ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Елементи теорії матриць і визначників

1.2. Визначники

Приклад 4. Обчислити визначники:

1) другого порядку $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$;

2) третього порядку $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв’язання

1) Згадаємо формулу для обчислення визначника другого порядку:

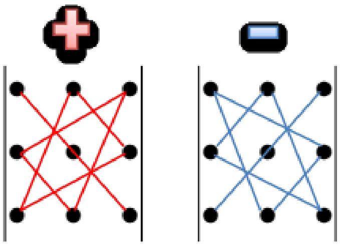
$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Звідки, за цією формулою, отримаємо:

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-4) \cdot 3 = 2 + 12 = 14.$$

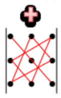
2) Для обчислення визначника другого порядку можемо використати два правила – правило трикутників або правило Саррюса. Обчислимо спочатку за одним правилом, а потім – за другим.

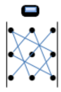
Згадаємо правило трикутників:



і обчислимо за цим правилом визначник:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-4) + 0\cdot 5\cdot 6}\; - \underbrace{0\cdot 2\cdot(-4) - 2\cdot 5\cdot 1 - (-3)\cdot(-1)\cdot 6} =$$





$$= -6 + 8 + 0 + 0 - 10 - 18 = -26.$$

Обчислимо тепер визначник за правилом Саррюса, використовуючи схему:

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad - \quad - \quad - \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \\ \quad\quad\quad\quad + \quad + \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad - \quad - \quad - \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \\ \quad\quad\quad\quad + \quad + \quad + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-4) + 0\cdot 5\cdot 6}\; - \underbrace{0\cdot 2\cdot(-4) - (-3)\cdot(-1)\cdot 6 - 2\cdot 5\cdot 1} =$$

$$= -6 + 8 + 0 + 0 - 18 - 10 = -26.$$

Як бачимо, обидва правила різняться лише візуально – схемою для запам'ятовування, тому обрання правила трикутників чи правила Саррюса для обчислення визначника третього порядку залежить лише від власного уподобання.

Задачі для практичного заняття

1.6. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 10 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

1.7. Обчислити визначники третього порядку:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$,

5) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, 7) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Приклад 5. Обчислити визначник, розклавши за елементами третього стовпця (за теоремою Лапласа):

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Згадаємо теорему Лапласа

Теорема Лапласа. *Визначник квадратної матриці n-го порядку A дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:*

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is}$$

(*розкладання за елементами i-го рядка,* $i = \overline{1,n}$);

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \cdot A_{sj}$$

(*розкладання за елементами j-го стовпця,* $j = \overline{1,n}$).

Застосуємо цю теорему до обчислення визначника четвертого порядку, розклавши за елементами третього стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

{*згадаємо, що* $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ *– це алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij}*, для його обчислення необхідно* (-1) *підвести до степені суми показників* *рядку і стовпця елемента a_{ij} та помножити на мінор елемента a_{ij}, який складається з елементів матриці А після викреслювання рядку і стовпця, на перетині яких розміщений a_{ij}}*

$$=0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1&4\\1&1&2\\5&2&0\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&2&1\\1&1&2\\5&2&0\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&2&1\\2&1&4\\5&2&0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}2&2&1\\2&1&4\\1&1&2\end{vmatrix}=-3\cdot 9-1\cdot(-3)=-24.$$

1.8. Обчислити визначники четвертого порядку:

1) $\begin{vmatrix}0&-3&4&-1\\1&-5&2&0\\0&1&0&-3\\5&6&1&-2\end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix}4&-1&0&2\\1&-6&-2&3\\-2&1&3&4\\0&-4&1&0\end{vmatrix}$.

1.3. Обернена матриця

Приклад 6. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Відразу згадаємо, що лише невироджена матриця ($|A|\neq 0$) має обернену, тому спочатку перевіримо це:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Визначник матриці A не дорівнює нулю, а значить матриця є невиродженою і має обернену A^{-1}. Знайдемо обернену матрицю двома способами, які були розглянуті в лекції.

1) Обчислимо обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

В нашому прикладі матриця розміру 2×2:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо елементи приєднаної матриці $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$. A_{11} – це алгебраїчне доповнення елемента a_{11}, тобто для його визначення необхідно $(-1)^{1+1}$ помножити на мінор елемента a_{11}. А мінор цей ми отримаємо, викресливши перший рядок і перший стовпець матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 3 = 3.$$

Обчислимо A_{12}, A_{21}, A_{22}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2;$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^{3}\cdot 2=-2;$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^{4}\cdot 1=1.$$

Звідки приєднана матриця:

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}.$$

І можна обчислити обернену:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}.$$

Перевіримо чи дійсно отримана матриця є оберненою до матриці $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$. За означенням матриця A^{-1} є оберненою до квадратної матриці *A*, якщо при множенні цієї матриці на задану як справа, так і зліва, в результаті отримуємо одиничну матрицю:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E.$$

Перевіримо:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 1+2\cdot 2&-3\cdot 2+2\cdot 3\\2\cdot 1+(-1)\cdot 2&2\cdot 2+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E,$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)+2\cdot 2&1\cdot 2+2\cdot(-1)\\2\cdot(-3)+3\cdot 2&2\cdot 2+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E.$$

Дійсно, A^{-1} є оберненою до квадратної матриці *A*.

2) Тепер знайдемо обернену матрицю шляхом елементарних

перетворень. На першому кроці до заданої квадратної матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ необхідно дописати справа одиничну матрицю того ж самого розміру:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Отриману розширену, вже прямокутну, матрицю необхідно за допомогою елементарних перетворень над рядками привести до наступного вигляду:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & b_{11} & b_{12}\\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22}\end{array}\right).$$

Зробимо ці елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & 2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

В правій частині ми отримали шукану обернену матрицю:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, обидва методи дали нам однакові результати.

Задачі для практичного заняття

1.9. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці A:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -1 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.4. Означення рангу матриці та методи його визначення

Означення. *Рангом матриці* A називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Ранг матриці A позначається $rangA$ (можна ще $r(A)$ або RgA).

Метод облямівки мінорів

1. Знайти ненульовий елемент матриці (якщо такого не існує, то ранг матриці дорівнює нулю).
2. Обчислити мінори другого порядку, які облямовують обраний елемент.
3. Якщо серед обчислених мінорів другого порядку існує відмінний від нуля, необхідно розглянути всі мінори третього порядку, які його облямовують. Продовжувати доти, поки всі мінори, які облямовують ненульовий мінор, наприклад l-го порядку, не будуть дорівнювати нулю. У цьому випадку ранг матриці дорівнюватиме l.

Приклад 7. Використовуючи метод облямівки мінорів, знайти ранг матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1&2\\1&1&-1&1&2\\2&3&0&0&4\\3&4&-1&1&6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Відразу можна побачити, що мінор, побудований на рядках з номерами 1, 2 та стовпцях 1, 2, є відмінний від нуля:

$$M=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0.$$

Розглянемо всі мінори, які облямовують обраний мінор:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1&2\\1&1&-1&1&2\\2&3&0&0&4\\3&4&-1&1&6\end{pmatrix}:$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&\mathbf{1}&-1&2\\1&1&\mathbf{-1}&1&2\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{0}&0&4\\3&4&-1&1&6\end{pmatrix}\qquad \begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\2&3&0\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&\mathbf{-1}&2\\1&1&-1&\mathbf{1}&2\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&0&\mathbf{0}&4\\3&4&-1&1&6\end{pmatrix}\qquad \begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\2&3&0\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1&\mathbf{2}\\1&1&-1&1&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&0&0&\mathbf{4}\\3&4&-1&1&6\end{pmatrix}\qquad \begin{vmatrix}1&2&2\\1&1&2\\2&3&4\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ \mathbf{-1} & 1 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & \mathbf{1} & 6 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & -1 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & \mathbf{6} \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Всі шість мінорів, які облямовують обраний ненульовий мінор другого порядку, дорівнюють нулю, тобто ранг матриці дорівнює двом:

$$rang A = 2.$$