ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Мета: навчитись використовувати функції математичного пакету Octave для розв'язання задач диференціального числення функцій однієї змінної.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$C' = 0, C = const \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0, C = const \in \mathbb{R}$;
2. $(C \cdot f)' = C \cdot f'$;
3. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
4. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, якщо $g(x) \neq 0$.

Диференціювання складеної функції $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Почнемо з найпростіших прикладів, в яких будемо використовувати лише таблицю та основні правила.

Приклад 1. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = x^2 \cdot \arcsin x$;

б) $y = 5(x^4 - 3) \cdot \sin x - \dfrac{3\ln x}{x^3}$.

Розв'язання (з докладними роз'ясненнями)

а) $$y' = \left(x^2 \cdot \arcsin x\right)' =$$

$$\{\textit{скористаємось правилом } 4\text{: } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'\}$$

$$= \Big(\underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{g}\Big)' = \left(x^2\right)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' =$$

$\{$*для обчислення похідної* $\left(x^2\right)'$ *у виразі першого доданку використаємо формулу*

$$\textit{з таблиці похідних}\text{: } \left(x^\mu\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1},$$

$$\textit{а для } (\arcsin x)' - \textit{формулу}\text{: } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\}$$

$$= \left(2 \cdot x^{2-1}\right) \cdot \arcsin x + x^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) $$y' = \left(5(x^4 - 3) \cdot \sin x - \frac{3\ln x}{x^3}\right)' =$$

$$\{\textit{скористаємось правилом } 3\text{: } (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\textit{та правилом } 2\text{: } (C \cdot f)' = C \cdot f'\}$$

$$=5\cdot\left((x^4-3)\cdot\sin x\right)'-3\cdot\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)'=$$

{*в першому доданку скористаємось правилом* 4: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$,

а в другому – правилом 5: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$}

$$=5\cdot\left(\underbrace{(x^4-3)}_{f}\cdot\underbrace{\sin x}_{g}\right)'-3\cdot\left(\frac{\overbrace{\ln x}^{f}}{\underbrace{x^3}_{g}}\right)'=$$

$$=5\cdot\left((x^4-3)'\cdot\sin x+(x^4-3)\cdot(\sin x)'\right)-3\cdot\left(\frac{(\ln x)'\cdot x^3-\ln x\cdot(x^3)'}{(x^3)^2}\right)=$$

{*для обчислення похідних використаємо формули з таблиці*:

$\left(x^{\mu}\right)'=\mu\cdot x^{\mu-1}$, $(\sin x)'=\cos x$ та $(\ln x)'=\frac{1}{x}$}

$$=5\cdot\left(4x^3\cdot\sin x+(x^4-3)\cdot\cos x\right)-3\cdot\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}\right)=$$

$$=20x^3\sin x+5(x^4-3)\cos x-\frac{3x^2(1-3\ln x)}{x^6}=$$

$$=20x^3\sin x+5(x^4-3)\cos x-\frac{3(1-3\ln x)}{x^4}.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

1. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=-\frac{4}{3}x^3+5\sqrt{x}-\frac{3}{x}-8x+2;$

б) $y=(x^3+5)\cdot tgx;$

в) $y=\frac{\sin x}{x^2};$

д) $y=8\sqrt[4]{x^5}-\frac{5}{x^2}+x^3-\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}-4x+1;$

е) $y=-(x^2+1)\cdot arcctgx;$

є) $y=\frac{2^x}{x};$

г) $y = \dfrac{x^2+1}{3arctgx} + (2x^5 + x^2)\cdot \ln x;$ ж) $y = \dfrac{\cos x}{1+2\sin x} - x^3 \cdot \log_4 x.$

Приклад 2. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = (4x^2 + x)^{15};$ в) $y = e^{\cos(x^3 - x)};$

б) $y = arctg\sqrt{x};$ г) $y = \log_3(x^2 - \sin x).$

Розв'язання (з докладними роз'ясненнями)

а) $$y' = \left((4x^2+x)^{15}\right)' =$$

$\{$*функція* $y=(4x^2+x)^{15}$ *є складною* $y = f(g(x))$*, де в якості внутрішньої функції виступає* $g(x) = 4x^2 + x$, *а в якості зовнішньої – степенева* $f(u) = u^{15}$, *і застосовуючи правило диференціювання складної функції*

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, *отримаємо*$\}$

$$= \underbrace{15\cdot\left(4x^2+x\right)^{15-1}}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{\left(4x^2+x\right)'}_{g'(x)} = 15\cdot\left(4x^2+x\right)^{14}\cdot(8x+1).$$

б) Перед тим, як обчислювати похідну функції $y = arctg\sqrt{x}$, дещо спростимо її запис для більш зручного застосування таблиці похідних (ірраціональності краще записувати у вигляді степенів):

$$y = arctg\sqrt{x} = arctg(x^{\frac{1}{2}}).$$

Навмисно $x^{\frac{1}{2}}$ записали в дужках для наочного вигляду внутрішньої функції. Так, внутрішньою функцію складної функції $y = f(g(x)) = arctg(x^{\frac{1}{2}})$ є степенева функція $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, а зовнішньою – обернена тригонометрична $f(u) = arctgu$. Використовуючи правило диференціювання складної функції, отримаємо:

$$y' = \left(arctg(x^{\frac{1}{2}}) \right)' = \frac{1}{1+\left(\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{g(x)}\right)^2} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \right) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}.$$

в) Функція $y = e^{\cos(x^3 - x)}$ є складною. Більш того – вона дещо «складніше», ніж функції з попередніх прикладів. Функція $y = e^{\cos(x^3 - x)}$ може бути представлена як $y = f(g(h(x)))$, де $f(u) = e^u$, $g(v) = \cos v$, $h(x) = x^3 - x$, і відповідно для обчислення її похідної потрібно бути скористатися формулою:

$$y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Таким чином, отримаємо:

$$y' = (e^{\cos(x^3 - x)})' = \underbrace{e^{\cos(x^3 - x)}}_{f'(g(h(x)))} \cdot \underbrace{(-\sin(x^3 - x))}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{(3x^2 - 1)}_{h'(x)} =$$

$$= -(3x^2 - 1) \cdot e^{\cos(x^3 - x)} \cdot \sin(x^3 - x).$$

г) $$y' = \left(\log_3 (x^2 - \sin x) \right)' =$$

{*функція* $y = \log_3 (x^2 - \sin x)$ *є складною* $y = f(g(x))$, *де в якості внутрішньої функції виступає* $g(x) = x^2 - \sin x$, *а в якості зовнішньої – логарифмічна* $f(u) = \log_3 u$, *і застосовуючи правило диференціювання складної функції* $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, *отримаємо*}

$$= \left(\log_3 (x^2 - \sin x) \right)' = \frac{1}{(x^2 - \sin x)\ln 3} \cdot (2x - \cos x) = \frac{(2x - \cos x)}{(x^2 - \sin x)\ln 3}.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

2. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=\left(4x^2+\frac{2}{5}\sqrt{x}\right)^3$;

б) $y=10^{x^3\cdot tgx}$;

в) $y=\arcsin(\ln x)$;

г) $y=(1+\sin^2 x)^4$;

д) $y=arcctg^2\frac{1}{x}$;

е) $y=e^{1-\cos^5 2x}$;

є) $y=\lg(x-\cos x)$;

ж) $f(x)=\frac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

На відміну від чисельних розрахунків, які ми робили на перших двох лабораторних заняттях, у другому модулі нам потрібно вже працювати в техніці символьних змінних: задавати функції, обчислювати похідні, аналізувати поведінку функцій. Для підключення символьних обчислень необхідно у командному рядку ввести:

```
x = sym ( "x" )
```

Після чого вже можна задавати функції та працювати з ними.

В Таблиці наведені функції для **визначення елементарних функцій** в Octave. Для обчислення похідної заданої функції **f** необхідно використати функцію **`diff(f,x)`**, де в дужках на першому місці стоїть назва функції **f**, а на другому змінна **x.** В прикладах відразу наведені і функції, і їх похідні.

Степенева функція		**Показникова функція**	
x^n $\sqrt{x}$	$x\wedge n$ sqrt(x)	a^x	$a\wedge x$

<table>
<tr><td colspan="2">Приклад: f=x^(1/3)
3 ___
\/ x
f1=diff(f,x)
1
———
2/3
3·x</td><td colspan="2">Приклад: g=4^x
x
4
g1=diff(g,x)
x
4 ·log(4)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Експоненціальна функція</td><td colspan="2">Логарифмічна функція</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td>$\exp(x)$</td><td>$\log_2 x$
$\log x$</td><td>$\log 2(x)$
$\log 10(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклад: g=exp(x)
x
e
g1=diff(g,x)
x
e</td><td colspan="2">Приклад: h=log2(x)
log(x)
———
log(2)
h1=diff(h,x)
1
———
x·log(2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Натуральний логарифм</td><td colspan="2">Тригонометричні та обернені тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td>$\log(x)$</td><td>$\sin x$
$\arcsin x$</td><td>$\sin(x)$
$a\sin(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Приклад: f=log(x)
log(x)
f1=diff(f)
1
—
x</td><td>$\cos x$
$\arccos x$</td><td>$\cos(x)$
$a\cos(x)$</td></tr>
<tr><td>tgx
$arctgx$</td><td>$\tan(x)$
$a\tan(x)$</td></tr>
<tr><td>$ctgx$
$arcctgx$</td><td>$\cot(x)$
$a\cot(x)$</td></tr>
</table>

Приклад обчислення першої похідної функції $f(x)=\dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

– Диференціювання в Octave відбувається в техніці символьних змінних, тому спочатку потрібно включити цей пакет. Для цього в командному рядку потрібно ввести:

```
x = sym ( "x" )
```

– Після підключення символьних обчислень визначимо функцію $f(x)=\dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Введемо у командному рядку:

```
f=(5*sin(2*x))/sqrt(cos(2*x))
```

– Для обчислення похідної заданої функції f необхідно використати функцію `diff(f,x)`, де в дужках на першому місці стоїть назва функції f, а на другому змінна **x**

```
f1=diff(f,x)
```

Лістинг обчислення першої похідної функції $f(x)=\dfrac{5\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ в Octave

```
x = sym ( "x" )
f=(5*sin(2*x))/sqrt(cos(2*x))
Symbolic pkg v2.9.0: Python communication link active, SymPy v1.5.1.
x = (sym) x
f = (sym)

   5·sin(2·x)
  ____________
     __________
  ╲╱ cos(2·x)

f1=diff(f,x)
f1 = (sym)

         2
  5·sin  (2·x)                _________
  ____________ + 10·╲╱ cos(2·x)
      3/2
  cos    (2·x)
```

Приклад обчислення першої похідної функції $y=\ln^5(e^{2x}+1)-2arctg^4(e^x)$ в Octave

```
y=(log(exp(2*x)+1))^5-2*(atan(exp(x)))^4
```

```
y = (sym)

      5⎛ 2·x      ⎞          4⎛ x⎞
   log ⎝e     + 1⎠ - 2·atan  ⎝e ⎠
```

```
y1=diff(y,x)
y1 = (sym)

     2·x     4⎛ 2·x      ⎞       x     3⎛ x⎞
  10·e    ·log ⎝e     + 1⎠    8·e ·atan  ⎝e ⎠
  ─────────────────────── - ──────────────
           2·x                   2·x
          e     + 1             e     + 1
```

Приклад обчислення першої похідної функції $y = 5(x^4 - 3)\cdot\sin x - \dfrac{3\ln x}{x^3}$. **в Octave**

```
y=(5*(x^4-3))*sin(x)-(3*log(x))/(x^3)
y = (sym)

 ⎛    4     ⎞              3·log(x)
 ⎝5·x   - 15⎠·sin(x) -  ────────
                             3
                            x
```

```
y1=diff(y,x)
y1 = (sym)

       3           ⎛    4     ⎞           9·log(x)    3
  20·x ·sin(x) +  ⎝5·x   - 15⎠·cos(x) +  ──────── - ──
                                             4         4
                                            x         x
```

Диференціювання степенево-показникової функції

Розглянемо степенево-показникову функцію, тобто функцію наступного вигляду:

$$y = \left(u(x)\right)^{v(x)}, u(x) > 0.$$

Нажаль, відомі нам правила та формули не надають можливості відразу обчислити похідну такої функції, тому зробимо деякі тотожні перетворення для приведення функції до такого виду, щоб можна було застосувати відомі правила.

Для приведення функції до зручного вигляду скористуємось тотожністю:

$$\left(u(x)\right)^{v(x)} = e^{\ln\left(u(x)\right)^{v(x)}}.$$

За допомогою властивості логарифмічної функції приведемо функцію до наступного виду:

$$y = \left(u(x)\right)^{v(x)} = e^{\ln\left(u(x)\right)^{v(x)}} = e^{v(x)\cdot\ln u(x)}.$$

І у такому записі функцію вже можна диференціювати, як складну функцію виду

$$y = f(g(x)),$$

де зовнішня функція $f(w) = e^{w}$ – показникова, а внутрішня – $w = g(x) = v(x)\cdot\ln u(x)$ – деяка складна функція, до обчислення похідної якої можна застосувати відомі правила та формули. А саме:

$$y' = \left(e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\cdot\left(v(x)\cdot\ln u(x)\right)' =$$

$$= e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}u'(x)\right).$$

Логарифмічна похідна

Нехай функція $y = f(x)$ відмінна від нуля та диференційована в деякій точці. Тоді в цій точці існує похідна функції $\ln|f(x)|$, яка називається *логарифмічною похідною функції* $y = f(x)$**.** За правилом диференціювання складної функції справедлива рівність

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Звідки, якщо $f(x) \neq 0$, похідну функції $y = f(x)$ можна знайти наступним чином:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln|f(x)|\right)'.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

3. Знайти похідні y' вказаних степенево-показникових функцій:

а) $y = x^x$; б) $y = x^{\sin x}$; в) $y = (1+\cos x)^{\ln x}$; г) $y = (\sin x)^{(1+x^2)}$,

д) $y = (\sin x)^{(x+\cos x)}$; є) $y = (\ln x)^{\sin x}$; е) $y = x^{x^x}$.

Вказівки до виконання та оформлення роботи

1. Загальні технічні вимоги:

– ім’я файлу Лаб4Фамілія.pdf

– орієнтація – книжна;

– поля: всі по 20 мм;

– міжрядковий інтервал – 1,5 (без додаткових інтервалів до та після абзаців);

– шрифт – Times New Roman (для основного тексту), Courier New (для лістингу програми);

– розмір шрифту (кегль) – 14;

– вирівнювання – за шириною рядка.

2. Приклад оформлення:

Лабораторна робота №4

Тема: Диференціальне числення функцій однієї змінної

Звіт студента(-ки) групи ______________

ПІБ

1. *Записуємо функцію (наприклад,* $y = \ln^5(e^{2x} + 1) - 2arctg^4(e^x)$*)*

- фотографії обчислення похідної вручну;
- лістинг обчислення похідної в Octave.

І таким же чином оформлюємо всі завдання