ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА, АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розгорнута та матрична форми її запису

Теорія систем лінійних рівнянь є началом великого розділу алгебри – лінійної алгебри. На відміну від шкільного курсу математики ми будемо вивчати системи з довільним числом рівнянь та невідомих, при чому іноді кількість рівнянь системи не буде навіть збігатись з кількістю невідомих. До систем лінійних рівнянь приводить велика кількість прикладних, в тому числі й економічних задач.

Нехай задана система з m лінійних рівнянь з n невідомими. *Невідомі*, на відміну шкільної математики (x, y, z), позначаються літерою x з відповідними індексами:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

рівняння вважаємо занумерованими: перше, друге,…, m-те; *коефіцієнт* з i-го рівняння при невідомій x_j позначається через a_{ij} (перший індекс вказує на номер рівняння, другий – на номер невідомої); *вільний член* i-го рівняння позначається через b_i.

Означення. *Система з m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

де a_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами*;

b_i – дійсні числа, які називаються *вільними членами рівнянь*.

Систему (2.1) також можна записати, використовуючи символ суми:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{21j}x_j = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m, \end{cases}$$

або у скороченому записі:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,,\ i = \overline{1,m}.$$

Систему (2.1) можна записати у *матричній формі*. Для цього позначимо:

– літерою A матрицю, складену з коефіцієнтів a_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$, вона ще має назву *матриці системи*:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

– літерою B – вектор-стовпець, складений з вільних членів b_i $(i=\overline{1,m})$ (*матриця-стовпець вільних членів*):

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

– літерою X – вектор-стовпець, складений з невідомих x_j $(j=\overline{1,n})$ (*матриця-стовпець невідомих*):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді у цих позначеннях *матрична форма* системи (2.1) буде мати наступний вигляд:

$$A\cdot X=B. \tag{2.2}$$

Означення. *Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь* (2.1) називається така сукупність n чисел $x_1=k_1, x_2=k_2, \dots, x_n=k_n$, при підстановці яких кожне рівняння системи перетворюється на тотожність.

Означення. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок, та *несумісною*, якщо розв’язків не існує.

Означення. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1) називається *визначеною*, якщо має єдиний розв’язок, та *невизначеною*, якщо розв’язків більше за один.

Приклад 1. Система рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 30 \Rightarrow x_1 = 10 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

– сумісна та визначена, бо має єдиний розв’язок $(10;0)$.

Система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ – несумісна, а система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ – сумісна та невизначена, бо має нескінченну множину розв’язків: $x_1 = c, x_2 = 10 - 2c,$ c – будь-яке дійсне число ($c \in \mathbb{R}$).

Задача теорії систем лінійних рівнянь складається з розробки методів, які дозволять визначити чи сумісна задана система рівнянь, чи ні, і у випадку сумісності встановити кількість розв’язків та вказати спосіб знаходження всіх цих розв’язків.

Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Почнемо з найпростіших випадків – систем з двох рівнянь з двома невідомими та з трьома рівняннями з трьома невідомими (квадратними матрицями системи).

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

Нехай дана *система двох лінійних рівнянь з двома невідомими*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{2.3}$$

коефіцієнти якої складають квадратну матрицю другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Застосуємо до системи (2.3) метод зрівняння коефіцієнтів (спочатку для x_2), тобто помножимо перше рівняння на a_{22}, а друге на a_{12}:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} \times a_{22} \\ \times a_{12} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}. \end{cases}$$

Віднімемо із першого рівняння друге:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 + (\underbrace{a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12}}_{=0})x_2 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

звідки:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Тепер застосуємо до системи (2.2) метод зрівняння коефіцієнтів для x_1, тобто помножимо перше рівняння на a_{21}, а друге на a_{11}:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \left| \begin{matrix} \times a_{21} \\ \times a_{11} \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}, \\ a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11}, \end{cases}$$

та віднімемо із першого рівняння друге:

$$\underbrace{(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11})}_{=0}x_1 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}.$$

Звідки отримаємо:

$$x_2 = \frac{b_1a_{21} - b_2a_{11}}{a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}},$$

або, якщо помножити чисельник та знаменник на (–1):

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

(зробили це тільки щоб побачити однаковий знаменник у виразах розв'язків для x_1 та x_2).

Припустивши відмінність від нуля спільного знаменнику $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$, отримаємо розв'язок заданої системи (2.3):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Можна побачити, що чисельники виразів для невідомих x_1 та x_2 співпадають, і якщо згадати матрицю коефіцієнтів заданої системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то можна замітити, що вираз, якій стоїть у чисельниках в точності дорівнює визначнику матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Звернемо увагу на чисельники розв'язків x_1 та x_2. Чисельник виразу для x_1 є в точності визначником

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

стовпець вільних членів

тобто визначником матриці, отриманої з матриці A заміною її першого стовпця на стовпець вільних членів. А чисельник виразу для x_2 є в точності визначником

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

стовпець вільних членів

тобто визначником матриці, отриманої з матриці A заміною її другого стовпця на стовпець вільних членів.

Формули (2.4) можна записати у вигляді (через визначники):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Отримане правило розв'язання системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими називається **правилом Крамера** та часто записується наступним чином: через Δ, Δ_1, Δ_2 позначаються визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

і сам розв'язок записується у вигляді:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{2.5}$$

Приклад 2. Знайдемо розв'язок **с**истеми лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

за правилом Крамера.

Обчислимо визначники Δ, Δ_1, Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -7,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) = -21 + 2 = -19,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 7 \cdot 1 = -4 - 7 = -11.$$

Звідки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{19}{7}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{7}.$$

Перевіримо отриманий розв'язок, підставивши у задану систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{19}{7} + \dfrac{11}{7} \equiv 7, \\ \dfrac{19}{7} - 3 \cdot \dfrac{11}{7} \equiv -2. \end{cases}$$

Правило Крамера також є дуже зручним для розв'язання *систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.6}$$

Аналогічно розглянутому випадку систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими необхідно обчислити визначники Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, де Δ – визначник матриці системи, а Δ_1, Δ_2, Δ_3 – визначники матриць, отриманих з матриці коефіцієнтів системи заміною відповідно першого, другого та третього стовпців на стовпець вільних членів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

І невідомі x_1, x_2, x_3 обчислюються за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{2.7}$$

Розглянемо тепер випадок *системи з n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.8}$$

або її запис у матричній формі:

$$A \cdot X = B, \tag{2.9}$$

де A – квадратна матриця n-го порядку, X – вектор-стовпець невідомих, B – вектор-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Теорема Крамера. *Нехай* Δ *– визначник квадратної матриці системи* A *(2.10), а –* Δ_j *визначник матриці, яка утворена з матриці* A *заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів B. Тоді, якщо* $\Delta \neq 0$*, то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; (j = \overline{1,n}). \tag{2.11}$$

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Згадаємо з першої лекції, що якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то існує матриця A^{-1}, обернена до A, і за означенням виконується:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Тоді, якщо існує A^{-1} обернена до A, помноживши на A^{-1} зліва обидві частини матричної рівності (2.9), отримаємо розв'язок системи (2.8):

$$A \cdot X = B \,\big|\times A^{-1}(\text{зліва})$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \qquad (2.12)$$

Цей метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь називають *методом оберненої матриці* або *матричним методом*.

Приклад 3. Розв'язати методом оберненої матриці систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричній формі $A \cdot X = B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Для використання матричного методу необхідно спочатку перевірити відмінність від нуля визначника матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 + 3 + 2 - 6 - 4 = 1 \neq 0.$$

Після чого можна обчислити обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи знайдемо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 + 0 \\ -8 + 5 + 5 \\ -5 + 3 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

тобто єдиний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Підставивши отримані значення змінних у рівняння заданої системи можна переконатися правильності знайденого розв'язку.