ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Похідна функції в точці. Механічний зміст похідної

Почнемо заняття з нескладної фізичної задачі. Розглянемо матеріальну точку, яка рухається прямолінійно, зі змінною (непостійною) швидкістю (можна представити її рух упродовж осі абсцис Ox – рис. 1). Нехай в момент часу t_0 відстань від початку відліку дорівнює $x(t_0)$, тобто $x(t_0)$ – є координатою матеріальної точки. Через деякий час, позначимо його через Δt, координата точки буде вже $x(t_0+\Delta t)$.

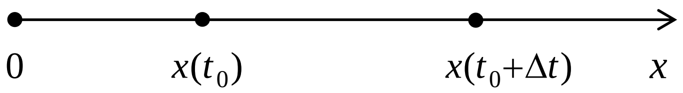


Рисунок 1 – Координати матеріальної точки на осі *Ox*

Пройдений точкою шлях за час Δt відповідно буде дорівнювати різниці:

$$x(t_0+\Delta t)-x(t_0),$$

звідки середня швидкість руху точки, при подоланні відстані від $x(t_0)$ до $x(t_0+\Delta t)$:

$$v_{сер}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

Але як визначити миттєву швидкість у сам момент часу t_0? Чим меншим ми будемо обирати приріст Δt, тим «ближче» ми будемо до точного значення миттєвої швидкості. Спрямуємо Δt до нуля та запишемо границю для обчислення миттєвої швидкості:

$$v_{мит} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Ця границя називається *швидкістю у даний момент часу* t_0.

В загальному випадку, якщо розглянути функцію $y = f(x)$ (замість $x(t)$ у розглянутій фізичній задачі), можна сказати, що така границя характеризує *швидкість змінення функції в заданій точці*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Перейдемо до строгого означення похідної функції в точці.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0 і приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ такий, що точка $(x_0 + \Delta x)$ теж належить вказаному околу: $(x_0 + \Delta x) \in U(x_0)$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 та позначається $f'(x_0)$, тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Чисельник дробу $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ називається *приростом функції*, а знаменник Δx – *приростом аргументу*. І часто говорять, що *похідна є границею відношення* *приросту функції до приросту аргументу, при умові, що приріст аргументу прямує до нуля.*

Для **позначення похідної використовують декілька символів** (кожний за ім'ям науковця):

$$y' \text{ або } f'(x_0) \text{ – Лагранж;}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ або } \frac{df(x_0)}{dx} \text{ – Лейбніц;}$$

$$Dy \text{ або } Df(x_0) \text{ – Коші.}$$

В подальшому під виразом «функція має похідну» ми завжди будемо розуміти існування скінченної похідної, якщо не оговорено протилежне. Операція обчислення похідної функції називається *операцією диференціювання*.

Економічний зміст похідної

Найважливішим напрямом застосування диференціального числення в економіці є введення його саме за допомогою поняття *еластичності*. Те, що цей термін є базовим в сучасному економічному аналізі, стало заслугою одного з найвидатніших економістів Альфреда Маршалла, який ввів це поняття в економічний аналіз. Показнику, який дозволяє зробити оцінку впливу зміни ціни на попит Маршалл дав назву *еластичність попиту* та визначив його як *відношення між відносною зміною попиту та відносною зміною ціни*.

Для вирішення задачі вивчення взаємозалежностей показників економічних процесів використовують апарат математичного аналізу, який надає можливість дослідити функціональні залежності між показниками. Похідна стає у нагоді при знаходженні швидкості зміни деякого економічного показника по відношенню до іншого.

- «В якому напрямку зміниться дохід країни при зростанні податків або при введенні закордонних мит?»

- «Зросте чи зменшиться виручка підприємства при збільшенні ціни на його продукцію?»

Для розв'язання подібних задач повинні бути побудовані та досліджені функції, які визначають зв'язок між досліджуваними характеристиками. Так, поняття *еластичності функції* виникає при вирішенні питання, як *при заданій функціональній залежності* $y = f(x)$ *одного фактора y від іншого x*, виміряти «чутливість» залежної змінної y від x. Одним з показників «чутливості» є похідна функції y, що показує швидкість її зміни. Але в економіці вона не є зручною, бо знайдений таким чином показник залежить від вибору одиниць вимірювання величин x та y. Тому в економіці при вимірянні «чутливості» *зміни функції до зміни аргументу досліджують зв'язок не абсолютних змінень, а їх відносних величин.*

Означення. Для дослідження процесів в економіці застосовують поняття *еластичності функції* E_x^y, яке показує границю відношення відносного приросту функції $y = f(x)$ – $\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)$ до відносного приросту змінної x – $\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)$, при $\Delta x \to \infty$

:

$$E_x^y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)}{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x \cdot \Delta y}{y \cdot \Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Еластичність функції – показує величину змінення функції в процентах, якщо значення аргументу зростає на один процент.

Обчислення еластичності дає можливість визначити реакцію споживача на зміну ціни, підготувати виробництво до зміни попиту, здійснити регулювання ринку. Інформація про еластичність попиту може також використовуватися при встановленні рівня акцизу, прийняття рішень щодо відповідної маркетингової політики фірми, виконання різних операцій на зовнішньому ринку (експортно-імпортних операцій, операцій з валютними курсами тощо).

Розрізняють декілька *видів еластичності*:

– *еластичність попиту за ціною (пряма)* – показує процентне змінення величини попиту на якесь благо при зміні його ціни на 1% (характеризує реакцію споживачів на зміну цін на продукти);
– *еластичність попиту за доходом* – характеризує відносне процентне змінення величини попиту на якесь благо при зміні доходу споживача на 1% (додатна еластичність визначає якісні товари, від'ємна – неякісні);
– *цінова еластичність ресурсів* – показує відносне змінення величини попиту на якийсь ресурс (наприклад, труд) при зміні його ціни на 1%.

Геометричний зміст похідної

Означення. Нехай на плоскій кривій γ задано точку *M*. Оберемо ще одну точку, відмінну від *M*, на цій кривій та позначимо її M_1. Проведемо січну MM_1. Якщо при прямуванні точки M_1 до точки *M* січна MM_1 прагне зайняти певне положення, то пряма *T*, яка знаходиться в цьому положенні, називається *дотичною до кривої* γ в точці *M* (рис. 2).

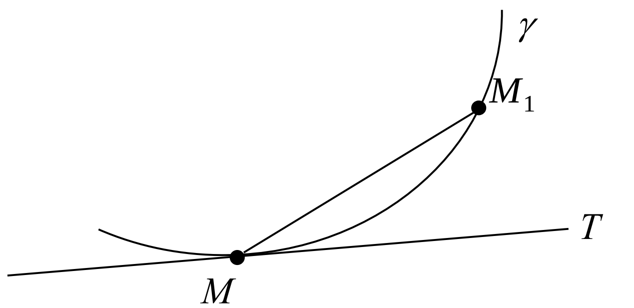


Рисунок 2 – Дотична *T* до кривої *γ* в точці *M*

Означення. *Кутом нахилу до осі абсцис прямої l,* яка перетинає цю ось в точці *P*, називається кут, відкладений від додатного напрямку осі *Ox* до прямої *l* (на рис. 3 – кут α). Якщо пряма l паралельна осі абсцис (або співпадає з нею), то вказаний кут дорівнює нулю.

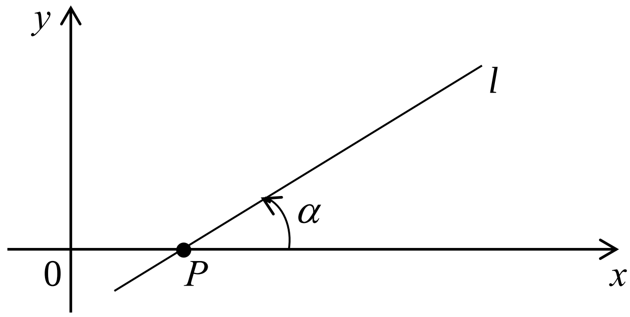


Рисунок 3 – Кут нахилу до осі абсцис прямої l

Перейдемо до геометричного змісту похідної.

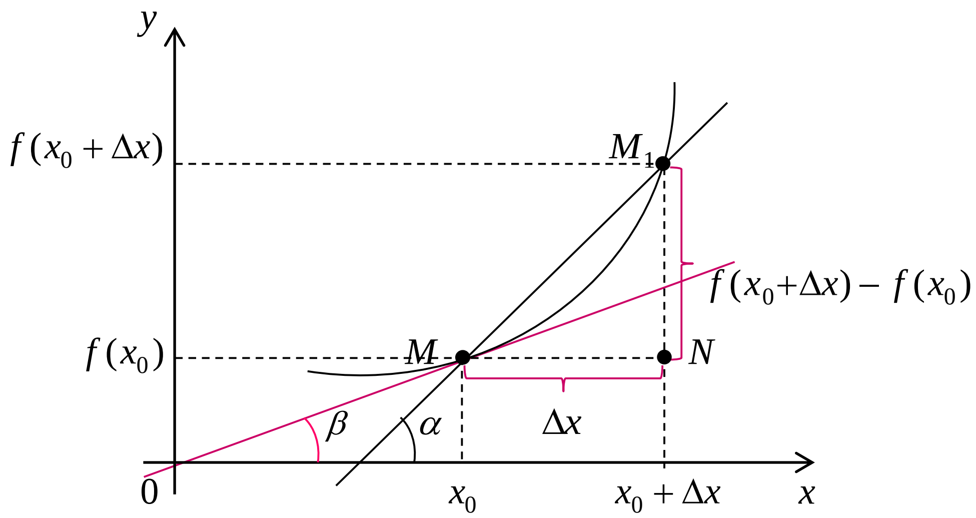


Рисунок 4 – Геометричний зміст похідної

На рисунку 4 представлено графік функції $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0. Точка $M(x_0, f(x_0))$ належить кривій графіку функції $y = f(x)$. Оберемо приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ такий, щоб точка $(x_0 + \Delta x)$ теж належала вказаному околу: $(x_0 + \Delta x) \in U(x_0)$, та відмітимо на графіку функції відповідну точку $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Обчислимо кут нахилу α до осі абсцис прямої, що проходить через точки $M(x_0, f(x_0))$ та $M_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$:

$$tg\alpha = \frac{M_1N}{MN} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Спрямуємо точку M_1 до точки M. Граничне положення січної надасть нам дотичну *T*, і відповідно кут нахилу α січної MM_1 буде прямувати до кута нахилу β дотичної *T* в точці $M(x_0, f(x_0))$:

$$tg\beta = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (M_1 \to M)}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

де, як бачимо, права частина в точності є похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, то тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної в точці $(x_0, f(x_0))$ (кутовий коефіцієнт дотичної) в точності дорівнює похідній: $f'(x_0) = tg\beta$. І *геометричний зміст похідної* можна сформулювати наступним чином: **похідна** $f'(x_0)$ **дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, яка проведена до графіку функції** $y = f(x)$ **в точці** $(x_0, f(x_0))$**.**

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0, C = const \in \mathbb{R}$;
2. $(C \cdot f)' = C \cdot f'$;
3. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
4. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, якщо $g(x) \neq 0$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$C' = 0, C = const \in \mathbb{R}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\left(x^\mu\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(shx)' = chx$
$(\sin x)' = \cos x$	$(chx)' = shx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Диференціювання функції, що задана параметрично

Означення. Нехай функції $x = x(t)$ та $y = y(t)$ визначені в деякому околі $U(t_0)$ точки $t_0 \in \mathbb{R}$, та функція $x = x(t)$ неперервна та строго монотонна в околі $U(t_0)$. Тоді існує обернена до $x = x(t)$ функція $t = t(x)$ в деякому околі точки $x_0 = x(t_0)$, а значить визначена складна функція $y = y(t(x))$ в $U(x_0)$. Ця функція $y = y(t(x))$ має назву *параметрично заданої функції, що задана формулами* $x = x(t)$ *та* $y = y(t)$.

Теорема. *Якщо функції* $x = x(t)$ та $y = y(t)$ *диференційовані в точці* $t_0 \in \mathbb{R}$, *та* $x'(t_0) \neq 0$, *то параметрично задана функція* $y = y(t(x))$ *також має в точці* $x_0 = x(t_0)$ *похідні, причому*

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Диференціал функції

Означення. Вираз $f'(x_0) \cdot \Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 та позначається dy або $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

$$dy = y' \cdot \Delta x.$$

Для приросту Δx використовується позначення dx, при цьому завжди потрібно розуміти, де у записі диференціал функції, а де саме приріст незалежної змінної. Тобто в нових позначеннях можна записати, що диференціал функції дорівнює:

$$dy = y' \cdot dx,$$

і саме цей варіант запису диференціалу використовується найчастіше.

З означення диференціалу випливають правила обчислення, які повторюють правила обчислення похідної.

Правила диференціювання:

1. $d(c \cdot f) = c \cdot df$;
2. $d(f \pm g) = df \pm dg$;

3. $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$;

4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$.

Таблиця диференціалів елементарних функцій повторює таблицю похідних з додатковим множником dx.

Застосування диференціалу до наближених обчислень

Однією з властивостей диференціалу є те, що він відрізняється від приросту функції на величину, яка є нескінченно малою вищого порядку аніж Δx. Це випливає з означення диференціалу. Тобто при $\Delta x \to 0$ можна записати наближену рівність:

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

або, що теж саме

$$\Delta y \approx dy.$$

Запишемо ліву частину як $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ і отримаємо:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Звідки

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Саме ця формула має велике значення для наближених обчислень значення функції в точці. На практичних заняттях найчастіше вона використовується в наступних позначеннях:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

де:

– $x = x_0 + \Delta x$ – те значення змінної, в якому необхідне обчислити функцію;

– x_0 – найближче до x значення змінної, в якому обчислити функцію найпростіше;

– $\Delta x = x - x_0$ – різниця між заданою точкою x та найближчою «зручною» точкою x_0.

Або, ще інший можливий запис

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку X скінченну похідну. Якщо в точці $x_0 \in X$ вже функція $f'(x)$ також має похідну, то цю похідну називають *похідною другого порядку* або *другою похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 та позначають одним з символів

$$y'', \frac{d^2 y}{dx^2}, D^2 y, f''(x_0), \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, D^2 f(x_0).$$

Так само, якщо вже $y = f(x)$ має на проміжку X скінченну другу похідну, то її похідна в точці x_0 називається *похідною третього порядку* або *третьою похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 та позначають одним з символів

$$y''', \frac{d^3 y}{dx^3}, D^3 y, f'''(x_0), \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}, D^3 f(x_0).$$

Таким же чином від *третьої похідної* переходимо до *четвертої* і так далі.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку X скінченні похідні $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$. Якщо в точці $x_0 \in X$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то її називають *похідною n-порядку функції* $f(x)$ *в точці* x_0 та позначають $f^{(n)}(x_0)$ або $y^{(n)}(x_0)$.

Таким чином, якщо функція має в точці x_0 похідні до n-го порядку включно, то

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Означення. Функцію, яка має на деякому проміжку X похідні до n-го порядку включно, називають n разів диференційованою на множині X. Функцію, яка на множині X має похідні будь-якого порядку, називають *нескінченно диференційованою на множині* X **.**

Зауваження. Зручно вважати, що похідна нульового порядку співпадає з самою функцією, тобто

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості похідних:

1. $(c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x)$,
2. $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$,

де $f(x)$ та $g(x)$ – функції, які мають похідні до n-го порядку включно.

Теорема. (Формула Лейбніца) *Нехай функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *мають в точці* x *похідні* n*-го порядку. Тоді має місце формула*

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x).$$

Диференціал *n*-го порядку

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x скінченну похідну $n-$го порядку $f^{(n)}(x)$. Функція $f^{(n)}(x)dx^n$ змінної dx^n називається *диференціалом n-го порядку функції* $f(x)$ *в точці* x та позначається $d^n f(x)$ або $d^n y$.

Дослідження функцій

1. Монотонність функції на інтервалі

Теорема (Критерій нестрогої монотонності). *Диференційована на інтервалі* (a,b) *функція* $f(x)$ *не спадає тоді і тільки тоді* $(\Leftrightarrow)$ *коли* $\forall x \in (a,b): f'(x) \geq 0$ (*функція* $f(x)$ *не зростає тоді і тільки тоді* $(\Leftrightarrow)$ *коли* $\forall x \in (a,b): f'(x) \leq 0$).

Теорема (Достатня умова строгої монотонності). *Якщо для диференційованої на* (a,b) *функції* $f(x)$ *в кожній точці інтервалу виконується нерівність* $\forall x \in (a,b): f'(x) > 0$*, то* $(\Rightarrow)$ $f(x)$ *зростає на* (a,b) (якщо $\forall x \in (a,b): f'(x) < 0$*, то* $(\Rightarrow)$ $f(x)$ *спадає на* (a,b)).

Інтервали монотонності функції відокремлюють один від одного або точки, де похідна дорівнює нулеві, або точки, де похідна дорівнює нескінченності чи не існує.

2. Екстремуми функції

Теорема (Необхідна умова локального екстремуму). *Якщо* x_0 *є точкою внутрішнього локального екстремуму диференційованої на* (a,b) *функції* $f(x)$*, то* $(\Rightarrow)$ *в точці* x_0 *виконане одна з наступних умов*

1) $\exists f'(x_0) = 0$;

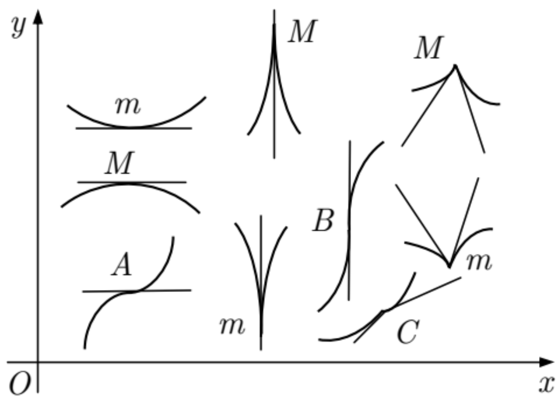
2) $\exists f'(x_0)=\infty$;

3) $\nexists f'(x_0)$.

Означення. Точки, в яких або похідна функції дорівнює нулю $f'(x)=0$, або нескінченна, або не існує, називаються *критичними точками (першого порядку) функції* $f(x)$.

Означення. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю $f'(x)=0$, називаються *стаціонарними точками функції* $f(x)$.

Геометрично умови Теореми означають, що у критичній точці першого порядку дотична або паралельна осі Ox (умова 1) – такі точки називають *стаціонарними*, або дотична в точці паралельна осі Oy (умова 2) – такі точки називають *точками вертання*, або дотичної не існує (умова 3) – такі точки називають *кутовими***.**



Теорема (Достатня умова локального екстремуму в термінах першої похідної). *Нехай функція* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, *і існує точка* $x_0\in(a,b)$ *така, що виконані наступні умови:*

1) $\forall x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)\ \exists f'(x)\in\mathbb{R}$, *при цьому* $f(x)$ *неперервна в* x_0;

2) $\exists\delta>0$ *таке, що виконана одна з наступних умов*:

а) $\forall x\in(x_0-\delta,x_0):\ f'(x)<0,$
$\forall x\in(x_0,x_0+\delta):\ f'(x)>0,$

або

б) $\forall x\in(x_0-\delta,x_0):\ f'(x)>0,$
$\forall x\in(x_0,x_0+\delta):\ f'(x)<0,$

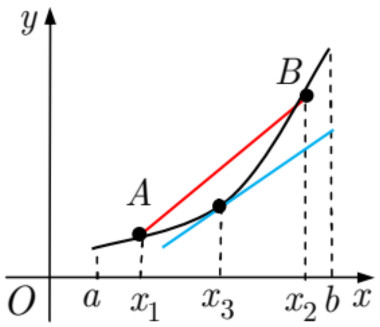
тобто при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак.

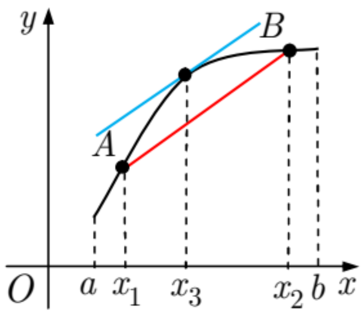
Тоді $(\Rightarrow)$ *точка x_0 є точкою строгого локального екстремуму функції $f(x)$: у випадку* 2а) *– мінімуму, а у випадку* 2б) *– максимуму.*

Зауваження. Якщо функція не є неперервною в критичній точці, теорему не можна використовувати. Вона також не застосовується, коли будь-який проколотий окіл критичної точки функції містить нескінченну кількість інших її критичних точок, а похідна цієї функції не зберігає визначеного знаку в будь-якому напівоколі зазначеної точки.

3. Опуклість функції, точки перегину

Означення. Функцію $f(x)$, визначену на (a,b), називають **опуклою донизу** в цьому інтервалі, якщо будь-яка дуга її графіку лежить не вище хорди, що стягує цю дугу. Функцію $f(x)$, визначену на (a,b), називають **опуклою догори** в цьому інтервалі, якщо будь-яка дуга її графіку лежить не нижче хорди, що стягує цю дугу.





Теорема. *Неперервно диференційована функція $f(x)$, опукла донизу (догори) в інтервалі (a,b) тоді й лише тоді, коли графік її функції лежить не нижче (не вище) будь-якої дотичної, проведеної до нього на цьому інтервалі.*

Теорема (Достатня умова опуклості функції). *Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована в інтервалі (a,b). Тоді* $(\Rightarrow)$

1) *якщо* $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) > 0$, *то графік цієї функції в інтервалі (a,b) опуклий донизу;*

2) *якщо* $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) < 0$, *то графік цієї функції в інтервалі* (a,b) *опуклий догори.*

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. *Точкою перегину* функції $f(x)$ називають точку x_0, у якій напрям опуклості змінюється на протилежний.

Теорема. *В точці перегину графік функції переходить з однієї сторони дотичної на іншу* (*дотична перерізає графік*).

Теорема (Необхідна умова існування точки перегину). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована в деякому околі точки перегину* x_0 *і в неї існує скінченна друга похідна в точці* x_0, *то* $(\Rightarrow)$ $f''(x_0) = 0$.

Інтервали опуклості функції можуть відокремлюватись один від одного або точками, де друга похідна функції дорівнює нулю, або точками, де друга похідна дорівнює нескінченності, або точками, де друга похідна не існує.

Означення. Точки, в яких друга похідна функції дорівнює нулю, нескінченна або не існує, називаються *критичними точками другого порядку.*

Теорема (Перша достатня умова існування точки перегину). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна в точці* x_0, *має першу і другу похідні в деякому проколотому околі точки* x_0, *а в точці* x_0 *існує скінченна або нескінченна похідна* $f'(x_0)$, *то* $(\Rightarrow)$

1) *якщо друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак при переході аргументу x через значення* x_0, *то* x_0 *є точкою перегину функції* $f(x)$;

2) *якщо знак* $f''(x)$ *не змінюється при переході через* x_0, *то* x_0 *не є точкою перегину функції* $f(x)$.

4. Асимптоти графіка функції

Означення. *Асимптотою* кривої з нескінченною гілкою називають таку пряму, що віддаль від точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли ця точка віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.

Або можна дещо по-іншому записати це означення.

Означення. *Асимптотою* необмеженої кривої називається пряма, до якої наближаються точки кривої, віддаляючись від початку координат.

Існують три види асимптот графіків функцій: *вертикальні*, *горизонтальні* та *похилі*, причому останні два види можуть бути як односторонніми, правими при $x \to +\infty$ або лівими при $x \to -\infty$, так і двосторонніми при $x \to \infty$, тобто і правими, і лівими одночасно.

Далі будемо вважати, що горизонтальні асимптоти – це частинний випадок похилих (при $k = 0$).

Теорема. *Пряма* $x = a$ *є вертикальною асимптотою графіка функції* $y = f(x)$ *тоді й лише тоді* $(\Leftrightarrow)$, *коли* $f(a+0) = \pm\infty$ *або* $f(a-0) = \pm\infty$.

Теорема. *Пряма* $y = kx + b$ *є правою похилою асимптотою графіка функції* $y = f(x)$ *тоді й лише тоді* $(\Leftrightarrow)$, *коли*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

У випадку лівої похилої асимптоти формулювання відрізняється лише прямуванням $x \to -\infty$.

Загальна схема дослідження функції і побудови графіку

1. Встановити область дослідження функції; дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

2. Знаходження точок перетину графіку функції з осями координат.
3. Знаходження точок розриву, їх класифікація; знаходження вертикальних асимптот.
4. Знаходження похилих асимптот (і горизонтальних), тобто дослідження функції при $x \to \pm\infty$.
5. Пошук критичних точок функції (першого порядку), виокремлення серед них екстремумів. Обчислення значень функції в критичних точках, встановлення інтервалів монотонності функції.
6. Пошук точок перегину та значень функції в цих точках, встановлення інтервалів опуклості функції.