ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Елементи векторної алгебри. Елементи аналітичної геометрії

Приклад 1. Задано три точки $A(-1,2)$, $B(2,6)$, $C(2,0)$. Необхідно:

а) зобразити точки на декартовій системі координат;

б) визначити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BC}$ та знайти їх довжини;

в) знайти орти векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BC}$;

г) обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BC}$ та знайти косинус кута між ними;

д) обчислити напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Вказівки до розв'язування Для визначення векторів скористуємось тим, що якщо відомі точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, то вектор $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. Для визначення довжини вектора $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Для знаходження ортів скористуємось $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Вираз скалярного добутку векторів $\bar{a} = (a_x, a_y)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y)$ через координати векторів: $(\bar{a}, \bar{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$. Косинус кута між векторами: $\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$. Напрямні косинуси знаходяться за формулами: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3;4)$ та точку $N(6;-2)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

відповідно у нашому випадку рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3;4)$ та точку $N(6;-2)$ записується наступним чином:

$$\frac{x-(-3)}{6-(-3)} = \frac{y-4}{-2-4},$$

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y-4}{-6},$$

$$-2(x+3) = 3(y-4),$$

$$-2x - 6 - 3y + 12 = 0,$$

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

І ми отримали *загальне рівняння прямої* $Ax + By + C = 0$, де $A = 2, B = 3, C = -6$. Відповідно нормальний вектор визначається як $\overline{n} = (2,3)$.

Рівняння прямої у відрізках має наступний вид:

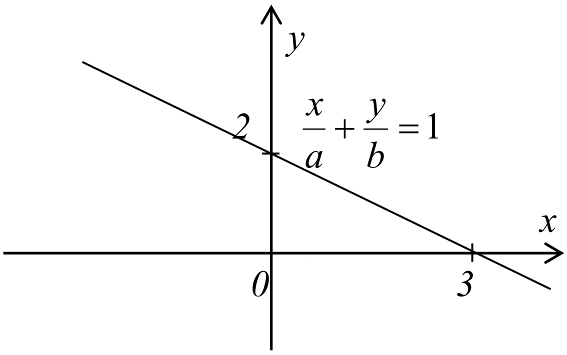
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

перетворимо рівняння $2x + 3y - 6 = 0$ до необхідного вигляду:

$$2x + 3y = 6 \,\big|\, \div 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

І ми отримали *рівняння прямої у відрізках* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де $a = 3, b = 2$. Запис рівняння прямої у відрізках, у випадку, коли пряма не проходить через початок координат, є найзручнішим для подальшого малювання графіку функції. Відмітивши на осі Ox точку $a = 3$, а на осі Oy – точку $b = 2$, необхідно просто провести через них шукану пряму.



Для визначення кутового коефіцієнту k – тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі Ox, необхідно привести рівняння прямої до вигляду $y = kx + b$ (*рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*), де b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy:

$$2x + 3y - 6 = 0,$$

$$3y = -2x + 6,$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Звідки кутовий коефіцієнт $k = -\frac{2}{3}$, а $b = 2$.

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;-3)$ паралельно вектору $\bar{s}(1;0)$. Записати рівняння у загальному вигляді, намалювати графік функції.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно напрямному вектору $\bar{s}=(l,m)$ записується наступним чином:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Тобто у нашому випадку:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{0},$$

не потрібно лякатись нуля у знаменнику, бо це лише запис. Приведемо до загального вигляду рівняння:

$$0\cdot(x-1)=1\cdot(y+3),$$

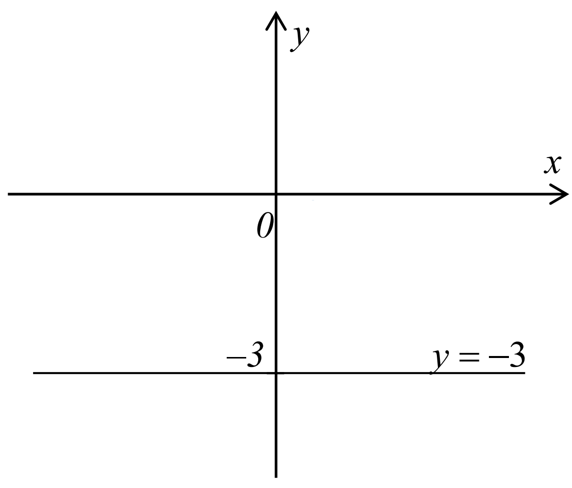
$$y+3=0,$$

тобто $A=0, B=1, C=3.$

Згадаємо, який вигляд має графік функції $y+3=0$ або, якщо перенести 3 у праву частину:

$$y=-3.$$

В декартовій системі координат на площині *Oxy* необхідно провести пряму, яка перетинає вісь *Oy* у точці $(0,-3)$, паралельну осі *Ox*:



Приклад 4. Знайти відстань між прямими l_1 і l_2, рівняння яких

$$l_1 : 3x - 4y + 5 = 0,$$
$$l_2 : 6x - 8y - 13 = 0.$$

Розв'язання

Спочатку переконаємось, що задані прямі є паралельні, і є сенс у визначенні відстані між ними. Для цього перевіримо умову паралельності прямих l_1 та l_2. Якщо $n_1 = (A_1, B_1)$, $n_2 = (A_2, B_2)$ – нормальні вектори прямих l_1 і l_2 відповідно:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.,$$

У нашому випадку $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$, тобто можна визначити відстань між паралельними прямими.

Якщо задане рівняння $Ax + By + C = 0$ прямої l і точка $M_0(x_0, y_0)$, то *відстань від цієї точки до заданої прямої* обчислюється за формулою:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оберемо точку, наприклад, на прямій l_1, поклавши у рівнянні прямої $x = 1$:

$$3 \cdot 1 - 4y + 5 = 0,$$

звідки знайдемо другу координату точки:

$$4y = 8 \Rightarrow y = 2.$$

І скористаємося формулою для обчислення відстані від точки до прямої, взявши пряму $l_2: 6x-8y-13=0$ і точку $M_0(\underbrace{1}_{x_0},\underbrace{2}_{y_0})$:

$$\rho(M_0,l_2)=\frac{|A_2x_0+B_2y_0+C_2|}{\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 2-13|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|-23|}{\sqrt{100}}=\frac{23}{10}=2{,}3.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

3.1 Задано точки $A(3,4,12)$, $B(6,8,0)$. Знайти вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, його довжину $|\vec{a}|$ та напрямні косинуси, орт $\vec{a}_0$.

3.2 У трикутнику з вершинами $A(2,-1,3)$, $B(-2,2,5)$, $C(1,2,3)$ знайти косинус кута при вершині A.

3.3 Задано вектори $\vec{a}=(2,3,0)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, $\vec{c}=(3,2,1)$. Визначити:

а) довжину вектора $\vec{a}$;

б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

г) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3.4 Знайти кут між векторами $\vec{a}=(1,-1,-1)$ і $\vec{b}=(2,0,2)$.

3.5 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;-1)$ та точку $N(-2;3)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.6 Скласти рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k=\dfrac{1}{3}$, яка проходить через точку $M_0(-1,3)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках. Побудувати графік прямої.

3.7 Скласти рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k=-1$, яка проходить через точку $M_0(2,3)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках. Побудувати графік прямої.

3.8 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;0)$ та точку $N(5;4)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.9 Записати рівняння прямої $2x+3y-6=0$ у вигляді рівняння у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.10 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1;2)$ паралельно вектору $\bar{s}(3;-1)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.11 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;1)$ паралельно вектору $\bar{s}(0;-1)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.12 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1)$, з нормальним вектором $\bar{n}(2;0)$. Записати рівняння у загальному вигляді, у відрізках, визначити кутовий коефіцієнт. Побудувати графік прямої.

3.13 Знайти відстань між прямими l_1 і l_2, рівняння яких

$$l_1 : x-y+1=0,$$
$$l_2 : 2x-2y+1=0.$$