ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА, АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Елементи теорії визначників

Означення визначника. Правила обчислення визначників

Строге математичне введення поняття *визначника* потребує багатьох викладок та введення ще додаткових математичних понять. Обмежимось узагальненими відомостями, достатніми для використання майбутніми економістами.

Необхідність введення *визначника* – числа, яке характеризує квадратну матрицю *A,* – тісно пов'язане з розв'язанням систем лінійних рівнянь. *Визначник матриці A* (або *детермінант*) позначається $|A|$ або $detA$, або Δ. Почнемо з окремих випадків *визначників молодших порядків*.

Означення. *Визначником матриці першого порядку* $A=(a_{11})$, або *визначником першого порядку*, називається елемент a_{11}:

$$|A| = a_{11}.$$

Означення. *Визначником матриці другого порядку* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, або *визначником другого порядку*, називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Означення. *Визначником матриці третього порядку* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, або *визначником третього порядку*, називається число, яке обчислюється за формулою:

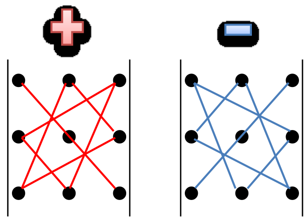
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Права частина формули є алгебраїчною сумою шести доданків, кожен яких є добутком з трьох елементів, які розміщені у різних рядках і різних стовпцях матриці. Три доданки входять у суму зі знаком «+» і три – зі знаком «–». Для легкого запам'ятовування цієї формули є два наочних методи: *правило трикутників* та *правило Саррюса.*

Правило трикутників

Правило трикутників має вигляд зручної схеми, котра складається з двох частин, одна з яких вказує на елементи доданків, що входять зі знаком «+», а друга – на елементи доданків, що входять зі знаком «–»:



(на схемі символами «•» позначені елементи a_{ij}). Так, перша частина відповідає доданкам, що входять зі знаком «+», а саме правило можна запам'ятати так:

– зі знаком «+» входять три доданки добутків елементів, які розміщені на головній діагоналі та на вершинах двох трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі;

– зі знаком «–» входять три доданки добутків елементів, які розміщені на сторонній діагоналі та на вершинах двох трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі.

Правило Саррюса

Також для спрощення запам'ятовування формули для обчислення визначника третього порядку можна використовувати зручний наочний метод – *правило Саррюса*. Для цього потрібно доповнити задану матрицю двома стовпцями справа, продублювавши перший та другий стовпець, внаслідок чого отримати вже прямокутну матрицю розміру 3×5:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad - \quad - \quad - \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & & & \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad + \quad + \quad + \end{array}$$

і за цією схемою складати додатні та від'ємні доданки у формулу.

Приклад 1. Обчислимо визначник матриці другого порядку $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 - 5\cdot(-2) = -3 + 10 = 7.$$

Приклад 2. Обчислимо визначник матриці третього порядку $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначника скористуємось спочатку *правилом трикутників*. Зі знаком «+» будуть входити добутки наступних елементів (за наведеною схемою):

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

а зі знаком «–»:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}.$$

Застосувавши правило трикутників, отримаємо:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot6\cdot8=$$

$$=45+84+96-105-72-48=0.$$

Тепер використаємо *правило Саррюса* для обчислення визначника. Для цього доповнимо задану матрицю двома стовпцями справа, продублювавши перший та другий стовпець, та нанесемо схематичні прямі:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & + \\ \end{array}$$

Застосувавши правило Саррюса, отримаємо:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Обчислення визначників вищих порядків

Обчислення визначників вищих порядків вже вимагає загального підходу. І для його використання необхідно ввести наступні поняття.

Означення. Нехай задана матриця A розміру $m \times n$. Оберемо в ній довільно s рядків та s стовпців, $1 \le s \le \min(m,n)$, при чому кожний рядок і кожен стовпець можуть бути обрані лише один раз. Елементи, які розміщені на перетині обраних рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю s-го порядку. Визначник отриманої матриці називається *мінором порядку s заданої матриці A*.

Означення. Нехай задана квадратна матриця n-го порядку A та її мінор M порядку s. *Мінором* M', *додатковим до мінора M*, називається визначник порядку $(n-s)$ матриці, складеної з елементів, які залишись після викреслення тих s рядків та s стовпців матриці A, котрі входять до мінора M. Очевидно, що *додатковим до мінора* M' *є мінор M*.

Зауваження. Мінори квадратної матриці, називають також *мінорами її визначника.*

Приклад 3. Задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Обравши в ній, наприклад, другий та третій рядки, і третій та п'ятий стовпці, отримаємо *мінор 2-го порядку*:

$$M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix},$$

і *мінор* M'*, додатковий до мінора M*:

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Означення. *Алгебраїчним доповненням* M^* *мінора* M називається додатковий до нього мінор, помножений на $(-1)^{\sigma}$, де σ – сума тих номерів рядків та стовпців заданої матриці, які входять до мінору *M*.

Приклад 4. Запишемо *алгебраїчне доповнення* M^* *мінора* $M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}$ з прикладу 7:

$$M^* = (-1)^{\sigma} \cdot M' = (-1)^{2+3+3+5} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Означення. Кожний елемент a_{ij} квадратної матриці *n*-го порядку є *мінором* 1-*го порядку*. Додатковий до нього мінор є визначником $(n-1)$-го порядку, цей *додатковий мінор* позначають як M_{ij} і називають *мінором елемента* a_{ij}. *Алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij} позначають як A_{ij} і з означення випливає, що

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Для обчислення визначників будь-якого порядку важливе значення має наступна теорема.

Теорема Лапласа. *Визначник квадратної матриці n-го порядку A дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:*

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is}$$

(*розкладання за елементами i-го рядка,* $i = \overline{1,n}$*);*

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \cdot A_{sj}$$

(*розкладання за елементами j-го стовпця,* $j = \overline{1,n}$).

Наслідок. Визначник трикутної і діагональної матриць дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn};$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn};$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Звідки визначник одиничної матриці дорівнюватиме одиниці:

$$|E|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1.$$

Основні властивості визначників

1. Якщо в матриці є рядок (або стовпець), який складається лише з нулів, то її визначник дорівнює нулю.
2. Якщо в елементів одного рядка (або стовпця) є спільний множник, то

його можна винести за знак визначника.

3. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
4. При перестановці двох рядків (або стовпців) матриці місцями її визначник змінює знак на протилежний.
5. Якщо матриця містить два однакових рядки (або стовпці), то її визначник дорівнює нулю.
6. Якщо елементи двох рядків (або стовпців) матриці пропорційні, то її визначник дорівнює нулю.
7. Якщо до елементів одного рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на відмінне від нуля число, то визначник не зміниться.

Обернена матриця

Згадаємо означення оберненої матриці, яке було введено перед поняття визначника.

Означення. Матриця A^{-1} називається *оберненою до квадратної матриці A*, якщо при множенні цієї матриці на задану як справа, так і зліва, в результаті отримуємо одиничну матрицю:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

Раніше було зазначено, що не для кожної квадратної матриці існує обернена. Вкажемо умови існування оберненої матриці і алгоритм її обчислення.

Означення. Квадратну матрицю A називають *невиродженою* (або *регулярною*), якщо її визначник відмінний від нуля. Якщо ж визначник матриці дорівнює нулю, то матрицю називають *виродженою* (або *сингулярною*).

Означення. *Приєднаною* або *союзною матрицею до квадратної матриці* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається матриця

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ матриці A.

Теорема. *Для існування оберненої до A матриці* A^{-1} *необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою* (*тобто визначник матриці A не дорівнював нулю*: $|A| \neq 0$). *У випадку виконання цієї умови формула для обчислення оберненої матриці наступна*:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обчислення оберненої матриці за означенням

Для обчислення оберненої матриці A^{-1} до матриці A необхідно зробити наступні послідовні кроки:

1. Обчислити визначник заданої матриці. Якщо $|A| = 0$, то матриця A є виродженою і оберненої до неї не існує. У випадку, якщо $|A| \neq 0$,

матриця A є невиродженою, звідки випливає існування оберненої матриці A^{-1}, і можна перейти до наступного кроку.

2. Обчислити приєднану матрицю до матриці A: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

3. Обчислити обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Іноді в задачах ще потрібно додатково перевірити правильність обчислення оберненої матриці за її означенням $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Обчислення оберненої матриці шляхом елементарних перетворень

Окрім вищезазначеного методу знаходження оберненої матриці існує також *метод обчислення оберненої матриці шляхом елементарних перетворень***.** Запишемо коротко послідовність дій в цьому методі:

1. На першому кроці до заданої квадратної матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ необхідно дописати справа одиничну матрицю того ж самого розміру:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

2. Отриману розширену, вже прямокутну, матрицю необхідно *за допомогою елементарних перетворень над рядками* привести до наступного вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right),$$

тобто необхідно отримати одиничну матрицю зліва (права приєднана частина матриці також зміниться після перетворень, але її вид не потрібно приводити до якогось визначеного типу). Тоді, якщо

– при перетворенні в лівій частині матриці утворюється хоча б один нульовий рядок або стовпець, то оберненої матриці A^{-1} до матриці A не існує;

– за допомогою елементарних перетворень над рядками ліву частину розширеної матриці можливо привести до одиничної матриці, то матриця, яка була отримана після цих перетворень в правій частині, буде як раз шуканою оберненою матрицею A^{-1}.

Означення рангу матриці та методи його визначення

При розв'язуванні та дослідженні деяких математичних і прикладних задач важливе значення має поняття *рангу матриці*.

Означення. *Рангом матриці* A називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Ранг матриці A позначається $rangA$ (можна ще $r(A)$ або RgA).

З означення рангу матриці випливають наступні властивості:

1) ранг матриці $A_{m\times n}$ не перебільшує меншого з її розмірів, тобто $rangA \le \min(m,n)$;
2) $rangA = 0$ тоді і лише тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю, тобто $A = 0$;
3) для квадратної матриці n-го порядку $rangA = n$ тоді і лише тоді, коли матриця A невироджена.

Розглянемо два методи обчислення рангу матриці.

Метод облямівки мінорів

1. Знайти ненульовий елемент матриці (якщо такого не існує, то ранг матриці дорівнює нулю).
2. Обчислити мінори другого порядку, які облямовують обраний елемент.
3. Якщо серед обчислених мінорів другого порядку існує відмінний від нуля, необхідно розглянути всі мінори третього порядку, які його облямовують. Продовжувати доти, поки всі мінори, які облямовують ненульовий мінор, наприклад l-го порядку, не будуть дорівнювати нулю. У цьому випадку ранг матриці дорівнюватиме l.

Перед тим, як записати другий метод, розглянемо наступну теорему і нове означення.

Теорема. *Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.*

Означення. Матриця розміру $m \times n$ називається *трапецеїдальною*, якщо вона має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ відмінні від нуля.

Кожну матрицю можна привести до трапецеїдальної за допомогою елементарних перетворень рядків та стовпців. Саме на цьому базується **другий метод обчислення рангу матриці**. З того, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, а ранг трапецеїдальної матриці дорівнює кількості ненульових рядків, для пошуку рангу матриці необхідно:

1. За допомогою елементарних перетворень привести задану матрицю до трапецеїдальної.
2. Кількість ненульових рядків в отриманій трапецеїдальній матриці буде дорівнюватиме рангу заданої матриці.

Означення. Відмінний від нуля мінор матриці A, порядок якого співпадає з рангом матриці $A - r = rangA$, називається *базисним мінором.*