ВИЩА МАТЕМАТИКА

Вступ

В будь-якій науці в тій чи іншій мірі доводиться досліджувати не тільки якісні особливості об'єктів, явищ або процесів, але й їх просторові та кількісні характеристики, для дослідження яких необхідний загальний метод. І такий загальний для усіх наук метод як раз розробляє математика. Кожна наука, застосовуючи математичні методи, будує певну схему – уявлення про досліджуваний об'єкт. Цю схему – уявлення у вигляді деякої формули, рівняння або у вигляді геометричного образу – називають математичною моделлю досліджуваного об'єкта. Математика займається розробкою як методів побудови, так і методів дослідження конкретних математичних моделей для різних наук. Для цього використовується математичний апарат, математичні поняття.

Математична мова є досить зручною для короткого та точного опису різних понять та залежностей багатьох наук. Формулювання на математичній мові дозволяють робити передбачення та відкриття чисто математичним шляхом. Застосування математики у виробництві приводить до неймовірних результатів. Так, одного разу королева Англії запросила до себе Ньютона та попросила його сходити до Монетного двору для того, щоб розрахувати, скільки додаткових приміщень, станків та робочих необхідно додати, з метою більшого у 1,5 рази випуску монет. Ньютон пів дня досліджував процес виробництва на Монетному дворі, а інші пів дня займався розрахунками. Наступного ранку він запропонував розв'язок: для збільшення випуску монет у 2 рази достатньо лише зробити деякі зміни в організації виробництва – змінити послідовність операцій, переставити та по-іншому використовувати станки, інакше розподілити роботу. Використовуючи математичні методи Ньютон за один день розв'язав важливу економічну задачу.

Цікавим історичним фактом є перша поява однієї з найважливіших констант – числа e. Саме економічна задача – задача про складний процент, привела Бернуллі до відкриття цього найважливішого в науці числа. Насправді, на сьогодні математика впевнено розташувалася в самих різних частинах і куточках сучасного світу, зайняла видне положення в житті суспільства. На заняттях з вищої математики ми навчимося розв'язувати економічні задачі математичними методами, використовувати вищу математику як інструмент для економічних досліджень.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА, АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Елементи теорії матриць

Означення матриці, типи матриць

Поняття матриці та відповідний розділ вищої математики (матрична алгебра) має надзвичайне важливе значення для економістів. Пояснюється це тим, що вивчаючи той або інший економічний об'єкт чи процес, часто складається таблиця з показників, що його описує, і запис цієї таблиці у матричній формі спрощує подальшій процес економіко-математичного аналізу та дослідження.

Введемо основні поняття.

Означення. *Матрицею* розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців:

$$A_{m\times n}=\left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-тий рядок} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$j\text{-тий стовпець}$$

Матриці позначаються великими літерами латинського алфавіту: A, B, C,…, розмір $m\times n$ можна вказувати нижнім індексом справа (можна і не вказувати). Числа, котрі складають матрицю, називаються *елементами матриці*. Для позначення *елементів матриці* використовуються малі літери з подвійною індексацією: a_{ij}, де i – номер рядку, а j – номер стовпця, на перетині яких елемент розташований. Рядки нумеруються зверху вниз, а стовпці – зліва направо. Найчастіше використовуються округлі дужки при позначенні матриці.

Зручним є скорочений запис матриці:

$$A=(a_{ij}),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$

або

$$A=(a_{ij})_{m\times n}.$$

Зауваження. Для позначення того, що індекс i приймає всі значення множини натуральних чисел від 1 до m, а індекс j – від 1 до n, можна використовувати два види запису:

$$i=1,\dots,m \text{ або } i=\overline{1,m};$$

$$j=1,\dots,n \text{ або } j=\overline{1,n}.$$

Тобто скорочений запис позначення матриці також може мати вигляд $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Приклад 1. Задана матриця

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вкажіть розмір матриці, кількість рядків та стовпців. Якщо загальний елемент матриці позначити як b_{ij}, чому дорівнюють елементи b_{11}, b_{23}, b_{21}? Які елементи матриці співпадають за значенням?

Розв'язання

Для знаходження розміру матриці *B* необхідно порахувати кількість рядків та стовпців. Як бачимо, матриця складається з двох рядків та трьох стовпців, відповідно до записаного означення матриці: $m = 2$, $n = 3$, і розмір матриці *B* дорівнює 2×3.

Запишемо загальний вигляд матриці

$$B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

Тоді відразу видно, що $b_{11} = 0$ (елемент, який розташований на перетині першого рядку з першим стовпцем), $b_{23} = 2$ (елемент, який розташований на перетині другого рядку з третім стовпцем), а $b_{21} = -4$ (елемент, який розташований на перетині другого рядку з першим стовпцем).

Для того, щоб відповісти на останнє питання: які елементи матриці співпадають за значенням, для початку в заданій матриці побачимо, що лише число 2 двічі повторюється. Визначимо на перетині яких рядків та стовпців ці співпадаючі елементи розташовані:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \underline{2} & -3 \\ -4 & -1 & \underline{2} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо із запису матриці, $b_{12}=b_{23}=2$.

Означення. Матриця називається *прямокутною*, якщо кількість її рядків m не співпадає з кількістю її стовпців n ($m\neq n$).

Поняття матриці узагальнює поняття вектора – кожний вектор можна розглядати як матрицю.

Означення. *Вектор-рядок* $(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$ – є матрицею розміру $1\times n$, а *вектор-стовпець* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ – є матрицею розміру $n\times 1$.

Означення. Матрицю називають *квадратною n-го порядку*, якщо кількість її рядків і кількість стовпців дорівнюють n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11},a_{22},a_{33},\dots,a_{nn}$ квадратної матриці складають *головну діагональ*, а елементи $a_{1n},a_{2,n-1},a_{3,n-2},\dots,a_{n1}$ – *сторонню* або *другорядну діагональ*.

Означення. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, розміщені поза головної діагоналі, дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Діагональна матриця називається *одиничною* (її позначають літерою E), якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення. Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі її елементи, розташовані вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. При цьому матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають *верхньою трикутною*, а матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають *нижньою трикутною*.

Означення. Дві матриці називаються *рівними*, якщо мають однакові розміри, і елементи однієї матриці дорівнюють відповідним елементам другої матриці.

Означення. Матриця будь-якого розміру називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Дії над матрицями: додавання, множення матриці на число, на матрицю

З матрицями, як і з числами, можна виконувати різні операції, причому деякі з них повторюють дії з числами (додавання, віднімання, множення на число), а деякі – дещо відрізняються (множення матриць).

1. Множення матриці на число. *Добутком матриці*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

на число λ називається матриця:

$$\lambda A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тобто, щоб помножити матрицю на число, необхідно помножити на це число кожний її елемент. Короткий запис:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Наслідок. Загальний множник всіх елементів матриці можна виносити за знак матриці.

2. Додавання матриць. *Сумою двох матриць* одного розміру $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \ і\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матриця

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тобто матриці додаються поелементно. Короткий запис:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

3. Віднімання матриць. *Різницею двох матриць* одного розміру $m\times n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матриця

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Короткий запис:

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Зауваження. Операції додавання та віднімання вимагають обов'язкової умови – однакого розміру матриць.

Приклад 2. Задано дві матриці: $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо $A+B$, $2A$, $B-2A$:

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+2 & 0-1 \\ 1+9 & -4+0 \\ 0-5 & 3+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 10 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-2) & 2\cdot 0\\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-4)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 2 & -8\\ 0 & 6\end{pmatrix};$$

$$B-2A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 9 & 0\\ -5 & 3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 9 & 0\\ -5 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 2 & -8\\ 0 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+4 & -1-0\\ 9-2 & 0+8\\ -5-0 & 3-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 7 & 8\\ -5 & -3\end{pmatrix}.$$

Деякі властивості, які є в операціях над числами, виконуються і для операцій над матрицями:

1. $A+B=B+A$ **3.** $A+O=A$ **5.** $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ **4.** $1\cdot A=A$ **6.** $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

4. Множення матриць. Перед тим, як ввести операцію множення матриць, визначимо поняття *узгодженості матриць*.

Означення. Матрицю *A* будемо називати *узгодженою* з матрицею *B*, якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*.

Приклад 3. Визначимо, які матриці з заданих є узгоджені, а які ні:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\\ c_{41} & c_{42}\end{pmatrix}.$$

Відразу визначимо розмірність заданих матриць:

$$A_{2\times 3}, B_{3\times 1}, C_{4\times 2}.$$

Для того, щоб визначити чи узгоджені матриці A і B, необхідно порівняти кількість стовпців матриці A з кількістю рядків матриці B. Кількість стовпців матриці A дорівнює 3, що співпадає з кількістю рядків матриці B:

$$A_{2\times \underline{3}} \text{ та } B_{\underline{3}\times 1},$$

тобто матриця A узгоджена з матрицею B.

Але в зворотному порядку це не виконується – матриця B не узгоджена з матрицею A:

$$B_{3\times \underline{1}} \text{ та } A_{\underline{2}\times 3},$$

бо кількість стовпців матриці B дорівнює 1, а кількість рядків матриці A дорівнює 2.

Визначимо узгодженість решти пар матриць:

– матриця A не узгоджена з матрицею C: $A_{2\times \underline{3}}$ та $C_{\underline{4}\times 2}$;

– матриця C узгоджена з матрицею A: $C_{4\times \underline{2}}$ та $A_{\underline{2}\times 3}$;

– матриця B не узгоджена з матрицею C: $B_{3\times \underline{1}}$ та $C_{\underline{4}\times 2}$;

– матриця C не узгоджена з матрицею B: $C_{4\times \underline{2}}$ та $B_{\underline{3}\times 1}$.

Зауваження. З узгодженості матриці A з матрицею B не випливає узгодженість матриці B з матрицею A.

Зауваження. Якщо A і B – квадратні матриці однакового розміру, то матриця A узгоджена з матрицею B, а B узгоджена з A.

Перед визначенням добутку матриць, введемо *добуток вектора-рядка на вектор стовпець*:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n\,.$$

Для подібних сум існує зручний математичний *символ суми*

верхня грань сумування

індекс сумування

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,,$$

нижня грань сумування

де a_i – загальний член суми.

Використовуючи символ суми *добуток вектора-рядка на вектор стовпець* можна записати у наступному вигляді:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i\,.$$

Добуток матриці *A* **на матрицю** *B* вводиться лише тільки у випадку узгодженості матриці *A* з матрицею *B*, тобто якщо матриця *A* розміру $m\times\underline{n}$, а матриця *B* – розміру $\underline{n}\times k$.

Означення. *Добутком матриці* $A_{m\times\underline{n}} = (a_{ij})$ *на матрицю* $B_{\underline{n}\times k} = (b_{ij})$ називається матриця $C = AB$:

$$C_{m\times k} = (c_{ij}),$$

така, що

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}, \; i = \overline{1,m}, \, j = \overline{1,k}.$$

Із означення випливає, що елемент матриці AB, який знаходиться на перетині i-ого рядку та j-го стовпця, дорівнює сумі добутків елементів i-ого рядку матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Приклад 4. Обчислимо добуток матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицю $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Для цього спочатку перевіримо, чи узгоджена матриця A з матрицею B. Кількість стовпців матриці A дорівнює 2, і це співпадає с кількістю рядків матриці B, з чого випливає, що матриця A узгоджена з матрицею B, і операція множення матриці A на матрицю B може бути зробленою:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & -3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & -3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пояснення. На прикладі стрілочкою вказано послідовність дій при обчисленні елемента c_{11} добутку С=AB. Елемент c_{11} розміщений на перетині <u>першого рядку</u> з <u>першим стовпцем</u> і відповідно його розміщенню, для його обчислення необхідно елементи <u>першого рядку матриці A</u>: $(1 \quad 2)$ помножити на відповідні елементи <u>першого стовпця матриці B</u>: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ і просумувати отримані значення:

$$c_{11} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3 .$$

Аналогічно для кожного елемента добутку матриць *AB*: для обчислення c_{ij} потрібно елементи <u>*i*-го рядку матриці *A*</u> помножити на відповідні елементи <u>*j*-го стовпця матриці *B*</u> і просумувати отримані значення.

Зауважимо, що в цьому прикладі матрицю *A* можна помножити на матрицю *B*, а матрицю *B* на матрицю *A* – ні. Причиною цього є неузгодженість матриці *B* з матрицею *A*.

Якщо матриця *A* узгоджена з матрицею *B*, а *AB* узгоджена з *C*, то під добутком *ABC* розуміють матрицю, отриману послідовним множенням цих матриць, тобто (*AB*)*C*.

З визначення операції множення матриць випливають наступні властивості:

1. $AE = EA = A$ **3.** $(AB)C = A(BC)$ **5.** $(A+B)C = AC + BC$

2. $AO = OA = O$ **4.** $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ **6.** $A(B+C) = AB + AC$

Транспонування матриці. Еквівалентні перетворення матриць

Означення. Матриця, отримана з заданої заміною кожного її рядка стовбцем з тим самим номером, називається *матрицею, транспонованою відносно заданої*. Матрицю, транспоновану відносно матриці *A*, позначають або штрихом – A', або літерою *T* у верхньому куті – A^T. Таким чином, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

транспонованою відносно неї буде:

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операція знаходження матриці, транспонованої відносно заданої, називається *транспонуванням матриці*.

З означення випливає, що якщо матриця A має розмір $m \times n$, то транспонована відносно неї A' має розмір $n \times m$. Операція транспонування має наступні властивості:

1. $(A')' = A$ **3.** $(A+B)' = A' + B'$

2. $(\lambda A)' = \lambda A'$ **4.** $(AB)' = B'A'$

В подальшому нам потрібно буде робити деякі перетворення матриць для розв'язання тих або інших задач. Для цього визначимо, які перетворення називаються елементарними.

Означення. Під *елементарними перетвореннями матриці* розуміють:

1) транспонування матриці;

2) переставлення двох рядків або стовпців;

3) множення всіх елементів рядка (або стовпця) на одне і те ж число, відмінне від нуля;

4) додавання до елементів рядка (або стовпця) відповідних за номером елементів іншого рядка (або стовпця), помножених на одне і те ж число;

5) вилучення рядка (або стовпця), складеного з нулів; вилучення одного з двох рядків (або стовпців) з пропорційними (або рівними) членами;

6) включення рядка (або стовпця), складеного з нулів; включення рядка (або стовпця) з членами, пропорційними (або рівними) членам будь-якого рядка (або стовпця) матриці.

Означення. Дві матриці A і B називаються *еквівалентними* ($A \sim B$)**,** якщо кожну з них можна одержати з другої за допомогою скінченного числа *елементарних перетворень*.

Означення оберненої матриці

Означення. Матриця A^{-1} називається *оберненою до квадратної матриці A*, якщо при множенні цієї матриці на задану як справа, так і зліва, в результаті отримуємо одиничну матрицю:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

З означення випливає, що тільки квадратна матриця має обернену, і в цьому випадку обернена матриця є також квадратною того ж самого порядку. Але не кожна матриця має обернену, і для визначення умов існування оберненої матриці та методів її обчислення необхідно ввести важливе поняття *визначника матриці.*