

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Проценти прості та складені в економічних дослідженнях

Згадаємо з лекції, що розрізняють три основні *задачі на відсотки*:

1. Для того, щоб знайти число, яке складає p відсотків від даного числа A , потрібно:

- представити p процентів у вигляді десяткового дробу;
- помножити число A знайдений десятковий дріб:

$$B = A \cdot \frac{p}{100}.$$

2. Для того, щоб знайти число A по відомій її частині B , яка складає p відсотків від A , потрібно:

- перевести p відсотків в десятковий дріб;
- розділити число B на отриманий десятковий дріб, тобто:

$$A = B \div \frac{p}{100} = B \cdot \frac{100}{p}.$$

3. Якщо відомі число A та число B , то для знаходження який процент p число B складає від числа A , необхідно дріб $\frac{B}{A}$ помножити на 100%:

$$p = \frac{B}{A} \cdot 100\%.$$

Та згадаємо формулу для обчислення капіталу через m років при нарахуванні *простого проценту* p на суму первинного внеску A за кожний рік використання коштами:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{p}{100} \right).$$

Відношення суми, яку виплачують за користування грошовими засобами, до обсягу останніх називають *питомою відсотковою ставкою* (i). Це відношення, виражене у відсотках, називається *відсотковою ставкою*, тобто:

$$i = \frac{P}{100}.$$

І формулу $B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{P}{100}\right)$ можна записати як

$$B(m) = A \cdot (1 + m \cdot i),$$

саме у такому вигляді вона використовується у фінансовій математиці.

Приклад 1

Наприклад, за 1000 грн., узятих у банку, підприємець заплатив 50 грн. Тоді питома відсоткова ставка банку становить

$$\frac{50}{1000} = 0,05,$$

а відсоткова ставка:

$$0,05 = \frac{P}{100} \Rightarrow P = 0,05 \cdot 100 = 5 [\%].$$

Якщо ж питома відсоткова ставка числа 2 відносно числа 100 становить

$$i = \frac{2}{100} = 0,02,$$

а відсоткова ставка, відповідно:

$$P = 0,02 \cdot 100 = 2 [\%].$$

Приклад 2

У банку взято позику 60000 грн. на 4 роки. Річна процентна ставка 12% (простий відсоток). Яка сума погашення позики через 4 роки?

Обчислимо суму за формулою $B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{p}{100}\right)$, де

$A = 60000$, $m = 4$, $p = 12$:

$$B(4) = 60000 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{12}{100}\right) = 60000 \cdot \frac{100 + 4 \cdot 12}{100} = 600 \cdot 148 = 88800.$$

Можна також обчислити суму коштів, яку заплатить позичальник банку за користування коштами, яка становить

$$88800 - 60000 = 28800.$$

Обчислимо, скільки відсотків від позиченої суми (60000 грн.) складає сума за користування коштами (28800 грн.). Скористуємось формулою для 3 типу задач на відсотки: якщо відомі число A та число B , то для знаходження який процент p число B складає від числа A , необхідно дріб $\frac{B}{A}$ помножити на 100%:

$$p = \frac{B}{A} \cdot 100\%.$$

Підставимо наші значення:

$$p = \frac{28800}{60000} \cdot 100 = 48\%.$$

Або можна було 12% помножити на 4 роки, і також отримати 48%.

Приклад 3

Визначити, з якої суми, виданої банком під 10% річних (простий процент), через два роки нагромадиться сума 500 млн. грн.

За формулою $B(m) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{p}{100}\right)$, де $B = 500$, $m = 2$, $p = 10$,

обчислимо суму A :

$$A = \frac{B(m)}{\left(1 + m \cdot \frac{p}{100}\right)} = \frac{500}{\left(1 + 2 \cdot \frac{10}{100}\right)} = \frac{500}{1,2} \approx 416,7 \text{ млн. грн.}$$

Формула для обчислення капіталу через m років при нарахуванні складеного проценту p на суму первинного внеску A за кожний рік використання коштами:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m.$$

Якщо використовувати у формулі позначення *питомої відсоткової ставки* $i = \frac{p}{100}$, то:

$$B(m) = A \cdot (1 + i)^m.$$

Множник $1 + \frac{p}{100}$ ще називається *коефіцієнтом росту (нарощення)* або *коефіцієнтом складеного відсотку* та позначається

$$1 + \frac{p}{100} = q,$$

і формулу можна записати як:

$$B(m) = A \cdot q^m.$$

Приклад 4

У банк під 10% річних відсотків (складений) вкладено суму у 10 тис. грн. Яку суму отримає вкладник через 5 років?

Обчислимо суму $B(m)$, яку отримає вкладник через 5 років, за формулою

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m, \text{ де } A = 10 \text{ тис. грн.}, m = 5, p = 10:$$

$$B(5) = 10 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 10 \cdot 1,1^5 = 16,1 \text{ тис. грн.}$$

Зауважимо, що коефіцієнт складеного відсотку в цій задачі дорівнює:

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1,1.$$

Якщо відсотки нараховуються декілька разів на рік, то річну процентну ставку ділять на кількість періодів нарахування на рік, а степе́нь множиться на кількість нарахувань на рік:

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot n}\right)^{m \cdot n},$$

де n – кількість нарахувань на рік.

Приклад 5

Обчислимо різницю між отриманим капіталом через 5 років при нарахуванні *складеного проценту* $p = 10\%$ на суму первинного внеску 10000 грн. при нарахуванні один раз на рік та при нарахуванні щоквартально.

Обчислимо капітал при нарахуванні один раз на рік, тобто за формулою

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m:$$

$$B_1(5) = 10000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 10000 \cdot 1,1^5 = 16105,1.$$

При нарахуванні щоквартально скористуємось формулою

$$B(m) = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100 \cdot n}\right)^{m \cdot n}, \text{ де } n = 4:$$

$$B_2(5) = 10000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100 \cdot 4}\right)^{5 \cdot 4} = 10000 \cdot 1,025^{20} = 16386,1644.$$

Як бачимо, щоквартальне нарахування надає додатковий прибуток – різниця між $B_2(5)$ та $B_1(5)$ складає:

$$B_2(5) - B_1(5) = 16386,1644 - 16105,1 = 281,0644.$$

Кількість років m , необхідних для збільшення первинної суми у N разів при нарахуванні складеного відсотку p один раз на рік, можна знайти наступним чином. Запишемо у лівій стороні формули замість $B(m)$ бажану суму $N \cdot A$:

$$N \cdot A = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^m,$$

звідки:

$$N = \left(1 + \frac{P}{100}\right)^m.$$

Скористуємось властивістю логарифмічної функції:

$$\ln N = \ln \left(1 + \frac{P}{100}\right)^m \Rightarrow \ln N = m \cdot \ln \left(1 + \frac{P}{100}\right),$$

отже

$$m = \frac{\ln N}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Якщо використовувати у формулі позначення *питомої відсоткової ставки* $i = \frac{p}{100}$, то:

$$m = \frac{\ln N}{\ln(1 + i)}.$$

Використовуючи *коефіцієнт складеного відсотку* $1 + \frac{p}{100} = q$, формулу

можна записати як:

$$m = \frac{\ln N}{\ln q}.$$

Приклад 6

Обчислимо, скільки років знадобиться для збільшення суми вкладу в 10 разів при нарахуванні складеного відсотку $p = 5$ один раз на рік:

$$m = \frac{\ln N}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\ln 10}{\ln\left(1 + \frac{5}{100}\right)} \approx 47,2.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

4.1 На розпродажу перша ціна на ноутбук 15000 грн. була перекреслена, та написано ціну 12000 грн. Визначити знижку на цей товар.

4.2 Після знижки у 30% ціну на навушники ще знизили ще на 10% від останньої ціни. Ціна після цих двох акцій склала 2016 грн. Яка ціна була на початку продажів?

4.3 За використання кредитних коштів у розмірі 30000 грн. дівчина заплатила

500 грн. Обчислити питому відсоткову ставку банку і відповідну відсоткову ставку.

4.4 Чому дорівнює коефіцієнт складеного відсотку q , якщо p дорівнює:

- а) 4; б) 5; в) 3,6; г) 5,5; д) $4\frac{3}{4}$; є) $5\frac{1}{3}$.

4.5 Чому дорівнює відсоток p , якщо коефіцієнт складеного відсотку q дорівнює:

- а) 1,05; б) 1,04; в) 1,036; г) 1,0475; д) $1\frac{1}{20}$; є) $\frac{26}{25}$.

4.6 Обчислити капітал через 1, 5, 10 років при нарахуванні простого та складеного відсотків $p = 5$ один раз на рік, два рази на рік, чотири рази на рік, при сумі первинного внеску $A = 20000$ грн.

4.7 В якому випадку капітал виявиться більшим, – якщо вкласти кошти на 10 років зі складним відсотком 4%, або на 4 роки зі складним відсотком 10%.

4.8 Який первинний капітал, вкладений під складений відсоток 4%, через 22 роки перетвориться на 17 млн. грн.

4.9 Який первинний капітал, вкладений під складений відсоток $4\frac{1}{3}\%$, через 30 роки перетвориться на 30 млн. грн.

4.10 Під який складений відсоток необхідно вкласти капітал, для того, щоб він став утричі більше через 20 років.

4.11 Під який складений відсоток необхідно вкласти капітал, для того, щоб він став більше у 5 разів через 30 років.

4.12 За який час 8007 грн. при нарахуванні складеного відсотка $4\frac{3}{4}\%$ перетворяться на 21217,6 грн.

4.13 За який час капітал зростає вдвічі при 3% ставці складеного відсотка.

4.14 За який час капітал, вкладений під 2,5 складеного відсотка зросте утричі.

4.15 За який час капітал, вкладений під 3,5 складеного відсотка зросте у 3,5 рази.

4.16 У скільки разів збільшиться первинний капітал, вкладений на

а) на 100 років під 2%;

б) на 24 роки під $3\frac{1}{4}\%$;

в) на 25 років під 4%.

4.17 У місті 20000 жителів, скільки жителів буде в цьому місті через 30 років, якщо його населення зростає на $2\frac{1}{4}\%$.
