ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Границі послідовностей. Границі функцій

Мета: навчитись використовувати функції математичного пакету Octave для обчислення границь функцій.

Поняття числової послідовності. Способи завдання послідовностей

Означення. Будь-який впорядкований (занумерований) дискретний набір чисел називають *числовою послідовністю*:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ де } a_n = f(n), \text{ де } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

тобто послідовність – *функція натурального аргументу*.

Числову послідовність записують у вигляді множини її членів $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, занумерованої всіма числами натурального ряду, або коротко $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Приклади числових послідовностей:

1) якщо загальний член послідовності задано як $a_n = \frac{1}{n}$, то елементи послідовності можна виписати наступним чином $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots\right\}$;

2) якщо загальний член послідовності задано як $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, то елементи послідовності можна виписати наступним чином $\{2; \left(\frac{3}{2}\right)^2; \left(\frac{4}{3}\right)^3; \ldots\}$;

3) елементи арифметичної прогресії $a_n = a_{n-1} + p = a_1 + (n-1)p$, де a_1, p – сталі числа (перший член та знаменник арифметичної прогресії), складають

числову послідовність;

4) елементи геометричної прогресії $b_n = b_{n-1}q = b_1 q^{n-1}$, де b_1, q – сталі числа (перший член та знаменник геометичної прогресії), складають числову послідовність.

Приклади «різної поведінки» числових послідовностей:

Розглянемо деяку послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Залежно від зростання номера члена послідовності n її члени можуть поводити себе по-різному. Наприклад,

– для послідовності з загальним членом $a_n = 3n$ зі зростанням номера n члени послідовності необмежено зростають;

– у послідовності $a_n = (-1)^n$ члени по черзі приймають значення 1 та –1;

– для послідовності з загальним членом $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ при збільшенні номера n її члени стають дедалі ближчими до одиниці.

Той факт, що число a є границею послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ записується у вигляді:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{, або } a_n \to a \text{, якщо } n \to \infty .$$

Послідовність, яка має границю, називають *збіжною*, в противному випадку – *розбіжною*.

Випадок, коли послідовність збігається до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ($a_n \to 0$, при $n \to \infty$), представляє особливий інтерес. Такі послідовності називаються *нескінченно малими.*

Нескінченно малим послідовностям, в деякому сенсі, протиставляються нескінченно великі послідовності.

Той факт, що послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є *нескінченно великою* записується у вигляді: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, або $a_n \to \infty$, якщо $n \to \infty$, та говорять, що послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *прямує до нескінченності* або *розбігається до нескінченності*.

Приклади нескінченно малих послідовностей:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0,\ \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

Приклади нескінченно великих послідовностей:

$$a_n = n;\ a_n = -n;\ a_n = (-1)^n n.$$

Використовуючи наступні теореми та леми, навчимося обчислювати більш складні границі.

Теорема. *Якщо послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою, то послідовність $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ буде нескінченно малою (послідовність $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ називають зворотною до $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).*

Лема 1. *Сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою.*

Лема 2. *Добуток обмеженої послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і нескінченно малої $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малою послідовністю.*

Теорема. *Якщо послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$* та *$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігаються відповідно до границь a і b, тоді:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *при умові* $b, b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Число *e*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828\ldots$$

Невизначені вирази

В останній теоремі послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігались відповідно до скінчених границь *a* і *b*, але як визначати збіжність суми, різниці, добутку або частки цих послідовностей у випадку, коли одна або обидві послідовності прямують до нескінченності, або у знаменнику частки $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до нуля. Розглянемо декілька найбільш цікавих випадків.

1. Нехай в частці $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ обидві послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *прямують до нуля*. Виявляється у такому випадку, знаючи про те, що *послідовності* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *та* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *нескінченно малі*, визначити відразу, куди прямує відповідна частка $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, неможливо, тобто ніякого загального твердження не існує. Пояснимо це на прикладах.

Приклад 1

Нехай є дві послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, де загальні члени цих послідовностей задано як $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Тобто *обидві послідовності прямують до нуля*. Розглянувши послідовність $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, загальний член якої

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, можна побачити, що ця послідовність є *нескінченно малою*.

Приклад 2

Якщо ж навпаки, покласти $a_n = \frac{1}{n}$, а $b_n = \frac{1}{n^2}$, послідовність $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ з

загальним членом $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = n$ є *нескінченно великою*.

Приклад 3

Розглянувши нескінченно малі послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ з загальними членами $a_n = \frac{c}{n}$, а $b_n = \frac{1}{n}$, де c – будь-яке відмінне від нуля дійсне число, можна побачити, що послідовність $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ з загальним членом

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{c \cdot n}{n} = c$ є *сталою послідовністю*, яка збігається до скінченної границі

c.

Приклад 4

Якщо ж $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, а $b_n = \frac{1}{n}$, тобто послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малі, то їх частка $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ з загальним членом $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^n n}{n} = (-1)^n$ виявляється *не має границі та не розбігається до нескінченності*.

Таким чином, знання лише границь послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ не дає можливості судити про поведінку їх частки, необхідно безпосередньо дослідити поведінку послідовності $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Для того, щоб характеризувати особливість, коли обидві послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малі, говорять, що вираз $\frac{a_n}{b_n}$ **представляє невизначеність** $\left\{\frac{0}{0}\right\}$**.**

---

2. У випадку, коли одночасно $a_n \to \pm\infty$ та $b_n \to \pm\infty$ при $n \to \infty$ також неможливо одразу визначити поведінку послідовності $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Цей факт гарно ілюструється прикладами, схожими на вищенаведені.

Приклад 5

Розглянемо декілька випадків **невизначеності** $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$:

– $a_n = n \to +\infty$, $b_n = n^2 \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$;

– $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = n \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{n} = n \to +\infty$;

– $a_n = c \cdot n \to +\infty$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $b_n = n \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow$ $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{c \cdot n}{n} = c \to c$;

– $a_n = \left(2 + (-1)^{n+1}\right) \cdot n \to +\infty$, $b_n = n \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow$ $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\left(2 + (-1)^{n+1}\right) \cdot n}{n} = \left(2 + (-1)^{n+1}\right)$ *не має границі та не розбігається до нескінченності*.

---

3. Розглянемо добуток $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ послідовностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких що $a_n \to 0$, а $b_n \to \pm\infty$ при $n \to \infty$. Виявляється в цьому випадку, як і в перших двох, неможливо одразу оцінити поведінку послідовності $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Приклад 6

– $a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $b_n = n \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = \dfrac{1}{n} \to 0$;

– $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $b_n = n^2 \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = n \to \infty$;

– $a_n = \dfrac{c}{n} \to 0$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $b_n = n \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow$ $a_n \cdot b_n = c \to c$;

– $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0$, $b_n = n \to +\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = (-1)^{n+1}$ *не має границі та не розбігається до нескінченності*.

У випадку двох послідовностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких що $a_n \to 0$, а $b_n \to \pm\infty$ при $n \to \infty$, говорять, що вираз $a_n \cdot b_n$ представляє **невизначеність** $\{0 \cdot \infty\}$.

4. Розглянемо, нарешті, суму $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, і тут виявляється особливим випадком, коли послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ прямують до нескінченності різних знаків. Саме в цьому випадку про $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ нічого одразу сказати неможливо.

Приклад 7

- $a_n = 2n \to +\infty$, $b_n = -n \to -\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow a_n + b_n = n \to +\infty$;
- $a_n = n \to +\infty$, $b_n = -2n \to -\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow a_n + b_n = -n \to -\infty$;
- $a_n = n + c \to +\infty$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $b_n = -n \to -\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow$ $a_n + b_n = c \to c$;
- $a_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty$, $b_n = -n \to -\infty$, при $n \to \infty \Rightarrow a_n + b_n = (-1)^n$ *не має границі та не розбігається до нескінченності*.

У випадку, коли послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ прямують до нескінченності різних знаків ($a_n \to +\infty$ та $b_n \to -\infty$, при $n \to \infty$), говорять, що вираз $a_n + b_n$ представляє **невизначеність типу** $\{\infty - \infty\}$.

Таким чином, представлено **чотири випадки невизначеностей арифметичних виразів двох послідовностей**:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\ \{0 \cdot \infty\},\ \{\infty - \infty\}.$$

В цих випадках доводиться безпосередньо досліджувати кожен вираз, і таке дослідження отримало назву **розкриття невизначеності**. І далеко не завжди воно є таким простим, як в наведених прикладах.

Розглянемо невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Приклад 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\boxed{\text{у чисельнику та знаменнику винесемо за дужки } n \text{ у максимальному степені}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(3+\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-4n^2}{n-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\boxed{\text{у чисельнику та знаменнику винесемо за дужки } n \text{ у максимальному степені}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\overbrace{\frac{4}{n}}^{\to 0}\right)}{n\left(1-\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1}=\infty.$$

Приклад 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-4n^2}{n-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\boxed{\text{у чисельнику та знаменнику винесемо за дужки } n \text{ у максимальному степені}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1-\overbrace{\frac{4}{n}}^{0}\right)}{n\left(1-\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1} = \infty.$$

Приклад 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^5-n^3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \boxed{\text{у чисельнику та знаменнику винесемо за дужки } n \text{ у максимальному степені}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\overbrace{\frac{3}{n}}^{0}\right)}{n^5\left(1-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$$

Задачі для лабораторного заняття та самостійної роботи

3.1. Обчислити границі послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1000n^2+1}{100n^2+15n}; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-4n+1}{5n^6+2n}.$$

Загальна формула для дробово-раціональної функції

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+b_2n^{q-2}+\ldots+b_{q-1}n+b_q}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p}{b_0n^q}=\begin{cases}0, p<q,\\ \frac{a_0}{b_0}, p=q,\\ \infty, p>q.\end{cases}$$

Розглянемо границі, що містять ірраціональності

Приклад 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n)^{\frac{1}{2}}}{(n^3-3n^2)^{\frac{1}{3}}}=$$

у чисельнику та знаменнику винесемо за дужки n у максимальному степені

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(n^3\left(1-\frac{3}{n}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1+\overbrace{\frac{4}{n}}^{\to 0}\right)^{\frac{1}{2}}}{n\cdot\left(1-\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Задачі для лабораторного заняття та самостійної роботи

3.2. Обчислити границі послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt{n+1}};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}};\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}.$$

Розглянемо границі, що містять показникову функцію

Обчислюючи такі границі, будемо використовувати $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, 0 < a < 1 \\ \infty, a > 1. \end{cases}$.

Приклад 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n - 2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \boxed{\begin{array}{l}\text{у чисельнику та знаменнику} \\ \text{винесемо за дужки } 3^n\end{array}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n\left(1 - \underbrace{\frac{2}{3^n}}_{\downarrow\, 0}\right)} = \frac{5}{1} = 5.$$

Приклад 7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n + 7^{n-1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \boxed{\begin{array}{l}\text{у чисельнику та знаменнику} \\ \text{винесемо за дужки } 7^n\end{array}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n\left(\left(\frac{2}{7}\right)^n + 1\right)}{7^n\left(\left(\frac{2}{7}\right)^n - \frac{1}{7}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{7}} = -7.$$

Задачі для лабораторного заняття та самостійної роботи

3.3. Обчислити границі послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}.$$

Розглянемо невизначеність $\{\infty - \infty\}$

Границі, що містять ірраціональності

Приклад 8

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\{\infty-\infty\}=\boxed{\text{помножимо та розділимо на спряжене } \left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Задачі для лабораторного заняття та самостійної роботи

3.4. Обчислити границі послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right);\qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$$

Границі, що приводять до числа *e*

Приклад 9

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}=\left\{1^\infty\right\}=\boxed{\text{згадаємо число } e \text{ приведемо вираз до вигляду } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+2+1}{n-2}\right)^{2n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-2}+\frac{3}{n-2}\right)^{2n-1}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{n-2}{3}}_{\infty}}\right)^{\frac{n-2}{3}}}_{e}{}^{\cdot\frac{3}{n-2}\cdot(2n-1)}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3(2n-1)}{n-2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-3}{n-2}} = e^6.$$

Задачі для лабораторного заняття та самостійної роботи

3.5. Обчислити границі послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{\frac{3n-4}{2}}.$$

Границі функцій

Задачі для лабораторного заняття та самостійної роботи

3.6. Обчислити границі функцій:

$$1)\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}, \qquad 2)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}, \qquad 3)\ \lim_{x\to2}\frac{x^3-6x+4}{2x^2-x-6},$$

$$4)\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}, \qquad 5)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, \qquad 6)\ \lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}},$$

$$7)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}, \qquad 8)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}, \qquad 9)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^2}{1+x^2+3x^3},$$

$$10)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right), \qquad 11)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right), \qquad 12)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

Підключимо символьні обчислення: `x = sym ( "x" )` або `syms x`. В математичному пакеті Octave для обчислення границь використовується функція `limit`. У своїй основній формі функція

```
limit(f)
```

приймає вираз `f` як аргумент і знаходить границю виразу, коли незалежна змінна x прямує до нуля.

Приклад обчислення границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+5}{x^4+7}$:

```
syms x
limit((x^3+5)/(x^4+7))
Symbolic pkg v2.9.0: Python communication link active, SymPy v1.5.1.
ans=(sym)5/7
```

У загальному випадку при обчисленні границі, коли незалежна змінна прямує до будь-якого числа або нескінченності, використовується форма

`limit (f, x, x0),`

де `f` – символьний вираз функції, `x` – незалежна змінна; x_0 – точка, у якій потрібно обчислити границю, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Якщо необхідно обчислити границю, при прямуванні змінної до нескінченності, на місці x_0 записують `-inf` (при -∞) або `+inf` (при +∞).

Приклад обчислення границі $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+5}{x^4+7}$:

```
limit((x^3+5)/(x^4+7),x,1)
ans = (sym) 3/4
```

Приклад обчислення границі $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+5}{x^4+7}$:

```
limit((x^3+5)/(x^4+7),x,+inf)
ans = (sym) 0
```

Приклад обчислення границі $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-1}$:

```
limit((3*x^2+2*x-1)/(2*x^2-1),x,+inf)
ans = (sym) 3/2
```

Приклад обчислення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

```
limit(((x+1)/(x-2))^(2*x-1),x,+inf)
ans = (sym)

   6
  e
```

Приклад обчислення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

```
limit(sqrt(x^2+x)-x,x,+inf)
ans = (sym) 1/2
```

Вказівки до виконання та оформлення роботи

1. Загальні технічні вимоги:

– ім'я файлу Лаб3Фамілія.pdf

– орієнтація – книжна;

– поля: всі по 20 мм;

– міжрядковий інтервал – 1,5 (без додаткових інтервалів до та після абзаців);

– шрифт – Times New Roman (для основного тексту), Courier New (для лістингу програми);

– розмір шрифту (кегль) – 14;

– вирівнювання – за шириною рядка.

2. Приклад оформлення:

Лабораторна робота №3

Тема: Границі послідовностей. Границі функцій

Звіт студента(-ки) групи ______________

ПІБ

Записуємо границю

– фотографії обчислення вручну;
– лістинг обчислення в Octave.

І таким чином оформлюємо всі завдання