ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Тема 1. Елементи теорії матриць і визначників

1.1. Матриці

Приклад 1. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 4 & 0\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$.

1) Чи можна додати матрицю B до матриці A?
2) Чи можна додати матрицю A до матриці D?
3) Обчислити $A+D$, $2C+A-3D$.

Розв'язання

1) Матрицю B не можна додати до матриці A, бо операція додавання можлива лише для матриць одного розміру. Розмір матриці B дорівнює 3×3 (квадратна матриця порядку 3), а розмір матриці A дорівнює 3×2 (прямокутна матриця).
2) Матриці A і D мають однаковий розмір – 3×2, отже, їх можна додавати.
3) $A+D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -2\\ 7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 0-3\\ -3+6 & 2-2\\ 4+7 & -5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & 0\\ 11 & -5\end{pmatrix}$;

$$2C + A - 3D = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 18 & -6 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1-12 & 4+0+9 \\ 8-3-18 & -6+2+6 \\ -4+4-21 & 2-5-0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 13 \\ -13 & 2 \\ -21 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задачі для практичного заняття

1.1. Задані матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & -3 \\ 8 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Які матриці можна додавати одну до одної?
2) Обчислити $3A + D$, $B - 2C$.

1.2. Обчислити $-2A + 3B - C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

1) Які матриці узгоджені, а які ні?
2) Помножте узгоджені матриці.

Розв'язання

1) Визначимо, які матриці є узгоджені, а які ні. Порахуємо розміри заданих матриць: $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$. Звідки отримаємо, що:
   - $A_{2\times\underline{3}}$ узгоджена з $B_{\underline{3}\times1}$,
   - $A_{2\times\underline{3}}$ узгоджена з $C_{\underline{3}\times3}$,
   - $B_{3\times\underline{1}}$ не узгоджена з $A_{\underline{2}\times3}$,
   - $B_{3\times\underline{1}}$ не узгоджена з $C_{\underline{3}\times3}$,
   - $C_{3\times\underline{3}}$ не узгоджена з $A_{\underline{2}\times3}$,
   - $C_{3\times\underline{3}}$ узгоджена з $B_{\underline{3}\times1}$.

2) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -4 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)+(-3)\cdot(-2)+0\cdot3\\ -4\cdot(-4)+5\cdot(-2)+2\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4+6+0\\ 16-10+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 12\end{pmatrix};$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -4 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+0\cdot 3 & 1\cdot 1+(-3)\cdot 0+0\cdot(-4) & 1\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2)+0\cdot 5\\ (-4)\cdot 2+5\cdot(-1)+2\cdot 3 & (-4)\cdot 1+5\cdot 0+2\cdot(-4) & (-4)\cdot(-3)+5\cdot(-2)+2\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+3+0 & 1+0+0 & -3+6+0\\ -8-5+6 & -4+0-8 & 12-10+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ -7 & -12 & 12\end{pmatrix};$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-4)+1\cdot(-2)+(-3)\cdot 3\\ (-1)\cdot(-4)+0\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\\ 3\cdot(-4)+(-4)\cdot(-2)+5\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-8-2-9\\ 4+0-6\\ -12+8+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\ -2\\ 11\end{pmatrix}.$$

Задачі для практичного заняття

1.3. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1) Які матриці узгоджені, а які ні?
2) Помножте узгоджені матриці.

1.4. Обчислити добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Приклад 3. Запишіть матрицю, транспоновану відносно матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -2 & 4 & -7 \\ -4 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для того, щоб записати матрицю, транспоновану відносно заданої матриці A, необхідно просто замінити в заданій матриці всі рядки відповідними за номерами стовпцями (або, що те ж саме, зробити дзеркальне відображення елементів відносно головної діагоналі, а елементи головної діагоналі залишити без змін), тобто:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -2 & 4 & -7 \\ -4 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -9 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задачі для практичного заняття

1.5. Запишіть матрицю, транспоновану відносно заданої матриці:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 8\\ 5 & 9 & -1\\ 3 & 0 & -4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 5 & -8\\ -3 & 5 & 7 & 6\\ 4 & -8 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$