}\ \mathrm{x} + \mathrm{b}\ \mathrm{y} + \mathrm{c}$, де $(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})$ – тримірні координати. Для побудови площини достатньо знайти параметри рівняння $\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}$. Оскільки площина має проходити через задані точки, то параметри рівняння $\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}$ повинні задовольняти системі рівнянь:

$$\begin{cases} 10\ \mathrm{a} + 5\ \mathrm{b} + \mathrm{c} = 3 \\ 1\ \mathrm{a} + 7\ \mathrm{b} + \mathrm{c} = 5 \\ -2\ \mathrm{a} + 6\ \mathrm{b} + \mathrm{c} = 1 \end{cases}.$$

Реалізація в *Python*:

```
import numpy as np

A = np.array([[10, 5, 1],
              [1, 7, 1],
              [-2, 6, 1]])
b = np.array([3, 5, 1])

x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)
```

```
[ 0.4   2.8 -15. ]
```

Розв'язок: $\mathrm{a} = 0.4$, $\mathrm{b} = 2.8$, $\mathbf{c} = \mathbf{-15}$, тобто рівняння площини має вигляд: $\mathrm{z} = 0.4\ \mathrm{x} + 2.8\ \mathrm{y} - 15$.

Приклад 3. Розв'язати методом ітерацій систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ 6x_1 + 18x_2 + 6x_3 = 54, \\ 10x_1 + 20x_2 + 40x_3 = 160. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 + 2, \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + 3, \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 4. \end{cases}$$

Реалізація методу ітерацій в *Python*:

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA

def MetIterSLE(C, d, n, eps):
  x0 = d
  while (True):
    x1 = np.dot(C, x0) + d
    if LA.norm(x1-x0) <= eps:
      break
    x0 = x1
  return x1
```

Введення початкових даних і виклик запрограмованої процедури для отримання розв'язку:

```
C = np.array([[0, -1/5, -2/5],
             [-1/3, 0, -1/3],
             [-1/4, -1/2, 0]])
d = np.array([2, 3, 4])
n = 3
eps = 0.0001
x = MetIterSLE(C, d, n, eps)
print(x)
```

```
[0.44446401 1.86668749 2.9555782 ]
```

Перевірка розв'язку:

```
y = np.dot(C, x) + d
print(y - x)
```

```
[-3.27880853e-05 -3.48913777e-05 -3.79464864e-05]
```

Тобто *y* та *x* майже однакові, відповідно до заданої точності eps = 0.0001.

2.4. Порядок виконання роботи і варіанти завдань

2.4.1. Зміст звіту

У теоретичній частині роботи необхідно стисло описати:

постановку задачі розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

У практичній частині роботи необхідно:

запрограмувати у вигляді окремого модуля метод Гауса;

запрограмувати у вигляді окремого модуля метод Якобі;

надати тексти складених програм;

розв'язати задачу з індивідуального завдання (табл. 2.3) із застосуванням складених програм і засобів математичного пакету *NumPy*.*linalg*.

2.4.2. Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 2.3

Індивідуальні завдання за варіантами

Варіант	Система
1	$\begin{cases} 5{,}23x_1 + 0{,}57x_2 + 0{,}61x_3 + 0{,}48x_4 = 6{,}72 \\ 0{,}66x_1 + 7{,}04x_2 + 0{,}77x_3 + 0{,}36x_4 = -6{,}96 \\ 0{,}34x_1 + 0{,}82x_2 + 6{,}81x_3 + 0{,}18x_4 = 80{,}33 \\ 0{,}11x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}90x_3 + 8{,}33x_4 = 26{,}05 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 0{,}70x_1 + 5{,}09x_2 + 0{,}89x_3 + 0{,}17x_4 = -4{,}43 \\ 0{,}32x_1 + 0{,}15x_2 + 9{,}11x_3 + 0{,}87x_4 = 8{,}10 \\ 0{,}85x_1 + 0{,}26x_2 + 0{,}19x_3 + 7{,}33x_4 = 12{,}73 \\ 0{,}21x_1 + 0{,}26x_2 + 0{,}95x_3 + 5{,}13x_4 = 16{,}06 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4{,}97x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}36x_3 + 0{,}81x_4 = -15{,}43 \\ 0{,}66x_1 + 7{,}12x_2 + 0{,}32x_3 + 0{,}77x_4 = 8{,}28 \\ 0{,}59x_1 + 0{,}16x_2 + 9{,}43x_3 + 0{,}36x_4 = 17{,}00 \\ 0{,}87x_1 + 0{,}91x_2 + 0{,}42x_3 + 8{,}15x_4 = 8{,}22 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 7{,}70x_1 + 0{,}38x_2 + 0{,}43x_3 + 0{,}83x_4 = -13{,}79 \\ 0{,}97x_1 + 6{,}49x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}06x_4 = 17{,}35 \\ 0{,}81x_1 + 0{,}53x_2 + 9{,}13x_3 + 0{,}05x_4 = 12{,}41 \\ 0{,}19x_1 + 0{,}27x_2 + 0{,}38x_3 + 8{,}47x_4 = 14{,}58 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5{,}19x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}32x_3 + 0{,}57x_4 = -10{,}23 \\ 0{,}86x_1 + 7{,}49x_2 + 0{,}75x_3 + 0{,}96x_4 = 11{,}25 \\ 0{,}63x_1 + 0{,}42x_2 + 8{,}13x_3 + 0{,}52x_4 = 11{,}33 \\ 0{,}27x_1 + 0{,}65x_2 + 0{,}28x_3 + 6{,}99x_4 = 9{,}56 \end{cases}$

6	$\begin{cases} 6{,}17x_1 + 0{,}63x_2 + 0{,}46x_3 + 0{,}24x_4 = 4{,}12 \\ 0{,}43x_1 + 7{,}08x_2 + 0{,}83x_3 + 0{,}66x_4 = 9{,}72 \\ 0{,}34x_1 + 0{,}52x_2 + 5{,}44x_3 + 0{,}17x_4 = -5{,}88 \\ 0{,}71x_1 + 0{,}93x_2 + 0{,}65x_3 + 8{,}83x_4 = 14{,}25 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 7{,}01x_1 + 0{,}93x_2 + 0{,}75x_3 + 0{,}53x_4 = -13 \\ 0{,}22x_1 + 3{,}67x_2 + 0{,}31x_3 + 0{,}57x_4 = 6 \\ 0{,}46x_1 + 0{,}67x_2 + 9{,}16x_3 + 0{,}69x_4 = 12 \\ 0{,}82x_1 + 0{,}37x_2 + 0{,}35x_3 + 7{,}24x_4 = 2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3{,}47x_1 + 0{,}37x_2 + 0{,}56x_3 + 0{,}72x_4 = -6{,}57 \\ 0{,}52x_1 + 5{,}88x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}40x_4 = 7{,}27 \\ 0{,}72x_1 + 0{,}63x_2 + 9{,}65x_3 + 0{,}75x_4 = 9{,}77 \\ 0{,}17x_1 + 0{,}97x_2 + 0{,}47x_3 + 8{,}12x_4 = 11{,}72 \end{cases}$

Закінчення таблиці 2.3

9	$\begin{cases} 3{,}97x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}53x_3 + 0{,}68x_4 = -10{,}71 \\ 0{,}60x_1 + 8{,}71x_2 + 0{,}47x_3 + 0{,}93x_4 = 11{,}69 \\ 0{,}27x_1 + 0{,}59x_2 + 6{,}43x_3 + 0{,}63x_4 = 14{,}99 \\ 0{,}32x_1 + 0{,}51x_2 + 0{,}84x_3 + 8{,}77x_4 = 18{,}49 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 4{,}47x_1 + 0{,}93x_2 + 0{,}76x_3 + 0{,}52x_4 = -14{,}66 \\ 0{,}38x_1 + 6{,}63x_2 + 0{,}43x_3 + 0{,}61x_4 = 21{,}65 \\ 0{,}53x_1 + 0{,}76x_2 + 8{,}11x_3 + 0{,}27x_4 = 14{,}25 \\ 0{,}44x_1 + 0{,}68x_2 + 0{,}83x_3 + 7{,}09x_4 = 16{,}86 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 5{,}12x_1 + 0{,}82x_2 + 0{,}47x_3 + 0{,}68x_4 = -11{,}44 \\ 0{,}26x_1 + 6{,}49x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}37x_4 = 12{,}03 \\ 0{,}49x_1 + 0{,}42x_2 + 7{,}95x_3 + 0{,}95x_4 = 16{,}22 \\ 0{,}31x_1 + 0{,}59x_2 + 0{,}91x_3 + 8{,}55x_4 = 13{,}59 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 6{,}01x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}44x_4 = 7{,}62 \\ 0{,}11x_1 + 5{,}42x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}66x_4 = -6{,}84 \\ 0{,}63x_1 + 0{,}43x_2 + 6{,}88x_3 + 0{,}77x_4 = 10{,}43 \\ 0{,}99x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}57x_3 + 8{,}13x_4 = 18{,}44 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 5{,}49x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}57x_3 + 0{,}79x_4 = -9{,}56 \\ 0{,}51x_1 + 7{,}82x_2 + 0{,}86x_3 + 0{,}64x_4 = 13{,}42 \\ 0{,}37x_1 + 0{,}38x_2 + 7{,}93x_3 + 0{,}42x_4 = 12{,}84 \\ 0{,}91x_1 + 0{,}53x_2 + 0{,}88x_3 + 0{,}02x_4 = 16{,}02 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 4{,}75x_1 + 0{,}49x_2 + 0{,}07x_3 + 0{,}33x_4 = -14{,}30 \\ 0{,}24x_1 + 5{,}68x_2 + 0{,}63x_3 + 0{,}74x_4 = 10{,}07 \\ 0{,}46x_1 + 0{,}98x_2 + 7{,}08x_3 + 0{,}92x_4 = 8{,}53 \\ 0{,}53x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}76x_3 + 9{,}13x_4 = 9{,}99 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 10{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = -7 \\ 1{,}2x_1 + 11{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 5{,}3 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 9{,}8x_3 + 1{,}3x_4 = 10{,}3 \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 12{,}1x_4 = 24{,}6 \end{cases}$

1.5. Контрольні запитання

1. Які є типи методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

2. У чому полягає сутність методу Гауса з вибором головного елемента?
3. У чому полягає ідея методу ітерації?
4. Чим метод Якобі відрізняється від методу ітерацій?
5. За яких умов метод ітерації збігається? Якою тоді є оцінка швидкості збіжності?
6. Які проблеми виникають у розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності та як вони вирішуються?