ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Границі функцій та неперервність

Поняття числової послідовності. Способи завдання послідовностей

Означення. Будь-який впорядкований (занумерований) дискретний набір чисел називають *числовою послідовністю*:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ де } a_n = f(n), \text{ де } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

тобто послідовність – *функція натурального аргументу*.

Числову послідовність записують у вигляді множини її членів $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, занумерованої всіма числами натурального ряду, або коротко $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Задати числові послідовності можна наступним чином:

– через аналітичний вираз (формулу) загального члену послідовності $a_n = f(n)$;
– переліком перших членів послідовності, тобто множини її значень $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$;
– рекурентною формулою.

Приклади числових послідовностей:

1) якщо загальний член послідовності задано як $a_n = \dfrac{1}{n}$, то елементи

послідовності можна виписати наступним чином $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots\right\}$;

2) якщо загальний член послідовності задано як $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то елементи послідовності можна виписати наступним чином $\{2;\left(\frac{3}{2}\right)^2;\left(\frac{4}{3}\right)^3;\ldots\}$;

3) елементи арифметичної прогресії $a_n=a_{n-1}+p=a_1+(n-1)p$, де a_1, p – сталі числа (перший член та знаменник арифметичної прогресії), складають числову послідовність;

4) елементи геометричної прогресії $b_n=b_{n-1}q=b_1q^{n-1}$, де b_1, q – сталі числа (перший член та знаменник геометичної прогресії), складають числову послідовність.

5) нехай задано два числа b і c, положимо $a_0=b$, $a_1=c$, а наступні члени визначимо рівністю

$$a_n=\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}, n\geq 2.$$

Цим дійсно задано послідовність, і такий спосіб має назву рекурентного, послідовно можна знайти всі члени, до будь-якого включно.

Таким чином, якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу 1, 2, 3,…, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задана послідовність.

Значення такої функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$: $f(1)$, $f(2)$, … , $f(n)$,… зазвичай позначають символами загального елемента з наданням їм індексів-номерів, які співпадають із відповідними значеннями аргумента:

$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \ldots$ – ці значення називають *членами послідовності*,

$a_n = f(n)$ – називають *загальним членом*.

Графічно послідовність прийнято зображувати точками на числовій осі.

Приклади «різної поведінки» числових послідовностей:

Розглянемо деяку послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Залежно від зростання номера члена послідовності n її члени можуть поводити себе по-різному. Наприклад,

– для послідовності з загальним членом $a_n = 3n$ зі зростанням номера n члени послідовності необмежено зростають;

– у послідовності $a_n = (-1)^n$ члени по черзі приймають значення 1 та –1;

– для послідовності з загальним членом $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ при збільшенні номера n її члени стають дедалі ближчими до одиниці.

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Той факт, що число a є границею послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ записується у вигляді:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \text{ або } a_n \to a, \text{ якщо } n \to \infty.$$

Послідовність, яка має границю, називають *збіжною*, в противному випадку – *розбіжною*.

Геометричне тлумачення границі числової послідовності

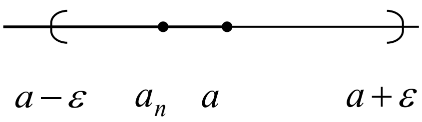
Зауважимо, що нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon,$$

або
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що число a_n належить інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Такий інтервал називається ε-околом точки *a* та позначається $U_\varepsilon(a)$.

Означення границі послідовності можна перефразувати наступним чином, надавши йому **геометричну наочність**: число *a* називається границею послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо в будь-який ε-окіл числа *a* попадуть всі члени послідовності, починаючи з деякого номера $n > N(\varepsilon)$, яким би вузьким цей окіл не був. Поза ε-околом може бути скінченне число членів даної послідовності.



Точка, що зображує границю *a*, є так би мовити концентрацією згустку точок, що зображують значення послідовності.

Нескінченно малі послідовності

Випадок, коли послідовність збігається до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ($a_n \to 0$, при $n \to \infty$), представляє особливий інтерес. Такі послідовності називаються *нескінченно малими.*

Приклад

Розглянемо послідовності

$$a_n = \frac{1}{n},\ a_n = -\frac{1}{n},\ a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

їм відповідають наступні послідовності значень:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

Всі три послідовності представляють собою нескінченно малі, бо мають своєю границею 0. Треба відмітити, що елементи першої послідовності завжди більше своєї границі 0, елементи другої – завжди менше за неї, елементи ж третьої – позмінно то більше, то менше за неї.

Нескінченно великі послідовності

Нескінченно малим послідовностям, в деякому сенсі, протиставляються нескінченно великі послідовності.

Той факт, що послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є *нескінченно великою* записується у вигляді: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, або $a_n \to \infty$, якщо $n \to \infty$, та говорять, що послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *прямує до нескінченності* або *розбігається до нескінченності*.

Приклади

Прикладами нескінченно великих послідовностей можуть бути:

$$a_n = n\,; \; a_n = -n\,; \; a_n = (-1)^n n\,,$$

які пробігають натуральний ряд чисел, перша зі знаком плюс, друга зі знаком мінус, третя – з почережними знаками.

Теорема. *Якщо послідовність* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *є нескінченно великою, то послідовність* $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *буде нескінченно малою (послідовність* $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *називають зворотною до* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*).*

Лема 1. *Сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою.*

Лема 2. *Добуток обмеженої послідовності* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *і нескінченно малої* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *є нескінченно малою послідовністю.*

Теорема. *Якщо послідовності* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збігаються відповідно до границь a і b, тоді:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b;$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b;$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *при умові* $b, b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$

Число *e*

Перед тим, як перейти до обчислення границі, яка приведе нас до числа *e*, розберемося звідки взагалі з’явилась потреба обчислення такої границі. Вважається, що вперше число *e* було обчислено Якобом Бернуллі (1655 – 1705 рр.) в процесі розв’язання задачі про максимальний дохід. Саме вивчення складного проценту привело до відкриття цієї важливої константи.

Згадаємо формулу для обчислення складеного проценту:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m,$$

де A – сума первинного капіталу, p – річний складний процент, $B(m)$ – капітал через m років.

Якщо відсотки нараховуються декілька разів на рік, то річну процентну ставку ділять на кількість періодів нарахування на рік, а степень умножається на кількість нарахувань на рік:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot n}\right)^{m \cdot n},$$

де n – кількість нарахувань на рік.

Якщо первинний капітал дорівнює $A = 1$, складний процент $p = 100$, а кількість нарахувань спрямувати до нескінченності (так зване неперервне нарахування процентів), то через 1 рік капітал буде дорівнюватиме:

$$B(1) = 1 \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{100}{100n}\right)^{n} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

І саме ця границя привела математиків до надзвичайного числа, яке називають називають експоненціальною константою, числом Ейлера або числом Непера. Неперовим його називають на честь шотландського вченого Джона Непера (1550 – 1617 рр.), автора праці «Опис дивовижної таблиці логарифмів» (1614 р.). Вважається, що вперше число *e* було обчислено Якобом Бернуллі (1655 – 1705 рр.) в процесі розв’язання задачі про максимальний дохід. Саме вивчення складного проценту привело до відкриття цієї важливої константи.

Безумовно, в роки перших згадок числа *e* неможливо було передректи, що це відкриття стане важливою складовою сучасної банківській системи. В 1690 році Я. Бернуллі вперше опублікував дослідження складного проценту, в якому обґрунтував існування граничної вигоди, яку визначив як більшу ніж 2,5, але меншу ніж 3. Я. Бернуллі показав, що якщо частоту нарахування процентів нескінченно збільшувати, то процентний дохід у випадку складного процента має граничне значення. Шляхом декількох наближень, він, по суті, шукав границю послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100}{100n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}71828\ldots$$

Границя функції

Означення. Нехай функція f визначена на деякому проколотому околі $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Число A називають *границею функції f в точці* x_0 *(або при* x*, який прямує до* x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для всіх x**,** які задовольняють умові

$$|x-x_0|<\delta,\ x\in\overset{\circ}{U}(x_0),$$

виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon\,.$$

Границя функції також записується як $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Поняття границі функції можна узагальнити для випадку, коли аргумент функції або її значення прямує до нескінченності.

Теорема. *Якщо існують скінченні границі* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)$*, то існують і скінченні границі:*

– $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$,

– $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$,

– *якщо* $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$*, то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$.

Наслідок. Якщо існує границя $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то для $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

Означення. Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Теорема. *Добуток нескінченно малої функції $\alpha(x)$ при $x \to a$ на обмежену в околі а функцію $f(x)$ є нескінченно малою функцією при при $x \to a$.*

Теорема. *Функція $\alpha(x)$, яка визначена та не дорівнює нулю в деякому проколотому околі точки а, є нескінченно малою при при $x \to a$ тоді і тільки тоді, коли функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при при $x \to a$.*

Чудові (або визначні) границі

Перша чудова границя

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Перша чудова границя відіграє велику роль у курсі математичного аналізу та часто використовується при знаходженні інших границь. Наведемо найбільш значні **наслідки**.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1;$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2};$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

Друга чудова границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Асимптотична поведінка функцій

Означення. Під *асимптотичною поведінкою* (або *асимптотикою*) *функції в околі деякої точки a* (скінченної або нескінченної) розуміють характер змінювання функції при прямуванні її аргументу *x* до цієї точки. Цю поведінку зазвичай намагаються представити за допомогою іншої, більш простої та вивченої функції, яка в околі точки *a* с достатньою точністю описує змінення досліджуваної функції або оцінює її поведінку з тієї чи іншої сторони.

В зв'язку з цим виникає задача порівняння характеру змінення двох функцій в околі точки *a*, яка пов'язана з розглядом їх частки. Особливий інтерес представляють випадки, коли при прямуванні *x* до *a* обидві функції є або нескінченно малими, або нескінченно великими.

Порівняння нескінченно малих функцій

Основною метою порівняння двох нескінченно малих функцій є зіставлення характеру їх наближення до нуля при прямуванні *x* до *a*, або швидкості їх прямування до нуля.

Означення. Нескінченно малі при $x \to a$ функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються *еквівалентними при* $x \to a$, якщо

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

та позначають як

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$
$$x \to a$$

Такий запис іноді називають *асимптотичною рівністю функцій* $\alpha(x)$ *та* $\beta(x)$ *в околі точки a*. Ліворуч зазвичай пишуть досліджувану функцію, а справа еквівалентну до неї простішу або більш вивчену функцію, і в цьому випадку говорять, *що встановлено асимптотику досліджуваної функції в околі заданої точки.*

Властивість еквівалентності *симетрична*, бо з того що

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 \;\Rightarrow\; \beta(x) \sim \alpha(x),\; x \to a,$$

а також – *транзитивна*: з того, що

$$\text{при } x \to a \;\; \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ та } \beta(x) \sim \gamma(x) \;\Rightarrow\; \alpha(x) \sim \gamma(x).$$

Як наслідки з чудових границь, можна стверджувати, що при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x,\; tgx \sim x,\; \arcsin x \sim x,\; \ln(1+x) \sim x, \text{ і далі.}$$

Враховуючи транзитивність відношення еквівалентності, можна виписати **ланцюжок еквівалентних функцій при** $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \ln(1+x) \sim \ln a \cdot \log_a(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{\mu},$$

і ще декілька важливих асимптотичних рівностей:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}.$$

Неперервність функції

Існують не так багато властивостей, яким володіють всі функції відразу. Зазвичай функції, які володіють деякою важливою властивістю (або декількома), відносять до одного класу. Познайомимось з однією з важливих властивостей функцій – *неперервністю*. В основі поняття неперевності функції лежить інтуітивне представлення про її нерозривність.

Означення. Фунція *f*, визначена в деякому околі $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$, називається *неперервною в цій точці* (або при $x = x_0$), якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Означення. Точку, в якій функція неперервна, називають *точкою неперервності цієї функції.*

Означення. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *неперервною на множині X*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.