

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

Малярець Л. М.

**ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
ТА МОДЕЛІ**

Навчальний посібник

Харків. Вид. ХНЕУ, 2014

УДК 330.42(075.8)

ББК 65В6Я73

М21

Рецензенти: докт. екон. наук, професор, завідувач кафедри математики і математичних методів економіки Донецького національного університету *Христіановський В. В.*; докт. екон. наук, проректор з підготовки наукових кадрів Східноєвропейського університету економіки і менеджменту м. Черкаси
Ус Г. О.

Затверджено на засіданні вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.

Протокол № 9 від 22.04.2014 р.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

(лист № 1/11-10085 від 02.11.2010 р.)

Малярець Л. М.

М21

Економіко-математичні методи та моделі : навчальний посібник / Л.М. Малярець. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2014. – 405 с. (Укр. мов.)

Подано матеріал, який систематизує математичні методи розв'язання оптимізаційних та економетричних задач й економіко-математичні моделі. Наведено реальні економічні задачі, у ході розв'язання яких має місце розвиток економіко-математичних методів.

Рекомендовано для використання студентами у процесі неперервної математичної підготовки, магістрам, аспірантам для проведення наукових досліджень за допомогою економіко-математичних методів і моделей, економістам-практикам для обґрунтування та ухвалення управлінських рішень.

ISBN

УДК 330.42(075.8)

ББК 65ВЯ73

© Харківський національний
економічний університет
імені Семена Кузнеця, 2014
© Малярець Л. М.

Вступ

Сьогодні характерною особливістю розвитку інструментів дослідження соціально-економічних процесів і явищ на різних рівнях їх управління є інтенсивне поширення математичних методів та моделей. Вони складають фундаментальну основу вирішення реальних аналітичних завдань у всіх сферах діяльності суб'єктів господарювання.

Відомий фахівець з економетрії Е. Маленво так визначив важливість моделей: «Усі науки використовують моделі. Кожна виділяє деякі явища, основні закони яких вона і вивчає. Виходячи з них, вона зменшує складність дійсних ситуацій, спрощує їх, щоб мати можливість застосувати два або три закони, які здаються нам більш важливими для вивчення проблеми. Ізолювання явища і застосування до нього абстрактної формалізації становлять вихідну точку будь-якого наукового методу»[18, с. 49].

Усе це підкреслює важливість і необхідність викладання навчальної дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі» для формування компетентностей майбутніх економістів, аналітиків у процесі підготовки бакалаврів і магістрів.

Метою створення даного навчального посібника є допомога студентам, які навчаються на різних напрямках підготовки галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво», у вивченні двох нормативних дисциплін: «Оптимізаційні методи та моделі» і «Економетрика», об'єднаних під загальною назвою «Економіко-математичні методи та моделі». У процесі вивчення цих дисциплін студенти набудуть компетентності використання методів оптимізації, а саме методів математичного програмування, економетричних методів для розробки оптимізаційних та економетричних моделей для вирішення реальних економічних завдань на всіх рівнях управління.

Навчальний посібник створено відповідно до чинної міністерської програми навчальної дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі» для бакалаврів галузі знань «Економіка і підприємництво».

Відмінною особливістю даної роботи є виклад матеріалу, зміст і обсяг якого відповідає лекціям з нормативних дисциплін «Оптимізаційні методи та моделі» і «Економетрика», при цьому теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю демонстраційних прикладів та прикладів з вирішення

реальних завдань в економіці за допомогою математичних методів і питаннями для самоперевірки. У деяких темах приклади представлені розв'язання реальних економічних задач з аналізом проблем, які зустрічаються в різних умовах визначеності і невизначеності зовнішнього та внутрішнього середовища діяльності підприємств, фірм.

Навчальний посібник містить узагальнений матеріал із 16 тем навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» і 16 тем навчальної дисципліни «Економетрика». Основними темами навчального посібника є: концептуальні аспекти математичного моделювання в економіці; задача лінійного програмування і методи її вирішення; симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування і деякі його теоретичні аспекти; теорія двоїстості, взаємно двоїсті задачі лінійного програмування; економічна інтерпретація двоїстих невідомих, двоїстий симплекс-метод; аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач; транспортна задача; задача дробово-лінійного програмування; цілочислові задачі лінійного програмування; методи нелінійного програмування; квадратичне програмування; теорія ігор, основні методи їх розв'язання та аналізу; динамічне програмування; парна регресія і кореляція в економетричних дослідженнях; перевірка якості рівняння регресії; лінійні моделі множинної регресії; оцінка надійності загальної багатофакторної лінійної моделі; мультиколінеарність, її наслідки та методи усунення; гетероскедастичність та методи її визначення, узагальнений метод найменших квадратів; автокореляція залишків моделі та методи її усунення; проблеми інтерпретації параметрів багатофакторної моделі; узагальнені схеми регресійного аналізу; системи одночасних рівнянь; динамічні економетричні моделі; моделювання одновимірних часових рядів; моделювання тенденції часового ряду.

Таким чином, набуті студентами в результаті вивчення викладеного матеріалу знання, навички, вміння формування оптимізаційних та економетричних задач та моделей в економіці, обґрунтування методів їх розв'язування, аналіз отриманих результатів складають фундамент компетентностей сучасного економіста.

Розділ 1. Оптимізаційні методи та моделі

1. Концептуальні аспекти математичного моделювання в економіці

- 1.1. Вирішення проблем аналізу даних в економіці на основі економіко-математичного моделювання.**
- 1.2. Загальна технологія визначення величин ознак в економіці.**
- 1.3. Зміст і принципи моделювання.**
- 1.4. Основні типи моделей.**
- 1.5. Етапи економіко-математичного моделювання.**

1.1. Вирішення проблем аналізу даних в економіці на основі економіко-математичного моделювання

У сучасних умовах науково-технічного розвитку в усіх сферах діяльності людини стало аксіомою прийняття рішення на основі аналізу даних. Метою аналізу даних є вивчення властивостей об'єктів, явищ та процесів, отримання нових знань про них для більшого підпорядкування.

Сучасний аналіз даних обумовлюється способами отримання величин, методами їх обробки й залежить від розвитку математичних методів і моделювання. Це твердження доведено теорією і практикою.

Наразі методи аналізу даних мають підґрунтям методи математичної статистики, еволюційне моделювання та методи машинного навчання. Сучасний розвиток методів математичної статистики відображається в удосконаленні оцінювання параметрів розподілу величин, перевірці статистичних гіпотез, дисперсійному аналізі, кореляційному аналізі, регресійному аналізі, аналізі часових рядів, багатовимірному статистичному аналізі (БСА). Еволюційне моделювання передбачає використання генетичних алгоритмів, штучних нейронних мереж (ART-мереж, мереж зворотного розповсюдження, мереж зустрічного розповсюдження, мереж Хеммінга, мереж Хопфілда, мереж Кохонена, RBF-мереж). Машинне навчання будується на деревах рішень і використанні ентропійної міри.

Для здійснення автоматичного аналізу даних розроблені сучасні методики, наприклад Data Mining (здобування даних). Методики Data Mining сформовані як синтез методів статистики, теорії інформації, машинного навчання, теорії баз даних. Добування даних визначається як процес аналітичного дослідження великих масивів інформації з метою виявлення закономірностей і систематизації взаємозв'язків між змінними, які потім можна використати для нових даних. Здобування даних як процес включає три основних етапи: дослідження, побудови моделі та її перевірки, що є традиційними для економіко-математичного моделювання.

Проте серед методів аналізу даних пріоритетне місце залишається за методами статистичного аналізу, оскільки вони універсальні, тобто можуть застосовуватися в різних сферах діяльності людини. В економіці пріоритетне місце в аналізі даних займають економетричні методи та методи оптимізації. Але, перш ніж розробляти модель слід отримати величини, тобто їх виміряти. Тут маємо, на перший погляд, протиріччя: величина для моделі, чи модель для отримання величин. Тому й потрібно було уточнити методологічні основи вимірювання величин в економіці. В роботі [19] представлені методологічні основи вимірювання ознак об'єктів в економіці. Підґрунтям для формування цілісних концептуальних основ вимірювання в економіці стали процедури в економіці такі, як: квантифікація, формалізація, моделювання, шкалювання, оцінка, зміст яких цілісно пов'язується зі змістом процесу вимірювання. Конструкція концепції визначення величин ознак зведена на фундаменті триєдиної основи: концепції величин в економіці, умов їх отримання й системи вимірників за допомогою адекватних математичних методів та моделей; схематично це наведено на рис. 1.1 [19]. Названі фундаментальні складові розглядаються як ті, що утворюють базис теорії вимірювання в економіці сьогодні.

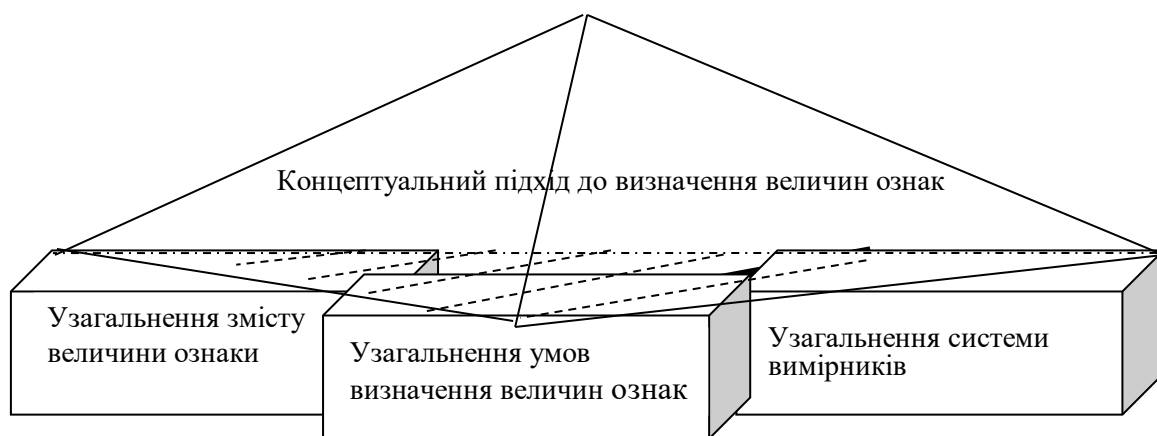


Рис. 1.1. Базис концепції визначення величин в економіці

Для реалізації процесу визначення величин потрібні принципи, постулати його здійснення. Сформована система таких принципів, що методологічно забезпечує технологію вимірювання ознак об'єктів в економіці та фундує теорію, наведена в табл. 1.1. Дієвість наведених принципів залежить від дотримання постулатів у вимірюванні в економіці. Наведені постулати та принципи надають об'єктивності та фундаментальності методології моделювання соціально-економічних систем, забезпечують обґрунтованість концепцій та формують змістовність отриманих практичних результатів визначення величин в аналізі даних.

1.2. Загальна технологія визначення величин ознак в економіці

Для визначення величини ознаки потрібно попередньо вивчити дану ознаку. На першому рівні пізнання вивчаються фізичні ознаки об'єкта, оскільки існує можливість емпірично виміряти фізичну величину; на другому рівні пізнання змістовно уточнюється ознака, вимірюється вартісна форма ознаки, аналізується взаємозв'язок її з іншими ознаками об'єкта (фізичними та нефізичними) й вимірюються його складні ознаки; на третьому рівні вимірюється загальна якість ознак об'єкта, яку можна розглядати як загальну якість об'єкта. В табл. 1.1 наведене розширення даного переходу в економіці.

Таблиця 1.1

Конкретизація поняття фізичної величини в економіці

Філософські	Елементи, що	Властивості (ознаки) об'єкта та знання про них
-------------	--------------	--

категорії	беруть участь у вимірюванні	Загальні	Форма існування в економіці
Непізнана реальність	Фізичний об'єкт	Апріорні ознаки фізичного об'єкта	Апріорні ознаки фізичного об'єкта в економіці
Пізнана реальність	Об'єкт дослідження	Фізична величина X	Абсолютний показник фізичних ознак об'єкта
Фізичні засоби	Контрольно-вимірювальні прилади	Одиниці фізичної величини	Натуральна форма – кількість – шт.
Знання про реальність	Інформація	Значення фізичної величини $X = \{X\} [X]$	Форма величини фізичної ознаки – вартісний показник. Числове значення показника, одиниці його вимірювання

Існування різних видів величин обумовлює розмежування прямого первинного вимірювання, опосередкованого (непрямого), сумісного та сукупного. Виділені типи вимірювання можна розглядати як процедури технології визначення величин. Первинно вимірюють (за спробами) фізичні й нефізичні величини елементарних ознак об'єкта. Опосередковане (непряме) вимірювання, або його ще називають похідним, маємо, коли вимірюють інтенсивні величини, одержані за допомогою відношення двох екстенсивних та в разі обчислення функції, що залежить від однієї змінної, у ході підстановки екстенсивного аргументу, визначеного в результаті прямого вимірювання.

У цілому ж величини в економіці розділяються на такі групи: основні фізичні величини елементарних ознак, що на даному рівні пізнання можуть квантифікуватися (екстенсивні); похідні фізичні величини, що отримані за допомогою відношення основних фізичних величин. У цій групі можна окремо виділити величини, котрі мають розмірність (у фізичних одиницях), це в основному величини, які отримані як зіставлення результату та витрат, і величини, що не мають розмірності, – це коефіцієнти (інтенсивні); нефізичні величини, а саме метричні величини, що одержані з фізичних за рахунок вартісної форми подання та зіставлення таких величин; утворені, синтезовані метричні величини, що визначають складні ознаки та об'єкт у цілому; статистичні метричні величини, що відображають масові ознаки сукупностей об'єктів в економіці (екстенсивні та інтенсивні); неметричні величини, що

відображають якісні ознаки об'єктів в економіці (інтенсивні, якісні); в основному вони вимірюються на неметричних шкалах. У загальному вигляді відповідна система величини наведена на рис. 1.2.

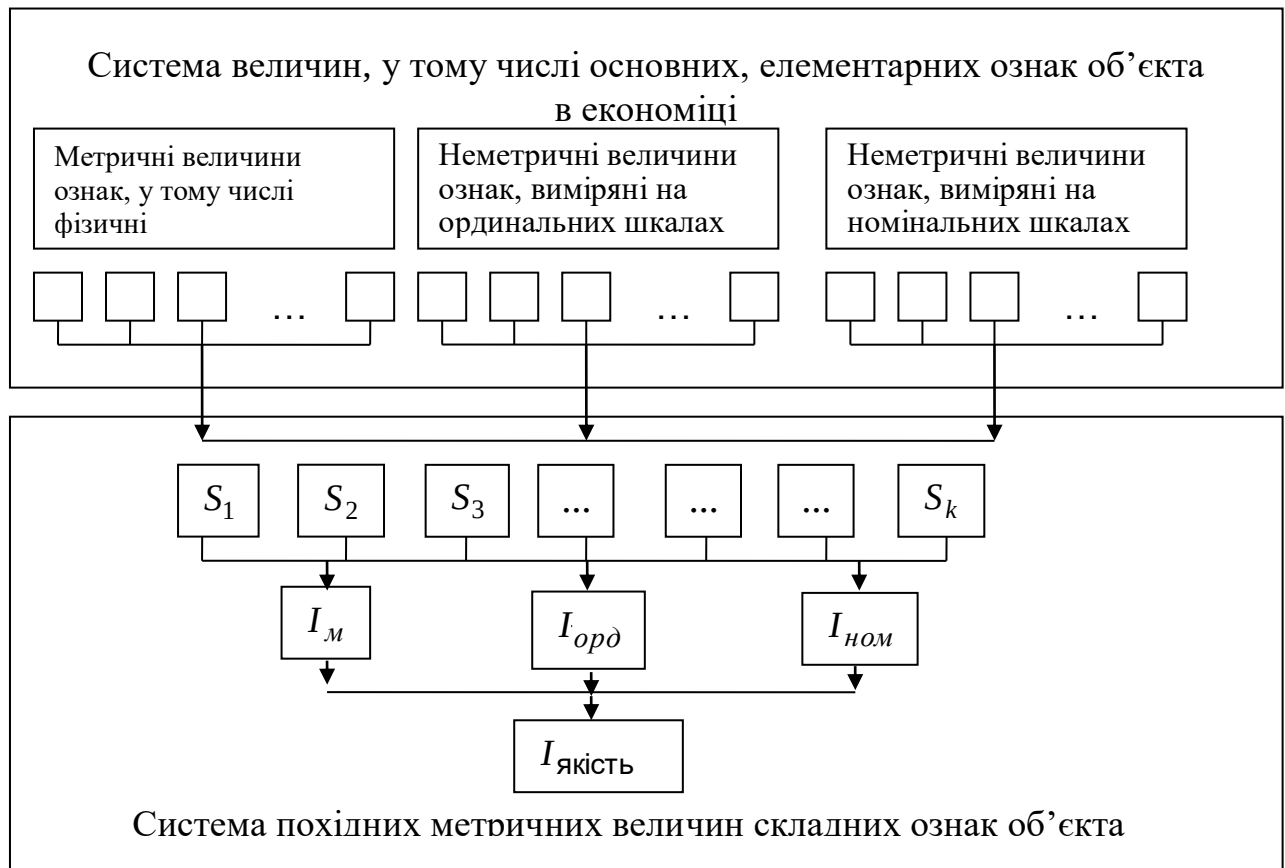


Рис. 1.2. Система величин в економіці

Згідно зі змістом величин в економіці доцільно спочатку виділяти етапи визначення величин, що групуються в п'ять процедурних блоків: процедуру постановки; процедуру підготовки; первинне вимірювання; вторинне вимірювання; процедуру контролю за похибками вимірювання (рис. 1.3). Дані процедури різні за змістом та трудомісткістю. Лише третя процедура передбачає безпосереднє вимірювання, оскільки тут відбувається операціоналізація вимірювання. Решта процедур формують умови проведення операціоналізації й одержання результату вимірювання – величини з необхідною точністю. Від правильного виконання даних процедур залежить

достовірність визначення величин в аналізі даних, а отже, якість управлінського рішення, що розробляється на його основі.

Схема основних етапів технології визначення величин ознак в економіці	Зміст етапу технології
	1. Аналіз мети визначення величини ознаки об'єкта
	2. Складання когнітивної моделі
	3. Складання змістовної моделі
	4. Розробка концептуальної моделі
	5. Апріорне визначення ознак об'єкта як соціально-економічної системи
	6. Визначення виду ознаки: елементарна чи складна
	7. Визначення виду величини: метрична чи неметрична
	8. Уточнення виду метричної величини
	9. Вибір методу вимірювання, можливих засобів вимірювання
	10. Попередній вибір алгоритму обробки даних
	11. Апріорне оцінювання похибок вимірювання
	12. Вибір системи вимірювання
	13. Визначення типу неметричної величини та шкали вимірювання
	14. Перевірка шкали на досконалість
	15. Реалізація технічної операції вимірювання
	16. Формування метричної величини в показник
	17. Надання неметричній ознаці форми величини
	18. Визначення однорідності величини ознаки
	19. Вибір методу одержання показника
	20. Формування концептуальної моделі складної ознаки
	21. Розробка математичної моделі складної ознаки
	22. Сукупне вимірювання метричних і неметричних величин складної ознаки
	23. Формування величини складної ознаки в узагальнюючий показник
	24. Формування системи вимірників
	25. Аналіз отриманих результатів визначення на предмет методологічних похибок
	26. Аналіз отриманих результатів визначення на предмет методичних похибок
	27. Аналіз отриманих результатів визначення на предмет технічних похибок
	28. Аналіз отриманих результатів визначення на предмет особистісних похибок
	29. Усунення похибок
	30. Звіт про результати визначення величини з показником похибок та перехід до нового, глибшого

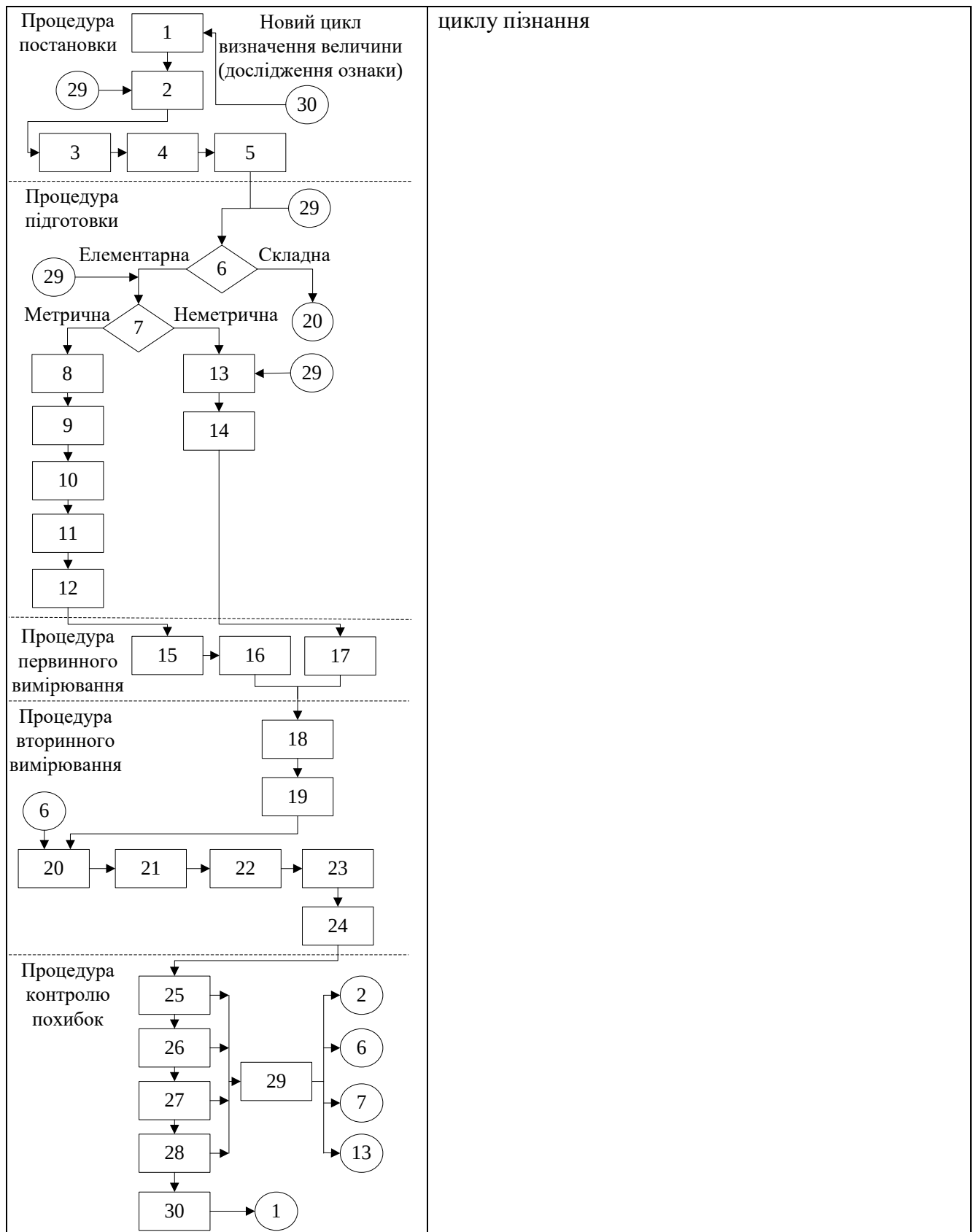


Рис. 1.3. Схема основних етапів технології визначення величин ознак в економіці

Запропонована схема етапів визначення величини ознаки організовує даний процес та є єдино можливою. Залежно від мети визначення величини

окремі етапи загальної технології можуть бути відсутніми, але логіка в послідовності дій у скороченій схемі зберігається. Комплекс математичних методів може бути різний залежно від визначення конкретного типу ознаки. Таким чином, економіко-математичні методи і моделі створюють умови для визначення величин ознак СЕС, з іншого боку, дотримання технології визначення величин є підґрунтям адекватності побудованих моделей. Маємо суперечність, яка вирішується за допомогою взаємного дотримання означених вимог у реалізації технології і моделювання. Рекомендована структура розширених умов одержання результатів визначення ознак соціально-економічних систем подана в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Складові визначення ознак соціально-економічних систем

Тип визначення	Об'єкт визначення	Спосіб знаходження величини	Форма результату визначення
Первинне вимірювання:			
пряме	Фізичні елементарні ознаки об'єкта, нефізичні величини	Операціоналізація	Фізичні величини, абсолютні натуральні показники. Нефізичні величини, вартісні показники
похідне; опосередковане	Метричні елементарні ознаки; неметричні елементарні ознаки	Безпосереднє обчислення на основі використання законів в економіці; вимірювання в неметричних шкалах	Відносні показники, номінації, порядкові величини, назви
Вторинне вимірювання:			
опосередковане	Складні ознаки об'єкта	Моделі з однією змінною; моделі з багатьма змінними; математичні методи	Показники, вимірники
сукупно-сумісне	Складні ознаки	Моделі з багатьма змінними; математичні методи	Показники, вимірники

Нові величини ознак — вимірники — отримуються за допомогою моделювання й мають принципове значення для економіки; важлива їх роль в самій методології математичного моделювання.

1.3. Зміст і принципи моделювання

Сучасним основним методом дослідження будь-яких систем є метод моделювання, а саме спосіб теоретичного аналізу і практичних дій, спрямований на розробку і використання моделей. Сьогодні багатьма вченими вважається, що розвиток будь-якої науки можна трактувати в загальному сенсі як теоретичне моделювання. Особливе значення набувають моделі у вивченні закономірностей масових процесів, які недоступні безпосередньому спостереженню і не підлягають експериментуванню. Це відноситься, перш за все, до процесів та явищ в економіці, які формуються і розвиваються під впливом нескінченної кількості взаємопов'язаних факторів і за своєю складністю переважають над технічними, хімічними та ін.

У загальному розумінні модель використовується як умовний образ, сконструйований для спрощення реального об'єкта в процесі його вивчення. Під час розробки моделей дотримуються основних методологічних принципів: адекватності, динамізму й евристичності. Принцип адекватності висловлює матеріальна вимога до процесу моделювання: необхідність об'єктивної відповідності моделі оригіналу як умова об'єктивної істинності знання. На відміну від принципу адекватності, принцип динамізму вказує на мінливість всіх основних елементів процесу моделювання: у процесі змінт цілей дослідження, зміни об'єкта, модель повинна пристосовуватися до нових умов і завдань. Принцип заміщення стверджує посередницьку функцію моделі в дослідженні. Особливо важливо це тоді, коли можна провести модельний експеримент. Принцип евристичності націлює на розширене відтворення знань. Цими методологічними принципами керуються під час розробки моделей різних типів.

Математичне моделювання є ідеальним науковим знаковим формалізованим моделюванням, за якого опис об'єкта здійснюється мовою математики, а дослідження моделі виконується за допомогою математичних методів.

1.4. Основні типи моделей

На разі немає загальноприйнятої класифікації моделей. Розрізняють: матеріальні; знакові моделі, а саме графічні та математичні; матеріально-ідеальні. Існує багато визначень математичної моделі. Згідно з математичною енциклопедією «модель – інтерпретація формальної мови» [37, т. 3, с. 770]. Й

далі: «математична модель – наближений опис якого-небудь класу явищ зовнішнього світу, виражений за допомогою математичної символіки» [37, т. 3, с. 574].

Також під математичною моделлю прийнято розуміти сукупність співвідношень – рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів і т. д., що визначають характеристики стану об'єкта моделювання, параметри функціонування і розвитку його. Ще математична модель визначається як гомоморфне відображення у вигляді впорядкованої сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відносин, графіків, умовний образ об'єкта, складений для спрощення його дослідження.

В економіці найчастіше використовується економічно-математична модель. Вона виражає економічну систему за допомогою формально-математичних термінів, логічна структура якої визначається як об'єктивними властивостями, так і суб'єктивним цільовим чинником дослідження, для якого цей вираз здійснюється. Економіко-математичне моделювання має зворотний вплив на дослідника, вимагаючи від нього чіткості формулювання дослідницьких завдань, суворості логічності у побудові гіпотез і концепцій.

Економіко-математичні моделі класифікуються:

за способом відображення дійсності: аналогові, концептуальні, структурні, інформаційні, функціональні;

за ознакою цільового призначення: теоретико-аналітичні, прикладні;

щодо практичного призначення: балансові, дескриптивні, імітаційні, рівноваги, нерівноваги, прескриптивні, оптимізаційні;

за способом логіко-математичного опису економічних систем: аналітичні, імовірнісні, детерміновані, лінійні, нелінійні, математико-статистичні, матричні, економетричні;

за тимчасовими і просторовими ознаками: динамічні, статичні, точкові, трендові;

за внутрішньою структурою модельного опису системи: автономні, глобальні, закриті, відкриті, комплекс моделей, макроекономічні, мікроекономічні, багатосекторні, одно-, багатопродуктові;

за областю використання: за типом економічних завдань, за видом математичного методу, застосованого під час розробки моделей.

На мікрорівні, наприклад, на рівні підприємств, у вирішенні реальних економічних завдань найчастіше в економіко-математичному моделюванні використовуються економетричні, оптимізаційні та балансові моделі. Математико-статистичні моделі передбачають застосування інструментів математичної статистики. Оптимізаційні моделі охоплюють деяку кількість варіантів виробництва, розподілу і споживання і призначена для вибору таких значень змінних, що характеризують ці варіанти, щоб був знайдений кращий з них [35, с. 356]. Відмінною рисою цих моделей є те, що вони містять як рівняння, що описують взаємозв'язки між змінними, так і критерії для вибору – функціонал або цільову функцію. Дані моделі відносяться до класу екстремальних завдань і описують умови функціонування економічної системи.

Опис кількісних взаємозв'язків між ознаками здійснюють економетричні моделі. Згідно з економіко-математичним енциклопедичним словником економетрика (економетрія) – наукова дисципліна, що дозволяє на основі положень економічної теорії та результатів економічного вимірювання надавати конкретні кількісні вирази загальним (якісним) закономірностям, обумовленим економічною теорією. Економетричні моделі визначаються як економіко-математичні моделі, параметри яких оцінюються за допомогою методів математичної статистики. Економетрична модель як засіб аналізу і прогнозування конкретних економічних процесів як на макро-, так і на мікроекономічному рівні на основі реальної статистичної інформації.

Типовими економетричними моделями є виробничі функції, що виражають взаємозв'язок між витратами та результатами діяльності економічних систем; моделі функціонування національної економіки; типологізація об'єктів і поведінки агентів (країн, регіонів, фірм, споживачів); цільові функції споживчої переваги і функції попиту; моделі розподільних відносин у суспільстві; моделі ринку й економічної рівноваги; моделі інтернаціоналізації національних економік; моделі міжрегіонального аналізу та між державами та ін. Спираючись на класифікацію завдань, що вирішуються за допомогою економетрики, а саме виділення за кінцевими прикладними цілями, за рівнем ієрархії і за профілем аналізованої економічної системи, розрізняють прогнозні економетричні моделі, імітаційні, моделі макро-, мезо- та мікрорівня, моделі, в яких зосереджено увагу на окремих проблемах економічних систем.

Балансові моделі представляють систему балансів виробництва і розподілу продукції і записуються у формі квадратних матриць. Балансові моделі служать для встановлення пропорцій і залежностей у процесі планування різних галузей економіки.

У цілому економіко-математичні моделі розробляються для досягнення трьох цілей; кращого розуміння об'єктивної реальності; розробки раціонального варіанту дій, а також для вибору оптимальних рішень в практичній діяльності.

1.5. Етапи економіко-математичного моделювання

Якщо в моделюванні керуватися правильною методикою, то розроблені моделі будуть адекватні реальному об'єкту, допустимі з точки зору обчислювальних процедур, а сам процес моделювання – ефективним і обґрунтованим. У такому випадку моделювання досягає мети.

Процес математичного моделювання узагальнено представляється чотирма етапами. За першим етапом формулюються закони, що зв'язують основні об'єкти моделювання. На другому етапі відбувається дослідження математичних задач, до яких приводить математична модель. Третій етап полягає у з'ясуванні, чи задовольняє прийнята (гіпотетична) модель критерію практики, тобто вияснення питання про те, чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень. На четвертому етапі виконується наступний аналіз моделі у зв'язку з накопиченням даних про явища, що вивчаються, та модернізація моделі [37, т. 3, с. 574].

Економіко-математичне моделювання можна розглядати як послідовну логіку взаємопов'язаних етапів: визначення мети моделювання, аналіз сформульованої проблеми і розробка концептуальної моделі; побудова математичної моделі та її аналіз; підготовка висхідних даних; чисельне рішення моделі; аналіз числових результатів на несуперечність з концептуальною моделлю та за необхідністю удосконалення моделі; використання моделі для обґрунтування управлінського рішення [23; 32].

Мету моделювання слід формулювати виходячи з сутності проблеми дослідження. Тому спочатку формуються гіпотези, що пояснюють поведінку і розвиток модельованого об'єкта, а також прогнозують цілі, які будуть змінювати в часі.

На етапі аналізу сформульованої проблеми і розробки концептуальної моделі передбачається виділення меж економічної системи, її структуризація. Під структурою економічної системи розуміють її статичне уявлення в розрізі матеріальних і нематеріальних елементів, які забезпечують її форму й організованість. Процес логічного поділу великої проблеми на окремі елементи передбачає отримання об'єктивного управлінського рішення, прийнятого на основі економіко-математичної моделі. Призначення концептуальних моделей – змістовно представляти суттєві властивості об'єкта і головні зв'язки між цими властивостями.

На етапі побудови математичної моделі здійснюється формалізація концептуальної моделі. Математична формалізація позначає, що відпрацьовані конкретні правила дій, концептуальні положення, адекватні цілям дослідження і прийнятій системі гіпотез, здійснюється глибинний зв'язок між математичним інструментом, предметом дослідження і дослідником. Етап математичного аналізу моделі пов'язаний з тим, що математичними прийомами дослідження виявляються загальні властивості моделі та її рішень, при цьому важливим моментом є доказ існування рішення сформульованої задачі.

На етапі підготовки вихідних даних передбачається вимірювання ознак об'єкта, які є його основними властивостями і відображення величин в системі показників. Інформаційною моделлю в економіко-математичному моделюванні вважають ієрархічну систему показників, що відображають ознаки об'єкта.

На етапі чисельного рішення моделі використовують існуючі програмні засоби, прикладні пакети, розробляються спеціальні обчислювальні програми для реалізації моделі. Обчислення можуть мати різноманітний характер для вивчення поведінки моделі у різних умовах і обмеженнях.

Аналіз числових результатів та їх використання містять перевірку правильності та повноти результатів моделювання та використання в практичній діяльності, а також для вдосконалення самої моделі. На цьому етапі слід виконати верифікацію (перевірку правильності структури, логіки моделі) і валідацію моделі (перевірку відповідності даних, отриманих на основі моделі, реальному процесу). У випадку виявлення помилки, неточностей слід вияснити причину та повернутися на попередні етапи для удосконалення.

Етап використання результатів моделювання для прийняття управлінського рішення складається з якісного аналізу отриманих результатів,

які не тільки представляються формулами, але і для наочності зображуються у вигляді графіків, таблиць, схем.

Окремо слід вказати, що кожен етап моделювання доцільно супроводити оцінкою отриманих результатів для своєчасного усунення виявлених помилок. Найтиповішими помилками є включення в модель несуттєвих для даної задачі змінних, не включення в модель істотних змінних, низька точність оцінок параметрів моделі, недоліки в структурі моделі, що призводить до неправильної специфікації моделі. Процес моделювання має циклічний характер і, починаючи моделювання об'єкта з розробки простої моделі переходять до розробки складних моделей, вдосконалення їх за допомогою урахування нових умов і уточнення математичних залежностей.

У математичному моделюванні розрізняють такі види контролю: контроль характеру залежностей, контроль екстремальних ситуацій, контроль граничних умов, контроль математичної замкнутості. За допомогою контролю характеру залежностей перевіряється напрямок і швидкість змін одних ознак у разі зміни інших.

У цілому процес економіко-математичного моделювання можна розглядати як послідовність розроблення моделей: когнітивної, змістовної моделі (описової, що пояснює, передбачувальної), концептуальної моделі (логіко – семантичної, структурно – функціональної, причинно – наслідкової), формалізованої моделі (математичної та інформаційної). Когнітивною прийнято називати модель, що сформована в голові дослідника як деякий уявний образ. Представлення когнітивної моделі звичайною мовою є змістовною моделлю. Концептуальною моделлю називають змістовну модель, у процесі формування якої використовують поняття і уявлення предметної галузі знань, до якої належить об'єкт моделювання. Формалізована модель є представленням концептуальної моделі за допомогою однієї або декількох формальних мов.

У процесі розроблення різних економіко-математичних моделей дотримуються загальної технології економіко-математичного моделювання. Так процес розроблення оптимізаційної моделі в економіці в загальному вигляді може складатися з чотирьох етапів: формулювання проблеми; безпосередня побудова моделі; знаходження оптимального модельного розв'язку; перевірка адекватності моделі [30, с. 18 – 19]. До першого етапу

відноситься формулювання мети дослідження, виявлення можливих альтернатив розв'язання, визначення властивих системі, що досліджується, вимог, умов, обмежень. На другому етапі встановлюються параметри, що управляються, кількісні співвідношення для виразу цільової функції і обмежень у вигляді функцій для параметрів, що управляються. На третьому етапі розв'язується сформульована задача, знаходиться оптимальний розв'язок, проводиться аналіз на чуттєвість, який покаже можливість змінити розв'язок при зміннюванні числових значень параметрів системи. На четвертому етапі проводиться перевірка адекватності моделі.

Процес побудови економетричної моделі об'єкта в економіці, що є економічною системою, має свої особливості, що виражаються в послідовності таких етапів [20, с. 17-23; 27, с. 13-14]:

- 1) аналіз характерних ознак економічної системи і процесів, обґрунтування відповідної системи показників і її структури взаємозв'язків, визначення класу моделей, найбільш відповідних реальному об'єкту для його опису;
- 2) формування сукупності спостережень – вихідних даних для моделювання, які є тимчасовими, просторовими і просторово-часовими вибірками;
- 3) перевірка однорідності і точності вихідних даних;
- 4) оцінка параметрів обраної форми моделі на основі вихідних даних;
- 5) перевірка якості обчисленої моделі на основі статистичних критеріїв та висновки щодо її використання для подальшого економетричного дослідження;
- 6) прогнозування показників в економіці на основі моделі.

Запитання для самоперевірки:

1. Які основні методологічні принципи моделювання?
2. Яка основна суть кожного методологічного принципу моделювання?
3. Дайте визначення математичної моделі.
4. Які основні типи моделей?
5. Як класифікуються економіко-математичні моделі?
6. Які особливості оптимізаційних моделей?
7. Які особливості економетричних моделей?
8. З яких етапів складається побудова економетричних моделей?

9. З яких етапів складається технологія економіко-математичного моделювання?

10. Яка модель називається когнітивною?

11. Яка модель називається змістовною?

12. Яка модель називається концептуальною?

13. Яка модель називається формалізованою?

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі

2.1. Класифікація оптимізаційних задач.

2.2. Основи класичної теорії оптимізації.

2.3. Загальна постановка задачі оптимізації.

2.4. Класична задача умовної оптимізації. Формулювання задачі.

2.5. Метод множників Лагранжа.

Велику групу математичних методів в економіці утворюють оптимізаційні методи, оскільки перед менеджерами, економістами, працівниками системи управління, інженерами різного рівня виникають проблеми прийняття рішення, які вимагають оптимізації результатів різних видів діяльності з урахуванням наявних ресурсів. Існує спеціальна теорія прийняття рішення, що має економічні, психологічні, політичні, соціальні, фінансові та інші аспекти, враховуючи які слід шукати найкращі рішення. Алгоритмізація процесу розробки моделі передбачає використання різних математичних методів для пошуку найкращого рішення. Ці методи поділяються на методи лінійної та нелінійної оптимізації.

Типовими оптимізаційними завданнями є задачі оптимального планування, в яких виділяють змінні і параметри (кількість купованих продуктів, кількість виробленої продукції, кількість перевезеного вантажу), ціль, яку бажають досягти (функція цілі) і яку слід оптимізувати (мінімізувати витрати на споживання, максимізувати прибуток підприємства, мінімізувати вартість перевезень) і обмеження, тобто умови, що обмежують можливості досягнення бажаної цілі (в раціоналі повинні бути визначені компоненти, обмежені ресурси підприємства, кількість перевезеного товару). Цільова

функція має сенс очікуваної «цінності» або «корисності». Задача оптимального планування також називається оптимізаційною або екстремальною задачею.

У задачах оптимізації можуть бути виділені характеристики об'єкта (об'єктів), якими можна або треба варіювати для досягнення цілі. Такі характеристики називаються керованими змінними або керованими параметрами. Набір значень керованих змінних у задачах оптимізації називаються розв'язком. Значення керованих змінних можуть бути обмеженими. Розв'язок, що задовольняє висунуті обмеження називають допустимим розв'язком. Оптимальним називається допустимий розв'язок, який з деяких причин переважає над іншим розв'язком, наприклад, розв'язок, за якого цільова функція екстремальна. Існують також некеровані змінні, тобто зміна їх значень не залежить від керуючого суб'єкта.

Задачі оптимізації в економіці об'єднуються в розділі «Дослідження операцій», який передбачає використання математичних методів для моделювання та аналізу ситуацій в економіці. Серед цих методів окремо виділяють лінійне і нелінійне програмування, називаючи математичним програмуванням, що є одним з основних методів прийняття виробничо-економічних рішень.

2.1. Класифікація оптимізаційних задач

Будь-яка модель в оптимізаційній задачі включає шукані змінні, обмеження, що накладаються на них і формулювання цілі. Ціль визначає цільову функцію, що задається на безлічі припустимих розв'язків D . Безліч D виражає міру здійснення цілі: якщо D порожнє, то розв'язку не існує; якщо D містить одну точку, то ця точка є єдиним допустимим розв'язком задачі і таке завдання не представляє інтересу для дослідження; якщо D містить більш ніж один розв'язок, тоді задача оптимізації полягає в знаходженні оптимального розв'язку на безлічі допустимих розв'язків. При цьому, якщо D скінченне, то оптимальний розв'язок може бути знайдений у результаті простого перебирання всіх точок D і обчислення в них функції цілі. Якщо D перелічене або D є континуумом, то оптимальний розв'язок слід шукати в нескінченній множині допустимих розв'язок.

Математична модель задачі оптимізації передбачає, що всі змінні, параметри, обмеження і цільова функція моделі кількісно вимірні. Якщо змінні

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є керованими змінними, а $Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ – не керованими параметрами й умова функціонування досліджуваної системи визначається m обмеженнями, то математичну модель записують так:

знайти точку $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, в якій досягається екстремум, мінімум або максимум, цільової функції $f(X, Z)$:

$$f(Y, Z) = \text{extrf}(X, Z)$$

за обмежень

$$\begin{aligned} \varphi_i(X, Z) &\leq (\geq, =) \overline{b_i}, i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Таким чином, задача на умовний екстремум зазвичай має сенс, якщо $m < n$.

Оптимізаційні задачі за видом цільової функції і за виглядом обмежень класифікуються на групи. Якщо функція цілі і система обмежень є лінійними, то говорять про лінійне програмування, в іншому випадку виникає задача нелінійного програмування. У разі квадратичної функції цілі і лінійної системи обмежень задачу оптимізації називають задачею квадратичного програмування. Якщо функцію цілі можна представити у вигляді суми таких функцій, що кожна з них залежить тільки від однієї змінної, то розглядають задачу сепарабельного програмування. Якщо керовані змінні принципово можуть бути тільки цілими, то така задача оптимізації називається цілочисельною.

Якщо функція цілі є опуклою функцією, то така задача оптимізації називається задачею опуклого програмування. Якщо функція φ_i , визначають обмеження $\varphi_i(X, Z) \leq (\geq, =) \overline{b_i}$ є опуклими вгору (опуклими вниз) функціями, то вони породжують опуклу множину допустимих розв'язків.

За інформаційними властивостями оптимізаційні задачі діляться на статичні і динамічні. Якщо суб'єкт у процесі прийняття рішення не змінює свій інформаційний стан, то ухвалення рішення розглядається як миттєвий факт і такі задачі називаються статичними. Якщо суб'єкт у процесі прийняття рішення змінює свій інформаційний стан, то рішення приймається поетапно і задача називається динамічною.

Крім наведених моделей до оптимізаційних іноді відносять імітаційні моделі та евристичні. Імітаційні моделі дозволяють імітувати поведінку дуже

складних систем, для яких не можливо побудувати математичні моделі та отримати розв'язок. Тут виникають складнощі, пов'язані з розробкою експерименту, перевіркою статистичної значущості його результатів, а також сам процес оптимізації викликає ускладнення. Якщо наявна задача оптимізації настільки складна, але існує припущення, що рішення є, то використовують різні евристичні методи, які засновані на інтуїції дослідника або на емпіричних даних. Слід вказати, що точність моделі також залежить від обсягу і складу наявних вихідних даних.

2.2. Основи класичної теорії оптимізації

Нехай функція $f(X)$ визначена в області O n -мірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in O \subseteq \mathbb{R}^n$ і приймає значення на деякому інтервалі O_f дійсній осі, $f = (X) \in O_f \subseteq \mathbb{R}$. Точка $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in O$ називається точкою локального мінімуму або локального максимуму функції $f(X)$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що нерівність

$$f(Y) \leq f(Y + \delta X) \text{ або } f(Y) \geq f(Y + \delta X) \quad (2.1)$$

виконується для всіх $\delta X = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$, таких, що $0 < |\delta x| < \varepsilon$. Значення функції $f(Y)$ в цій точці називається локальним мінімумом або локальним максимумом. Множина точок $U_\varepsilon(Y) = \{Y + \delta X\}$ утворює відкриту сферу радіуса ε з центром у точці Y або ε -окіл. Якщо нерівність (2.1) виконується строго:

$$f(Y) < f(Y + \delta X) \text{ або } f(Y) > f(Y + \delta X) \quad (2.2)$$

то такий мінімум (максимум) називається строгим, в іншому випадку мінімум (максимум) – нестрогий. Пошук точок мінімуму або максимуму це пошук точок екстремуму.

Точка $Y \in O$ називається точкою глобального мінімуму (максимуму) функції $f(X)$, якщо нерівність (2.1) або (2.2) виконується для всіх точок δX області визначення O ($\delta X \in O$):

$$f(Y) \leq f(X) \text{ або } f(Y) \geq f(X).$$

Відомо, що точка глобального екстремуму є точкою локального екстремуму, а зворотнє твердження неправильне.

Якщо точка $Y \in O$ є точкою, в якій функція $f(X)$ досягає глобального мінімуму або максимуму, то з визначення екстремуму випливає, що число $f^* = f(Y)$ є відповідно точною нижньою межею або точною верхньою межею множини значень функції $f(X)$:

$$f^* = \inf_{X \in O} f(X) = f(Y) \text{ або } f^* = \sup_{X \in O} f(X) = f(Y).$$

Зворотнє може бути невірнє, якщо функція $f(X)$ не має екстремуму, то:

$$f^* = \inf_{X \in O} f(X) < f(X) \text{ або } f(X) = \sup_{X \in O} f(X) = f^*.$$

Від локального або глобального мінімуму (максимуму) функції $f(X)$ завжди можна перейти до локального або глобального максимуму (мінімуму) функції $f(X)$ за допомогою перетворення:

$$F(X) = -f(X).$$

Функції, що мають єдиний мінімум (максимум), називаються унімодальні.

2.3. Загальна постановка задачі оптимізації

У загальному вигляді задача оптимізації або задача визначення екстремуму ставиться таким чином.

Нехай задані:

Функція $f(X)$, визначена на множині $O \subseteq \mathbb{R}^n$;

множина $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Знайти точку $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$, в якій функція $f(X)$ досягає екстремального (мінімального чи максимального) значення, тобто:

$$f(Y) = \text{extr } f(X) \text{ і } Y \in D.$$

Функція $f(X)$ називається цільовою функцією, змінні X – керованими змінними, D – допустимою множиною, а будь-який набір значень Y керованих змінних, що належить D ($Y \in D$) – допустимим розв’язком задачі оптимізації.

Точка Y , в якій $f(X)$ досягає свого екстремуму, повинна належати перетинанню області визначення O функції $f(X)$ і допустимій множині D ($Y \in O \cap D$). Якщо множина O і D співпадають з усім простором $\mathbb{R}^n$ ($O = D = \mathbb{R}^n$), то така задача називається задачею на безумовний екстремум. Якщо хоча б одна з множин O або D є власною підмножиною простору $\mathbb{R}^n$ ($O \in \mathbb{R}^m, D \in \mathbb{R}^n$) або множини O і D перетинаються ($O \cap D \neq \emptyset$), то така задача називається задачею на умовний екстремум, в іншому випадку ($O \cap D = \emptyset$) точка екстремуму Y не існує. Якщо множина O і D перетинаються в одній точці Y , то ця точка Y є єдиним допустимим розв’язком і обговорювати проблему пошуку екстремуму безглуздо.

Зазвичай у задачі умовного екстремуму задається не сама допустима множина розв’язків D , а система співвідношень, її визначальна,

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (=, \geq) 0, i = \overline{1, m}$$

$$\text{тобто } D = \{ \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (=, \geq) 0, i = \overline{1, m} \} \in \mathbb{R}^n,$$

або безліч D може одночасно задаватися як в явному вигляді, тобто допустимий розв’язок X повинен належати деякій області $P \in \mathbb{R}$, так і системою обмежень.

Таким чином, задача на безумовний екстремум цільової функції $f(X)$ полягає в знаходженні точки $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, в якій досягається екстремум $f(X)$:

$$f(Y) = \text{extr } f(X). \quad (2.3)$$

Задача на умовний екстремум цільової функції $f(X)$ полягає в знаходженні точки $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, в якій досягається екстремум $f(X)$:

$$f(Y) = \text{extr } f(X), \quad (2.4)$$

за умови, що точка Y задовольняє обмеженням

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (=, \geq) 0, i = \overline{1, m}, \quad (2.5)$$

де $\varphi_i(X)$ задані на деякій множині $O' \in \mathbb{R}^m$, тобто

$$Y \in O \cap O' \cap D$$

$$D = \{X : X \in P \text{ і } \varphi_i(X) \leq (=, \geq) 0, i = \overline{1, m}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Тут $O \cap O'$ – область визначення функцій $f(X)$ і $\varphi_i(X)$.

Як правило, в задачі умовної оптимізації $D \subseteq O \cap O'$ і тому область визначення функцій $f(X)$ і $\varphi_i(X)$ явно не вказують, а розглядають тільки множину P , завжди маючи на увазі, що функція цілі $f(X)$ і функції $\varphi_i(X)$, що визначають обмеження, принаймні, задані на P . Природно, що за необхідності обмеження, які обумовлені множинами O і O' , включаються до P .

У вирішенні реальних економічних проблем задачі знаходження безумовного екстремуму, як правило, зустрічаються надзвичайно рідко.

Слід зазначити, що якщо Y – точка безумовного локального екстремуму функції $f(X)$ знаходиться всередині безлічі допустимих значень D , то обмеження виконуються автоматично, якщо точка Y – за межами безлічі допустимих значень D , то точка умовного локального екстремуму $f(X)$ знаходиться на границі D , тобто обмеження-нерівності перетворюються на обмеження-рівності. У задачі тільки з обмеженнями-рівностями кількість обмежень m повинно бути менше числа змінних n , $m < n$, так як при $m > n$ принаймні $(m-n)$ обмежень виявляються надлишковими, або система обмежень (2.5), або система обмежень (2.5) перевизначена і, отже, не має припустимого рішення. При $m = n$ допустимий розв'язок, швидше за все, буде єдиним, і така задача оптимізації також не представляє інтересу. Задача пошуку оптимального розв'язку має сенс, коли $m < n$.

Якщо $m < n$, то завжди з n змінних $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна вибрати $n - m$ змінних, які називаються незалежними (вільними) змінними; інші змінні називаються залежними змінними.

2.4. Класична задача умовної оптимізації. Формулювання задачі

Розглянемо задачу умовної оптимізації (2.4), (2.5), яка полягає в знаходженні точки $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, в якій досягається екстремум $f(X)$:

$$f(Y) = \text{extr } f(X), \quad (2.4)$$

за умови, що точка Y задовольняє обмеженням:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (=, \geq) 0, i = \overline{1, m}. \quad (2.5)$$

Сформулюємо необхідні і достатні умови існування екстремуму в задачі на умовний екстремум.

Нехай вектор $Z \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ задає можливий напрямок на множині допустимих значень D , якщо при всіх достатньо малих $\alpha > 0$ вектор $Y + \alpha Z \in D$. Всі можливі напрямки на множині допустимих значень D функції $f(X)$ в точці Y утворюють безліч можливих напрямків $v(Y, f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Теорема. Якщо точка Y є точкою локального мінімуму (максимуму) задачі (2.4), (2.5), то $w(Y, f) \cap v(Y, f) \neq \emptyset$ де $w(Y, f)$ – множина напрямків спадання (зростання) $f(X)$ в точці Y .

Дана теорема показує, що неможливо зміщення з точки локального екстремуму Y , яке призводить до зменшення (збільшення) цільової функції і при цьому не виходить за межі допустимої області. Автор книги «Введення в теорію і методи оптимізації для економістів» Фролькіс В. А. [30] вважає, що дана теорема тривіальна і її слід доповнити теоремою Вейєрштрасса.

Теорема Вейєрштрасса. Нехай $D \subseteq \mathbb{R}^n$ – замкнута обмежена множина і $f(X)$ – неперервна функція, визначена на D . Тоді існує точка $Y \in D$ глобального мінімуму (максимуму) функції $f(X)$, $f(Y) = \min(\max) f(X)$.

Наведені дві теореми не вказують алгоритм знаходження екстремальної точки. Припустимо, функція $f(X)$ визначена і неперервна в обмеженій

замкненій області D . У цій області (згідно з теоремою Вейєрштрасса) знайдеться точка, в якій функція буде екстремальною. Насправді своє екстремальне значення функція $f(X)$ може досягти як у внутрішній точці області D , так і на її межі. Якщо додатково функція $f(X)$ має кінцеві частинні похідні першого і другого порядку, то для отримання необхідних і достатніх умов існування локального екстремуму цільової функції $f(X)$ у внутрішніх точках D можна використовувати теореми, що визначають необхідні і достатні умови існування локального безумовного екстремуму, але вони не діагностують екстремальні точки, що лежать на межі D . Тому для того, щоб знайти глобальний екстремум $f(X)$ в області D , необхідно знайти всі внутрішні точки локального екстремуму функції $f(X)$, обчислити в них значення $f(X)$ і порівняти зі значеннями функції $f(X)$ на межі області. Найменше (найбільше) з них і буде шуканим глобальним значенням. Якщо внутрішніх стаціонарних точок немає, то екстремальне значення може досягатися тільки на межі області. У багатьох задачах умовної оптимізації екстремум досягається саме на межі області D , тому для таких задач результати теорем класичного аналізу неприйнятні.

Для того щоб не обчислювати значення цільової функції вздовж межі області допустимих значень D , а сформулювати необхідні і достатні умови екстремуму як для внутрішніх точок області D , так і для точок на її межі, необхідно розглянути окремий випадок задачі (2.4), (2.5) у вигляді, який називається класична задача оптимізації.

Знайти точку локального екстремуму $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ цільової функції $f(X)$,

$$f(Y) = \text{extr } f(X), \quad (2.6)$$

за умови, що точка Y задовольняє обмеженням-рівностям:

$$\varphi_i(X) = 0, i = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad (2.7)$$

тобто $Y \in D$, де допустима множина визначається як:

$$D = \{X : \varphi_i(X) = 0, i = \overline{1, m}\} \subset \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

$$i \ D \subseteq O \cap O'.$$

У теорії умовної оптимізації існує кілька методів, що дозволяють звести задачу умовного екстремуму до задачі безумовного екстремуму і завдяки такому прийому використовувати необхідні і достатні умови екстремуму. До таких найбільш поширених методів відноситься метод множників Лагранжа і метод Якобі.

2.5. Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа дозволяє звести класичну задачу на умовний екстремум до задачі на безумовний екстремум. Ідея методу Лагранжа полягає в побудові допоміжної функції, так званої функції Лагранжа, точка безумовного локального екстремуму Y збігається з точкою умовного локального екстремуму функції задачі (2.6) – (2.8).

Такими властивостями володіє функція виду:

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(X), \quad (2.9)$$

параметри λ_0 і $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathfrak{R}^m$ якої називаються множниками Лагранжа. Функцію Лагранжа можна записати у вигляді:

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(X).$$

Якщо функції $f(X)$ і $\varphi_i(X)$ неперервні і мають частинні похідні першого порядку, то частинні похідні функції $L(\Lambda, \lambda_0, X)$ за змінними x_j мають вигляд:

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial x_j} = \lambda_0 \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j}. \quad (2.10)$$

Складений з них вектор позначається як:

$$L'_x(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f'(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(X).$$

Частинні похідні функції $L(\Lambda, \lambda_0, X)$ за змінними $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ завжди існують і рівні:

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(X). \quad (2.11)$$

Необхідні умови екстремуму першого порядку в задачі безумовної оптимізації функції Лагранжа формулюються у вигляді наступної теореми.

Теорема (правило множників Лагранжа). Якщо точка $Y \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ – точка локального оптимуму задачі на умовний екстремум (2.6) – (2.8):

$$f(Y) = \text{extr } f(X) \text{ і } \varphi_i(X) = 0, i = \overline{1, m},$$

в околі деякої функції $f(X)$ і $\varphi_i(X)$ безперервно диференційовані, а в точці Y ранг матриці Якобі дорівнює m , то існують такі одночасно нерівні нулю вектор Λ' і параметр λ'_0 , що точка $(\Lambda', \lambda'_0, Y)$ є стаціонарною точкою задачі на безумовний екстремум функції Лагранжа (2.9), відповідної задачі (2.6) – (2.8):

$$\text{grad } L(\Lambda', 1, Y) = 0.$$

Враховуючи вид похідних (2.10) – (2.11) стаціонарну точку Y функції Лагранжа можна визначити як точку, що задовольняє умови:

$$L'_x(\Lambda, \lambda_0, X) = 0, \varphi_i(X) = 0, i = \overline{1, m}.$$

На відміну від задачі на безумовний екстремум стаціонарна точка функції Лагранжа може перебувати на межі області D .

Приклад. Знайти точки умовного екстремуму функції;

$$f(X) = xyz + 8x^2 + 12y^2 + 25z^2$$

за обмежень

$$x + y + 7z = 12,$$

$$6x + 3y - 4z = 25.$$

Функція Лагранжа задачі, що розглядається:

$$L(\Lambda, X) = xyz + 8x^2 + 12y^2 + 25z^2 + \lambda_1(x + y + 7z - 12) + \lambda_2(6x + 3y + 4z - 25).$$

Для того щоб точка (Λ', Y) була стаціонарною точкою $L(\Lambda, X)$, повинні виконуватися необхідні умови екстремуму:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x} &= 16x + xy + \lambda_1 + 6\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial y} &= xy + 24y + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial z} &= xy + 50z + 7\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \\ \varphi_1(X) &= x + y + 7z - 12 = 0, \quad \varphi_2(X) = 6x + 3y + 4z - 25 = 0.\end{aligned}$$

Розв'язком системи є дві стаціонарні точки (Λ^1, Y^1) і (Λ^2, Y^2) з координатами:

$$\begin{aligned}Y^1 &= (2,917; 0,95; 1,162), \quad \Lambda^1 = (-4,581; -7,2), \\ Y^2 &= (113036; -245,198; 20,595), \quad \Lambda^2 = (3872; -105,217), \\ f(Y^1) &= 115,877; \quad f(Y^2) = 263500.\end{aligned}$$

За допомогою частинних похідних другого порядку доводиться, що точка Y^1 є точкою мінімуму функції $f(X)$, а точка Y^2 – точка максимуму.

Необхідно розглянути економічну інтерпретацію множників Лагранжа. Для задачі на умовний екстремум:

знайти точку локального екстремуму $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ цільової функції $f(X)$:

$$f(Y) = \text{extr } f(X),$$

за умови, що керовані змінні $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задовольняють обмеженням-рівностям:

$$\varphi_i(X) = b_i, i = \overline{1, m}.$$

Якщо цільову функцію $f(Y)$ в точці екстремуму Y інтерпретувати як оптимальний дохід (або вартість), а постійні b_k – як обсяги будь-яких ресурсів, то множники Лагранжа λ_k показують, як зміниться оптимальний дохід (або вартість) при збільшенні кількості k -го ресурсу на одиницю. Іншими словами, множники Лагранжа вказують, як зміниться оптимальне значення цільової

функції $f(Y)$ при зміні параметра b_k в правій частині обмежень на одиницю, тобто визначають цінність k -го ресурсу.

Запитання для самоперевірки:

1. Наведіть класифікацію оптимізаційних задач.
2. Наведіть постановку загальної оптимізаційної моделі.
3. Яка точка називається точкою екстремуму?
4. Як визначається допустима множина в оптимізаційній моделі?
5. Як формулюється задача на безумовний екстремум?
6. Як формулюється задача на умовний екстремум?
7. Яка точка називається точкою локального мінімуму (максимуму)?
8. Які методи дозволяють привести задачу умовного екстремуму до задачі безумовного екстремуму?
9. Як будується функція Лагранжа?
10. Сформулюйте правило множників Лагранжа.
11. Яка економічна інтерпретація множників Лагранжа?

3. Задача лінійного програмування і методи її розв'язання

3.1. Постановка задачі лінійного програмування.

3.2. Канонічна форма задачі лінійного програмування.

3.3. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування.

3.4. Властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування.

3.1. Постановка задачі лінійного програмування

У щоденній практиці економісти, менеджери ухвалюють управлінські рішення, від обґрунтованості яких залежить ефективне функціонування підприємства, його розвиток. Якщо при пошуку управлінського рішення враховуються основні наявні умови, критерії дії, тобто раціональність і доцільність ґрунтуються на оптимальності, то такі рішення рідко призводять до збитків та втрати. Тому більшість задач в економіці є оптимізаційними. Однією з найпоширеніших оптимізаційних задач є задачі, пов'язані з плануванням виробництва на підприємстві: розробка плану випуску максимального обсягу продукції при обмежених сировинних ресурсах або в межах конкретного плану виробництва визначення мінімально необхідного обсягу виробничих витрат. До

цієї групи належить задача про оптимальну суміш, наприклад, задача про дієту, де необхідно враховувати калорійність і споживчу цінність продуктів, а також їх вартість; задачі про визначення оптимального складу сумішей у процесі відгодівлі тварин. До цієї ж групи, також, належить задача про розкрій матеріалів, суть якої полягає в розробці таких технологічно допустимих планів розкрою, за яких виходить необхідний комплект заготовок, а відходи зводяться до мінімуму. Іншим найбільш поширеним класом задач є задача про мінімізацію транспортних витрат, коли мова йде про раціональне перевезення деякого однорідного продукту від виробників до споживачів.

Розглянемо типові задачі лінійного програмування (ЗЛП).

Задача про оптимальне використання ресурсів

Нехай для виробництва деякої продукції A_1, A_2, A_3 використовуються ресурси B_1, B_2, B_3, B_4 (сировина, напівфабрикати, обладнання, фінанси), запаси яких складають b_1, b_2, b_3, b_4 . Відомі норми витрат a_{ij} кожного виду ресурсу B_i на виготовлення одиниці продукції A_j , а також прибуток c_j від виробництва і реалізації кожного виду продукції (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Умова задачі

Ресурси	Продукція			Запаси ресурсів
	A_1	A_2	A_3	
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
B_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	b_4
Прибуток	c_1	c_2	c_3	

Необхідно знайти план виробництва, тобто необхідно виготовити таку кількість x_1, x_2, x_3 продукції кожного виду, щоб максимізувати загальний прибуток. Оскільки прибуток від виробництва одиниці A_1 дорівнює c_1 , то прибуток від планової кількості x_1 буде дорівнювати $c_1 x_1$; загальний прибуток буде дорівнювати сумі прибутків від виробництва всіх видів продукції:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \max.$$

Витрати ресурсу B_1 на виробництва запланованих обсягів продукції x_1, x_2, x_3 будуть дорівнювати добуткам $a_{11}x_1, a_{12}x_2, a_{13}x_3$. Необхідно врахувати, що загальні витрати цього ресурсу $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ не можуть перевищувати його запаси b_1 , тобто: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$. Запишемо аналогічні умови за усіма видами ресурсів і отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \leq b_4. \end{cases}$$

Додамо ще вимогу невід'ємності невідомих $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

знайти максимум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.1)$$

за наявності лінійної системи обмежень-нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \\ (i = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (3.2)$$

де усі $x_j \geq 0$; n – кількість видів продукції; m – кількість видів ресурсів.

Це є задача лінійного програмування (ЗЛП).

Модель, де потрібно знайти максимум лінійної функції цілі при лінійних обмеженнях типу $\leq$ є **першою стандартною формою** ЗЛП. Якщо продукція вимірюється в штуках, то в модель ще потрібно включити умову, щоб усі невідомі були цілими.

Приклад. Для виготовлення двох типів в'язальних станків підприємство використовує три основних види сировини: метал, пластик, алюміній. На виробництво одного в'язального верстату першого типу необхідно витратити металу 10 кг, пластику 5 кг і алюмінію 4 кг. На виробництво одного в'язального станка другого типу необхідно витратити металу 9 кг, пластику 11 кг і алюмінію 15 кг. Виробництво забезпечено металом в обсязі 1870 кг, пластиком

– 1455 кг, алюмінієм – 1815 кг. Прибуток від реалізації одиниці в’язального верстату першого типу становить 700 грн, а від реалізації одиниці в’язального с верстату другого типу становить 900 грн. Скласти план виробництва в’язальних с верстатів на підприємстві, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

Умова даної задачі може бути записана в табличній формі (табл. 3.2)

Таблиця 3.2

Умова задачі

Сировина (кг)	В’язальні верстати		Запаси сировини (кг)
	1-го типу	2-го типу	
Метал	10	9	1 870
Пластик	5	11	1 455
Алюміній	4	15	1 815
Прибуток (грн)	700	900	

Для складання економіко-математичної моделі позначимо: x_1 – кількість в’язальних верстатів першого типу; x_2 – кількість в’язальних верстатів другого типу, які може виробити підприємство, враховуючи обмежені обсяги сировини та максимізуючи прибуток. Критерієм оптимальності плану є забезпечення максимуму прибутку.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

знайти максимум лінійної функції цілі

$$Z = 700x_1 + 900x_2 \rightarrow \max ,$$

за обмежень:

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 1870, \\ 5x_1 + 11x_2 \leq 1455, \\ 4x_1 + 15x_2 \leq 1815, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача складання найдешевшого раціону (кормової суміші) або задача про суміші (задача про дієту)

З наявних у продажу продуктів необхідно скласти такий раціон харчування, щоб його загальна вартість була найменшою, при цьому повинні бути забезпечені усі потреби організму в поживних речовинах (білки, жири,

вуглеводи). У табл. 3.3 наведено дані про зміст поживних речовин B_1, B_2, B_3 у кожному виді продуктів A_1, A_2, A_3, A_4 , вартості продуктів і мінімальні потреби організму в поживних речовинах.

Таблиця 3.3

Умова задачі

Продукти	Поживні речовини			Вартість продуктів
	B_1	B_2	B_3	
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	c_2
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_3
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	c_3
Щоденний попит	b_1	b_2	b_3	

Необхідно визначити, з якої кількості кожного виду продуктів повинен складатися найбільш дешевий раціон. Позначимо ці невідомі кількості (склад раціону) через x_1, x_2, x_3, x_4 . Вартість одиниці продукту A_1 дорівнює c_1 , в раціон входить x_1 одиниць продукту загальною вартістю $c_1 x_1$. Враховуючи витрати на інші види продуктів, отримаємо вартість кожного раціону:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 \rightarrow \min.$$

Далі потрібно визначити, яка кількість першого виду поживної речовини B_1 міститься в раціоні. У табл. 3.3 наведено дані a_{i1} про зміст речовини B_1 в одиниці кожного виду продуктів A_i . Ці величини необхідно помножити на x_i і скласти суму: $a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4$. Потрібно, щоб у раціоні сумарна кількість цього виду поживної речовини була не менше, ніж мінімальна добова потреба: $a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1$.

Уся система обмежень за видами поживних речовин має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1; \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + a_{42} x_4 \geq b_2; \\ a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{43} x_4 \geq b_3. \end{cases}$$

До цієї системи слід додати умову невід'ємності невідомих:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Математична модель задачі представлена в такому вигляді:

знайти мінімум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \min \quad (3.3)$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq b_j \\ (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$x_i \geq 0,$$

де n – кількість видів поживних речовин; m – кількість продуктів, які входять в раціон.

Ця задача є задачею лінійного програмування. Порівняно з попередньою задачею моделі в деякому змісті взаємні – зараз потрібно знайти мінімум лінійної функції цілі при лінійних обмеженнях типу $\geq$. Така форма моделі є **другою стандартною формою** задачі ЗЛП.

Приклад. До деякого сплаву може входити принаймні 4% нікелю і не більше 80% заліза. Для складання сплаву використовують три види сировини (наприклад, відходи, лом), що містять залізо, нікель та інші речовини; крім того можуть використовуватись добавки з чистого нікелю, заліза, та інших речовин. Вартість кожного виду сировини, місткість в них відповідних речовин і їх запаси наведені в табл. 3.4. Скільки кілограмів першого, другого, третього видів сировини, чистого заліза, нікелю та інших елементів слід включити до шихти, щоб собівартість 1 т сплаву була мінімальною?

Таблиця 3.4

Умова задачі

	Вид сировини			Компонент сплаву		
залізо	70 %	90 %	85 %	100 %		
нікель	5 %	2 %	7 %		100 %	
інші	25 %	8 %	8 %			100 %
Вартість 1 кг, грн	6	4	5	2,5	67	20

Запаси, кг	800	700	1 100	не обмежено	не обмежено	не обмежено
------------	-----	-----	-------	-------------	-------------	-------------

Позначимо: x_1, x_2, x_3 – обсяги сировини першого, другого, третього видів, які необхідно знайти (кг); x_4 – обсяг чистого заліза (кг); x_5 – обсяг нікелю (кг); x_6 – обсяг інших елементів, що входять в 1 т шихти (кг).

Математична модель даної задачі має вигляд:

знайти мінімум лінійної функції цілі (мінімум вартості 1 т (1 000 кг) шихти):

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2,5x_4 + 67x_5 + 20x_6 \rightarrow \min,$$

за обмежень

$$\begin{cases} 0,7x_1 + 0,9x_2 + 0,85x_3 + x_4 \leq 800, \\ 0,05x_1 + 0,02x_2 + 0,07x_3 + x_5 = 40, \\ x_1 \leq 800, \\ x_2 \leq 700, \\ x_3 \leq 1100, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000, \\ x_{1,\dots,6} \geq 0. \end{cases}$$

Транспортна задача

У транспортній задачі потрібно скласти найбільш дешевий план перевезення однорідного продукту з пунктів виробництва A_1, A_2 в пункти споживання B_1, B_2, B_3 . У табл. 3.5 представлені відомості про запаси a_i у пунктах виробництва, попит b_j у пунктах споживання і тарифи c_{ij} – вартості перевезення одиниці товару з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення.

Таблиця 3.5

Умова задачі

Постачальники	Споживачі			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Попит	b_1	b_2	b_3	

Невідомі x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j . Як правило, в збалансованій задачі загальний попит $b_1 + b_2 + b_3$ дорівнює загальному запасу $a_1 + a_2$. Необхідно вивезти всі запаси і задовольнити весь попит з найменшими транспортними витратами.

Складаємо функцію цілі, що описує загальні транспортні витрати. Тариф c_{11} показує вартість перевезення одиниці продукції за маршрутом A_1-B_1 ; витрати на перевезення за цим маршрутом кількості товару x_{11} будуть дорівнювати добутку $c_{11}x_{11}$. Загальні витрати будуть рівні сумі таких величин:

$$Z = (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13}) + (c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}) \rightarrow \min.$$

Кількість товару, вивезеного з A_i , має бути рівним запасу a_i :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2. \end{cases}$$

Кількість товару, вивезеного з B_j , має бути рівним запасу b_j :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = b_1; \\ x_{21} + x_{22} = b_2; \\ x_{31} + x_{32} = b_3. \end{cases}$$

Усі невідомі в цій задачі – невід'ємні: $x_{ij} \geq 0$.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

знайти мінімум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (3.5)$$

за обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \\ (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \\ (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Транспортна задача також є задачею ЛП.

Приклад. Підприємство має три цеха (A_1, A_2, A_3) і чотири склади (B_1, B_2, B_3, B_4). Перший цех виробляє 30 тис. шт. виробів, другий – 40 тис. шт. виробів, третій – 20 тис. шт. виробів. Пропускна здатність складів характеризується показниками: склад 1 – 20 тис. шт., склад 2 – 30 тис. шт., склад 3 – 30 тис. шт., склад 4 – 10 тис. шт. Вартість перевезення з першого цеху до складів 1, 2, 3, 4 за одну тисячу штук виробів відповідно 2, 3, 2, 4 грн., з другого – 3, 2, 5,1 грн., з третього – 4, 3, 2, 6 грн. Скласти такий план перевезення виробів, за якого витрати на перевезення були б найменшими.

Умова задачі в табличній формі представлена в табл. 3.6.

Таблиця 3.6

Умова задачі

Цех	Склад				Обсяги виробництва, тис. шт.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Місткість складів	20	30	30	30	90

Позначимо: x_{ij} – кількість вантажу, який необхідно перевезти з цеху A_i до складу B_j , щоб витрати перевезення були б найменшими.

Математична модель даної транспортної задачі:

знайти мінімум лінійної функції цілі:

$$Z = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min,$$

за обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Задача обліку понаднормових робіт

Дотепер всі невідомі в умовах задач були невід'ємними $x_j \geq 0$, і в традиційній постановці задач ЛП ця властивість вважається навіть обов'язковою. Але у більш складних задачах з'являються невідомі без обмеження на знак $x_j \geq 0$, які залежно від виробничої ситуації можуть приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Приклад. У процесі виготовлення виробів А і В здійснюється послідовна обробка на двох різних верстатах. Час роботи кожного верстата – 8 годин на добу, але його можна збільшити на 4 години за рахунок понаднормових робіт з погодинною додатковою оплатою 5 грн за годину. Продуктивності верстатів і прибуток від виготовлення та реалізації кожного виробу наведені в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Умова задачі

Верстати	Продуктивність, шт /година		Фонд часу, години
	А	В	
I	8	4	8
II	6	5	8
Прибуток, грн /шт	4	6	

Потрібно визначити кількості виробів кожного виду (x_1, x_2), які потрібно виготовити, щоб дістати найбільший прибуток (Z), за умови, що час роботи обладнання може бути збільшений тільки за рахунок понаднормових робіт.

Якщо понаднормові роботи не допускаються, то ця задача відноситься до вже розібраного вище класу завдань оптимального використання ресурсів:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} \leq 8 & \text{(завантаження першого верстату не перевищує 8 год)} \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} \leq 8 & \text{(завантаження другого верстату не перевищує 8 год)} \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \quad (\text{прибуток})$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі: $x_1 = 24, x_2 = 20, z = 216$.

Устаткування повинне бути завантажене повністю по 8 годин на добу.

Тепер врахуємо можливість понаднормового завантаження устаткування. Позначимо через $y_1, y_2 \leq 4$ – понаднормове завантаження, що за умовою завдання не може перевищувати 4 години на добу. Тепер завантаження устаткування буде описуватися у вигляді наступних рівностей:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 8 + y_1, \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} = 8 + y_2. \end{cases}$$

Ця система рівнянь правильно описує обидві виробничі ситуації – коли понаднормові роботи допускаються (тоді $y_1, y_2 \geq 0$), і коли понаднормові роботи не допускаються (тоді $y_1, y_2 \leq 0$). Виходить, що в цієї задачі обидві нові невідомі не мають обмеження на знак $y_1, y_2 \geq 0$.

Якщо врахувати додаткові витрати в функції цілі у випадку допустимості понаднормових робіт, то функція цілі має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5w_1 - 5w_2 \rightarrow \max ,$$

де невідомі w_1, w_2 мають такий зміст:

$$\begin{cases} \text{ЯКЩО } y_1 > 0 \text{ ТО } w_1 = y_1 \text{ ІНАКШЕ } w_1 = 0 ; \\ \text{ЯКЩО } y_2 > 0 \text{ ТО } w_2 = y_2 \text{ ІНАКШЕ } w_2 = 0 . \end{cases}$$

Логічна функція ЯКЩО цілком припустима. Можна спростити модель:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5 \cdot \text{MAX}(0, y_1) - 5 \cdot \text{MAX}(0, y_2) \rightarrow \max .$$

Функції MAX, MIN, ЯКЩО і багато інших – цілком припустимі і передбачені практично в будь-якому програмному забезпеченні. Запис функції цілі z за допомогою функцій MAX значно компактніший попереднього запису через функції ЯКЩО і повністю йому еквівалентний. Дійсно, якщо $y_i > 0$, то $w_i = \max(0, y_i) = y_i$; інакше (якщо $y_i \leq 0$) $w_i = \max(0, y_i) = 0$.

Функція MAX – нелінійна, отже, задача зведена до такої задачі нелінійного програмування:

Потрібно знайти найбільше значення нелінійної функції цілі:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5 \cdot \max(0, y_1) - 5 \cdot \max(0, y_2)$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} - y_1 = 8, \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} - y_2 = 8, \\ y_1 \leq 4, \\ y_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad & x_1, x_2 \geq 0; \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що функція $w_i = \max(0, y_i)$ еквівалентна системі лінійних нерівностей, то задача зводиться до задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} w_i \geq y_i; \\ w_i \geq 0, \\ w_i \rightarrow \min. \end{cases}$$

Остаточно одержуємо задачу лінійного програмування у вигляді:

знайти максимальне значення лінійної функції цілі

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5w_1 - 5w_2 \rightarrow \max,$$

за лінійних обмежень:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} - y_1 = 8 \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} - y_2 = 8 \end{cases}, \\ & y_1 \leq 4, y_2 \leq 4, \\ & y_1 - w_1 \leq 0, y_2 - w_2 \leq 0, \\ \text{де} \quad & x_1, x_2, w_1, w_2 \geq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Умови $w_i \rightarrow \min$ виконуються автоматично, оскільки у цільову функцію $Z \rightarrow \max$ невідомі w_i входять з від'ємними коефіцієнтами і найбільшому значенню z відповідають найменші w_1, w_2 .

Оптимальний розв'язок цієї задачі: $x_1 = 36, x_2 = 30, y_1 = y_2 = 4, z = 284$.

Завдяки понаднормовим роботам прибуток збільшився на 68 одиниць.

Задача про розкрій матеріалу

Згідно з технологією виготовлення багатьох видів продукції починається з розкрою листового матеріалу. Викроюють не тільки одяг і взуття, але також деталі корпусу корабля, кузову автомобіля, фюзеляжу літака. Розкроюють тканини, шкіру, скло, метал, пластмасу. Під час масового виробництва або виготовлення продукції з дефіцитного матеріалу проблема оптимізації розкрою стає досить актуальною.

Приклад. Зі стандартних листів дефіцитного матеріалу розміром $6 \times 13 \text{ м}^2$ необхідно викроїти заготовки типу *А* розміром $5 \times 4 \text{ м}^2$ і типу *Б* розміром $2 \times 3 \text{ м}^2$. Для виготовлення готових виробів потрібно забезпечити умову комплектності заготовок – на одну заготовку *А* повинно припадати 5 заготовок *Б*. Треба скласти оптимальний план розкрою стандартних листів матеріалу, що забезпечує одержання: максимальної кількості комплектів; мінімальної кількості відходів дефіцитного матеріалу.

Розв'язування задачі про розкрій починається з переліку всіх способів розміщення заготівок на одному листі матеріалу, причому рекомендується починати з розміщення найбільш великих заготівок. Виявляється, що в цій задачі є тільки 4 основні способи розкрою, які зображені на рис. 3.1. Тут крім явно невігідних варіантів були також відкинуті всі еквівалентні варіанти розміщення заготівок.

A				A				A			
										B	

A					A					B		
										B		
	B			B			B			B		

A				B			B			B		

[illegible]

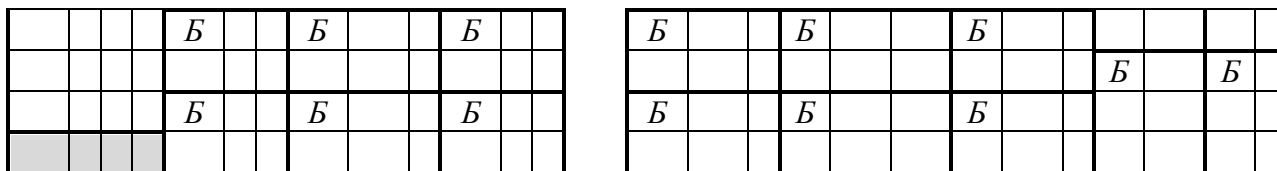


Рис. 3.1. Основні варіанти розміщення заготівок

Характеристики основних варіантів розкрою зводимо в табл. 3.8:

Таблиця 3.8

Характеристики способів розкрою

Способи розкрою	Заготівки		Обрізки, m^2	План розкрою
	A	B		
I	3	1	12	x_1
II	2	6	2	x_2
III	1	9	4	x_3
IV	0	13	0	x_4
Усього	y_1	y_2		

Зміст плану розкрою x_1, x_2, x_3, x_4 : скільки листів матеріалу треба розкроювати кожним способом. Крім цих невідомих корисно ввести позначення y_1, y_2 для загальної кількості заготівок A і B, що будуть отримані при відомому плані розкрою.

В умовах задачі може бути задана загальна кількість листів матеріалу (N), у такому випадку всі x_j, y_i повинні бути цілими. Якщо ж загальну кількість листів матеріалу не задано, його приймають рівним 100 %, тоді план розкрою x_j буде також виражатися у відсотках – у якому співвідношенні слід розкроювати стандартні листи різними способами.

Складемо математичну модель задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \\ y_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4, \\ y_2 = x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4, \\ y_2 = 5y_1, \\ Z = y_1 \rightarrow \max \\ \text{усі } x_j, y_i \geq 0. \end{array} \right.$$

Маємо, що задача про розкрій матеріалу є також задачею ЛП.

У складеній моделі задано знайти найбільше число комплектів, що дорівнює загальному числу заготівок типу A. Якщо ж ціллю є мінімізація відходів, то треба врахувати, що у відходи слід включати не тільки обрізки

матеріалу, площі яких наведені в таблиці варіантів розкрою (рис. 3.1), але також усі заготовки, що не складають повного комплекту.

3.2. Канонічна форма задачі лінійного програмування

У загальній задачі ЛП розшукується максимум або мінімум лінійної функції цілі за наявності системи лінійних обмежень у вигляді рівностей і нерівностей будь-якого типу ($\leq$ або $\geq$). Невідомі можуть бути невід'ємними, недодатними, не мати ніяких обмежень на знак, мати двосторонні обмеження типу $d_j \leq x_j \leq g_j$.

Існує три стандартних форми завдання, першу і другу стандартні форми були розглянуті вище. Третя (основна) стандартна форма названа «канонічною».

У канонічній формі відшукується максимум лінійної функції цілі:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.7)$$

за наявності системи лінійних обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \\ (i = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (3.8)$$

Усі невідомі повинні бути невід'ємними: $x_j \geq 0$.

Будь-яку задачу ЛП завжди можна привести до канонічної форми:

а) пошук мінімуму функції f завжди можна замінити пошуком максимуму функції $Z = -f$, тому що $f_{\min}(x^0) = -Z_{\max}(x^0)$, де x^0 – оптимальне значення невідомої (див. рис. 3.2);

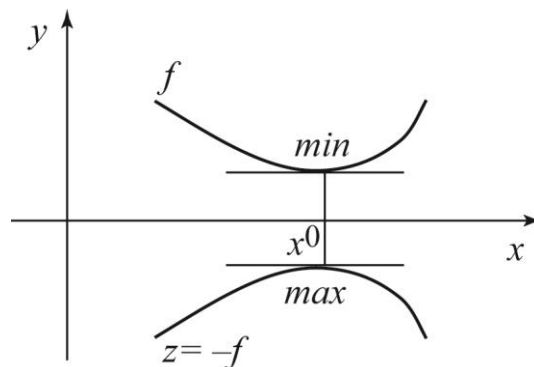


Рис. 3.2 $f_{\min}(x^0) = -Z_{\max}(x^0)$

б) обмеження-нерівності типу $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ можна замінити на рівності $\sum a_{ij}x_j + x_{i+k} = b_i$, а нерівності $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$ – на $\sum a_{ij}x_j - x_{i+k} = b_i$. В обох цих випадках уводяться додаткові невід'ємні балансові невідомі $x_{i+k} \geq 0$, де k – число вихідних невідомих;

в) як правило, всі невідомі – невід'ємні за своїм фізичним (економічним) сенсом. Проте необхідно передбачити наявність декількох невідомих без будь-якого обмеження на знак – такі невідомі часто з'являються у ході постановки задач нелінійного програмування. Невідомі без обмеження на знак (якщо такі є) завжди можна замінити різницею двох невід'ємних невідомих $x_j = x'_j - x''_j$, де $x'_j, x''_j \geq 0$. Цей прийом досить простий, але приводить до збільшення загального числа невідомих у канонічній формі задачі. Інший спосіб: можна виразити невідомі без обмеження на знак через інші невід'ємні невідомі i , таким чином, виключити їх з подальшого аналізу аж до закінчення процесу оптимізації. Розмір задачі при цьому не збільшується, а зменшується.

При однобічних обмеженнях типу $x_j \geq d_j$ уводимо нові невід'ємні невідомі $x'_j = x_j - d_j$. Обмеження типу $x_j \leq g_j$ включаємо в загальне число лінійних обмежень, які перетворюються до виду рівностей шляхом введення додаткових балансових невідомих.

Крім невідомих без обмеження на знак іноді доводиться вводити фіктивні невідомі, які тотожно дорівнюють нулю $x_j \equiv 0$. Як буде показано далі, обмеження-рівності, фіктивні невідомі і невідомі без обмеження на знак тісно пов'язані між собою.

У канонічній формі загальне число обмежень-рівностей m , загальне число (невід'ємних) невідомих n , включаючи балансові.

Приклад. Привести до канонічної форми умови задачі про облік понаднормового часу. Вихідна модель має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5w_1 - 5w_2 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} - y_1 = 8, \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} - y_2 = 8, \end{cases}$$

$$y_1 \leq 4, y_2 \leq 4,$$

$$y_1 - w_1 \leq 0, y_2 - w_2 \leq 0,$$

$$\text{де } x_1, x_2, w_1, w_2 \geq 0,$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Для кожного обмеження-нерівності введемо невід'ємну балансову невідому як різницю між більшою і меншою частинами нерівності:

$$u_1 = 0 - y_1 + w_1; \quad v_1 = 4 - y_1;$$

$$u_2 = 0 - y_2 + w_2; \quad v_2 = 4 - y_2.$$

Невідомі y_1, y_2 не мають обмежень на знак, тому за допомогою останніх двох рівностей виражаємо їх через невід'ємні балансові невідомі

$$y_1 = 4 - v_1, \quad y_2 = 4 - v_2$$

і виключаємо із всіх інших обмежень, а також з функції цілі:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 - 5w_1 - 5w_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} + v_1 = 12, \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} + v_2 = 12, \\ w_1 - u_1 + v_1 = 4, \\ w_2 - u_2 + v_2 = 4. \end{cases}$$

Усі невідомі тепер – невід'ємні.

До речі, рівності в канонічній формі прийнято записувати так, щоб вільні члени обмежень-рівнянь були невід'ємними.

3.3. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Графічний метод застосовується, в основному, для розв'язання задач двовимірного простору і ґрунтується на геометричній інтерпретації задач лінійного програмування. У разі тривимірного простору задача ускладнюється, а для чотиривимірного графічне розв'язування стає неможливим.

Нехай задача лінійного програмування задана в двовимірному просторі, тобто обмеження містять дві змінні. Знайти максимальне значення функції цілі:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad (3.9)$$

за обмежень:

(3.10)

(3.11)

(рис. 3.3).



Рис. 3.3. Багатокутник планів, який відповідає початковій системі

координат. Коефіцієнти цільової функції мають значення проекцій нормалі до

лінії рівня $N = (c_1; c_2)$. Для лінійної функції градієнт, тобто вектор, який вказує напрямок найшвидшого зростання функції, збігається з вектором нормалі:

$$\text{grad } Z = \frac{\partial z}{\partial x_1} i + \frac{\partial z}{\partial x_2} j = c_1 i + c_2 j = N. \text{ Якщо значення цільової функції зростає,}$$

лінія рівня пересувається в напрямку нормалі (рис. 3.4).

Із геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування слідує алгоритм її графічного розв'язання: 1) на основі системи обмежень будують область допустимих розв'язків; 2) будують вектор градієнтного напрямку $N = (c_1; c_2)$; 3) проводять довільну лінію рівня $Z = Z_0$ в напрямку вектора N так, щоб вона дотикалась області допустимих розв'язків в її крайньому положенні (крайній точці). У випадку розв'язування задачі на мінімум лінію рівня $Z = Z_0$ переміщують в антиградієнтному напрямку; 4) визначають оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ та екстремальне значення цільової функції $Z^* = Z(X^*)$.

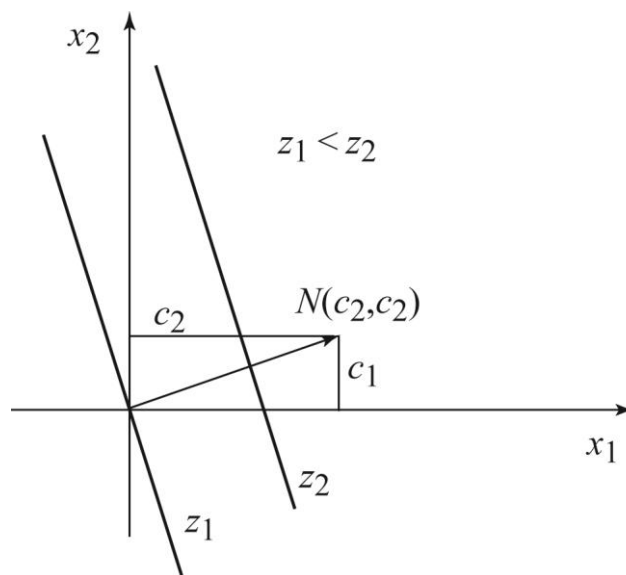


Рис. 3.4. Побудова лінії рівня

З графічного розв'язання слідують висновки: 1) система лінійних обмежень визначає опуклу багатокутну область планів; 2) оптимальне рішення ЗЛП досягається в одній з вершин багатокутної області планів. При цьому мають місце такі випадки:

1. Система обмежень може виявитися суперечливою, область планів – порожньою ($D = \emptyset$); у цьому випадку задача розв'язку не має (рис. 3.5).

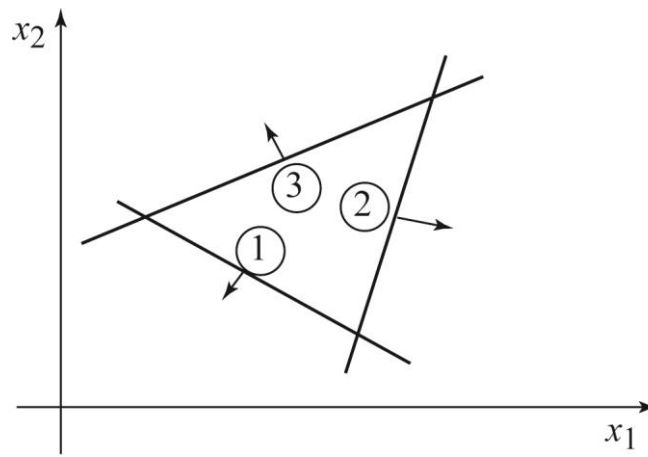


Рис. 3.5. Немає розв'язків

2. Область планів може бути відкритою, а максимальне значення функції цілі – необмеженим (рис. 3.6).

3. Як правило, оптимальний розв'язок – єдиний, але бувають випадки, коли є незліченна безліч еквівалентних оптимальних планів. На рис. 3.7 лінія рівня функції цілі (яка перпендикулярна градієнту) проходить відразу через дві вершини A і B багатокутної області планів. Оптимальними планами тут є всі точки відрізка $[AB]$. Рівняння відрізка можна записати як комбінацію його вершин: $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$, де $0 \leq \lambda \leq 1$.

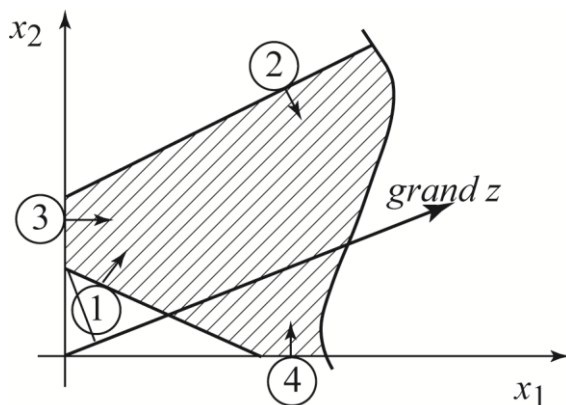


Рис. 3.6. Необмежена область планів

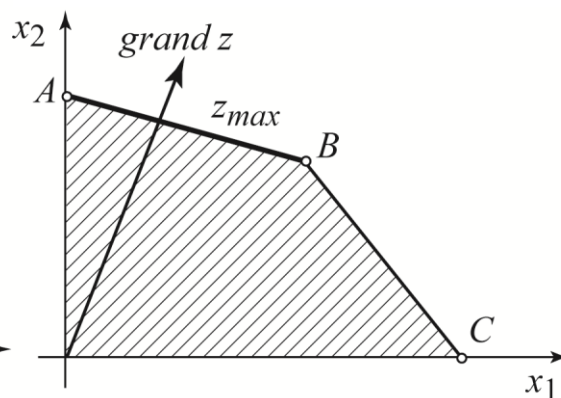
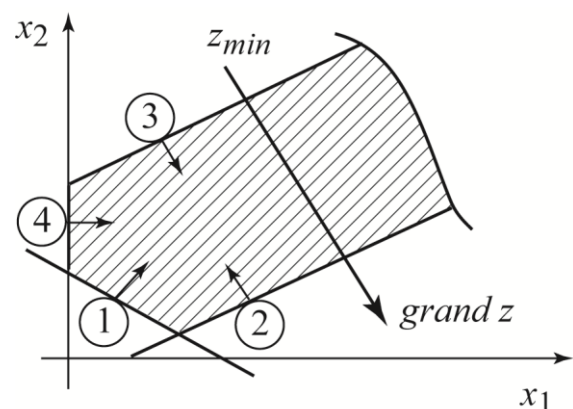


Рис. 3.7. Нескінченність оптимального розв'язку

При $\lambda = 0$ маємо першу вершину A ; при $\lambda = 1$ маємо другу вершину B ; при $\lambda = 1/2$ маємо середину відрізка. Якщо максимальне значення функції цілі



досягається відразу в трьох вершинах A, B, C , то загальний оптимальний розв'язок (рівняння грані ABC) можна записати аналогічним чином: $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$, де $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Знання альтернативних оптимальних розв'язків дозволяє вибрати серед них найбільш прийнятний план з урахуванням другорядних особливостей, які не відображені в моделі. Існують специфічні випадки, що зустрічаються значно рідше.

4. Область планів може бути відкритою, але граничні значення функції цілі – обмеженими (рис. 3.8).

Рис. 3.8. Область планів відкрита,
функція цілі – обмежена

5. Область планів може виродитися в єдину точку. Це єдиний розв'язок за відсутністю вибору автоматично буде оптимальним (рис. 3.9).

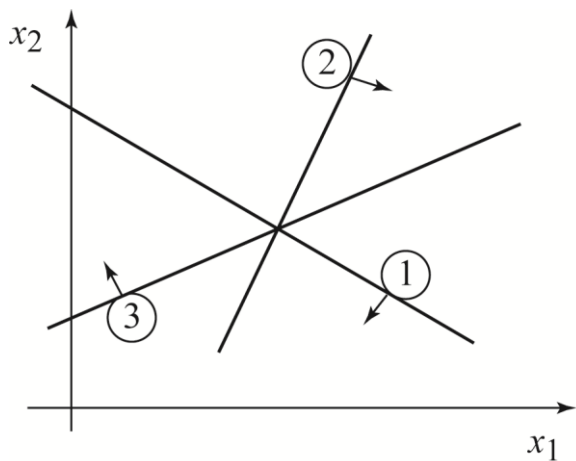


Рис. 3.9. Єдиний розв'язок

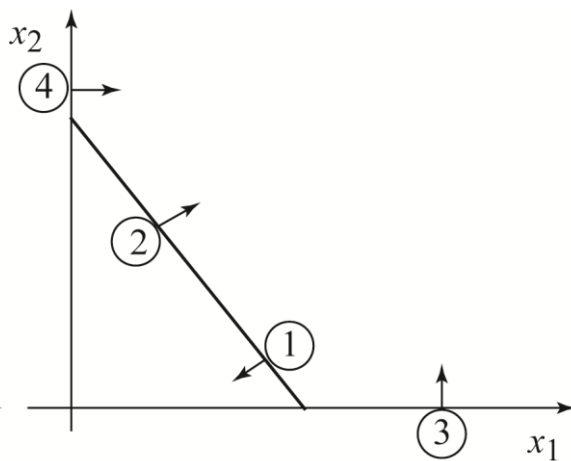


Рис. 3.10. Область розв'язків – відрізок

6. Область планів може становити лінію (відрізок). Цей випадок має місце, якщо серед обмежень є обмеження-рівність, що завжди можна замінити системою двох протилежних нерівностей (рис. 3.10).

7. Наведемо ще один, на вид малопомітний, але необхідний особливий випадок – випадок виродження. На рис. 3.11 обмеження ④ – явно надлишкове. Максимальне значення функції цілі тут досягається у вершині B .

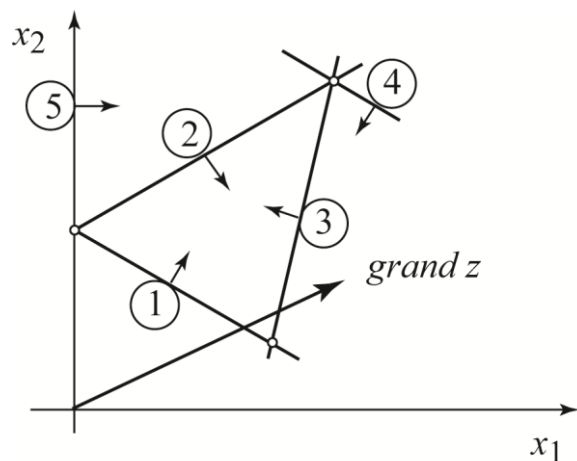


Рис. 3.11. Виродження плану

У двовимірному випадку вершина визначається перетинанням двох ліній, але в цій вершині перетинаються відразу три лінії. Тому у вершині B фактично злилися разом три вершини B_1 , B_2 і B_3 , кожна з яких визначається різними парами ліній. Як говорять, вершина B – кратна. Для графічного методу кратність вершин не має значення, але при аналітичному вирішенні це може привести до деяких утруднень. До речі, мінімальне значення функції цілі в цьому прикладі також виходить у кратній вершині, в утворенні якої беруть участь не тільки лінії ① і ②, але також умова невід'ємності $x_1 \geq 0$.

Приклад. У задачі про оптимальне завантаження устаткування при відсутності понаднормових робіт наведений розв'язок. Одержимо цей розв'язок графічно. Математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} \leq 8 & , \text{ ①} \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} \leq 8 & , \text{ ②} \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \text{ ③}$$

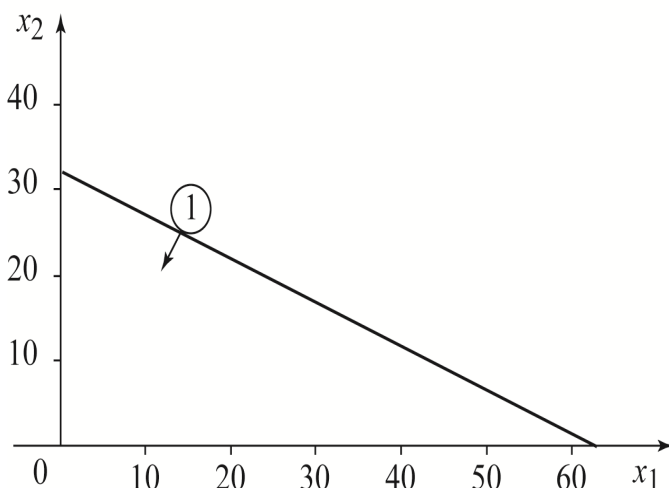
$$x_2 \geq 0. \text{ ④}$$

Знайдемо графічно розв'язок 1-ї нерівності $x_1 + 2x_2 \leq 64$, що визначає на площині (x_1, x_2) деяку область. Границя цієї області (активне обмеження) $x_1 + 2x_2 = 64$ становить пряму лінію; будуємо її графік за двома точками, наприклад, точок перетину з осями координат $(64; 0)$ і $(0; 32)$. Ця лінія ділить площину на дві частини, в одній з яких дотримується зазначена нерівність. Досить перевірити виконання нерівності в довільній точці, що не лежить на границі (звичайно для цього вибирається початок координат). Оскільки для

$x_1 = x_2 = 0$ нерівність

задовольняється ($0 \leq 64$), то

областю розв'язку 1-ї нерівності є частина площини убік початку координат (рис. 3.12).



Таким же чином знаходять розв'язки інших нерівностей і визначають загальну область, у якій справедливі всі обмеження. Для лінійних обмежень завжди виходить опукла багатокутна область D , що має назву «область планів».

Рис. 3.12. Область розв'язання 1-ї нерівності

На рис. 3.13 зображена багатокутна область планів $OACD$ для нашої задачі.

Тепер будемо сімейство ліній рівня функції цілі $Z = \text{const}$. На рис. 3.14 побудоване сімейство $Z_0 = 6x_1 + 4x_2$ для $z_0 = 0, 60, 120, 180, 240$.

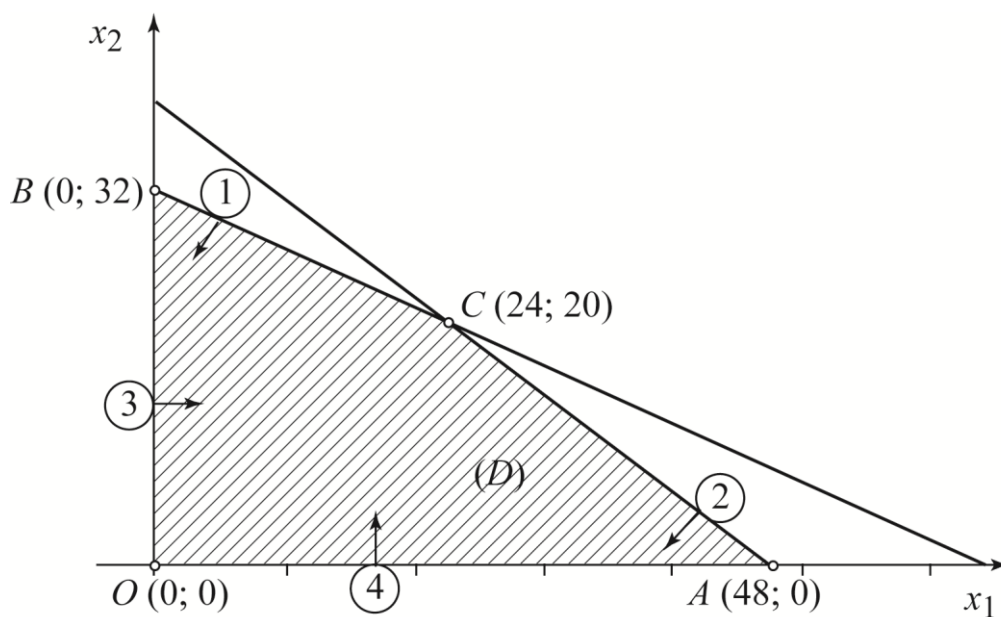
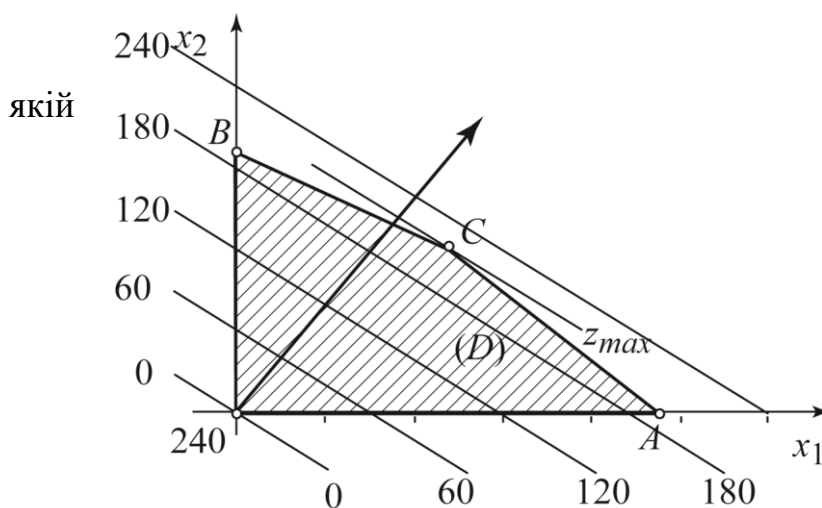


Рис. 3.13. Область розв'язків системи нерівностей

У будь-якій точці лінії рівня значення функції цілі залишається тим самим $Z = Z_0$. Якщо лінія рівня перетинає область планів, то є реальні плани з таким значенням функції цілі.



Відомо, що в будь-якій точці лінія рівня перпендикулярна вектору-градієнту $\text{grad}Z$, напрямком якого є напрямком найшвидшого

зростання функції (це напрямок «крутого сходження»).

Рис. 3.14 Сімейство ліній рівня $z = z_0$

Проекціями градієнта є частинні похідні функції цілі за кожною невідомою. Для лінійної функції цілі $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ ці похідні сталі і всі лінії рівня перпендикулярні одному вектору-градієнту $\text{grad } Z = (c_1, c_2)$. Для досягнення максимуму лінію рівня потрібно пересувати паралельно самій собі в напрямку градієнта доти, поки лінія рівня має хоча б одну загальну точку з областю планів. У нашому прикладі із градієнтом $\text{grad } Z = (4, 6)$ такою граничною точкою є вершина C .

У задачах ЛП використання градієнта спрощує побудову сімейства ліній рівня і проблему визначення оптимального плану – для цього досить побудувати вектор-градієнт і спроектувати на нього крайні точки області планів (звичайно проектують всі вершини багатокутної області). Точка області D з найбільшою проекцією на градієнт є оптимальним планом з максимальним значенням функції цілі, а точка з найменшою проекцією – оптимальним планом з мінімальним значенням функції цілі.

У даному прикладі мінімум досягається на початку координат, а максимум – у точці C – загальній точці активних обмежень ① і ②. Розв'язуємо систему обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 8 \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} = 8 \end{cases}$$

і одержуємо оптимальний розв'язок: $x_1 = 24$; $x_2 = 20$; $Z_{\max} = 4 \cdot 24 + 6 \cdot 20 = 216$.

Приклад. Розв'язати графічним методом задачу планування виробництва в'язальних верстатів на підприємстві. Математична модель цієї задачі має вигляд (рис.3.15):

знайти максимум лінійної функції цілі

$$Z = 700x_1 + 900x_2 \rightarrow \max ,$$

за обмежень

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 1870, \\ 5x_1 + 11x_2 \leq 1455, \\ 4x_1 + 15x_2 \leq 1815, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Побудуємо багатокутник розв'язків. Для цього в системі координат x_1Ox_2 на площині побудуємо граничні прямі:

$$10x_1 + 9x_2 = 1870, \quad (L_1)$$

$$5x_1 + 11x_2 = 1455, \quad (L_2)$$

$$4x_1 + 15x_2 = 1815. \quad (L_3)$$

Багатокутником розв'язків даної задачі є п'ятикутник $OABCD$ (рис. 3.15).

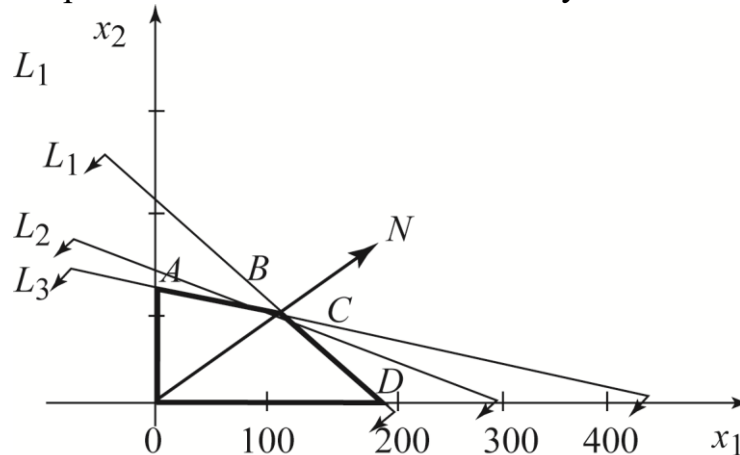


Рис. 3.15. Область допустимих розв'язків задачі

Для побудови прямої $700x_1 + 900x_2 = 0$ побудуємо вектор $N = (700; 900)$ і через точку O проводимо пряму, яка перпендикулярна йому. Побудовану пряму $Z = 0$ переміщуємо паралельно самій собі за напрямом вектора N . Згідно з рис. 3.15 маємо, що опорною стосовно багатокутника розв'язків ця пряма стає в точці C , де функція Z приймає максимальне значення. Точка C є перетином прямих:

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 = 1870, \\ 5x_1 + 11x_2 = 1455. \end{cases}$$

Таким чином, оптимальний розв'язок $x_1 = 115$, $x_2 = 80$. При цьому

$$Z_{\max} = 700 \cdot 115 + 900 \cdot 80 = 152\,500 \text{ грн.}$$

Отже, підприємство отримає максимальний прибуток у розмірі 152 500 грн, якщо буде виробляти в'язальних станків першого типу 115 штук, а в'язальних станків другого типу – 80 штук.

Зауваження. Аналогічну графічну інтерпретацію може мати задача лінійного програмування і для більшої кількості змінних, якщо різниця між кількістю змінних і кількістю рівнянь основної системи обмежень дорівнює двом: $n - m = 2$. Розглянемо цей випадок.

Нехай маємо цільову функцію $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$
за обмежень:

[illegible]

У даній системі обмежень всі рівняння лінійно незалежні і виконується умова $n - m = 2$. Виокремимо m перших невідомих в базис, а решта – дві останні незалежні x_{m+1} і x_n є вільними. Система обмежень має вигляд:

[illegible]

Використавши цю систему обмежень, виразимо цільову функцію тільки через вільні невідомі та враховуючи, що всі базисні невідомі невід’ємні

$(x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m})$, відкинемо їх та перейдемо до системи нерівностей:

[illegible]

При цьому цільова функція: $Z = c'_{m+1}x_{m+1} + c'_n x_n \rightarrow \min$.

Отримана задача має дві невідомі і її можна розв'язати графічним методом. Знайдене оптимальне значення x_{m+1} і x_n підставляємо в систему з m невідомими та знаходимо оптимальні значення $x_1, x_2, \dots, x_m$.

3.4. Властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування

Розглянемо основну систему обмежень ЗЛП в канонічній формі (3.8):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = \overline{1, m}.$$

Постановка ЗЛП має сенс тільки коли система (3.8) має безліч розв'язків. У цьому випадку серед безлічі розв'язків необхідно вибрати той, за якого цільова функція досягає екстремуму. Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі, система m рівнянь з n невідомими сумісна і має безліч розв'язків, якщо ранг матриці коефіцієнтів системи $A = (a_{ij})_{m \times n}$ дорівнює рангу розширеної матриці $A|B$ і менше кількості невідомих:

$$r_A = r_{A|B} = k$$

$$r_A = r_{A|B} < n$$

Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють матрицю порядку k , і визначник якої не дорівнює нулю, є основними (або базисними). Решта $n - k$ невідомих є вільними. Якщо в загальному рішенні системи, де основні невідомі визначаються через вільні, вільним невідомим присвоїти значення рівне нулю, то такий розв'язок називається базисним. Серед безлічі розв'язків основної системи обмежень (3.4) кількість базисних розв'язків не перевищує кількості способів, якими можна відібрати m змінних серед n їх загальної кількості, тобто C_n^m – кількість сполучень з n по m . Якщо взяти до уваги обмеження на знак:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

то серед базисних розв'язків планами ЗЛП будуть тільки ті, для яких всі базисні змінні невід'ємні. Такі плани називаються опорними. Якщо всі k базисних компонентів є додатними, відповідний план називається не виродженим. В іншому випадку (тобто, коли кількість додатних компонентів опорного плану менше ніж k) план є виродженим.

Теорема. Безліч планів задачі лінійного програмування є опуклим.

Варто відмітити, що опуклою є множина, для якої виконується таке твердження: якщо точки M_1 і M_2 належать цій множині, то будь-яка внутрішня точка M відрізка M_1M_2 також належить цій множині. Тобто $M = \lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, де M_1 , M_2 , M – радіус-вектори, що відповідають цим точкам. Кажуть, що вектор M є опуклою лінійною комбінацією векторів M_1 і M_2 .

Доведення. Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічній формі:

$$Z = C \cdot X \rightarrow \max$$

$$A \cdot X = B, \quad (3.12)$$

$$X \geq 0. \quad (3.13)$$

Нехай вектори X_1 і X_2 – можливі розв'язки задачі, тобто задовольняють основній системі обмежень (3.9):

$$A \cdot X_1 = B \quad \text{і} \quad A \cdot X_2 = B.$$

Необхідно розглянути вектор X який є лінійною комбінацією векторів X_1 і X_2 :

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

і підставити його в систему обмежень (3.9):

$$\begin{aligned} A \cdot X &= A \cdot (\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) = \lambda \cdot A X_1 + A X_2 - \lambda \cdot A X_2 = \\ &= \lambda B + B - \lambda B = B. \end{aligned}$$

Тобто, вектор X також є розв'язком основної системи обмежень і належить до безлічі можливих розв'язків задачі лінійного програмування – що й потрібно було довести. ■

Якщо розглянути графічну інтерпретацію опуклої множини (рис. 3.12), то опуклим є п'ятикутник $ABCDE$, а п'ятикутник $FGHPQ$ не є опуклим, оскільки не всі точки відрізка M_1M_2 належать цій множині.

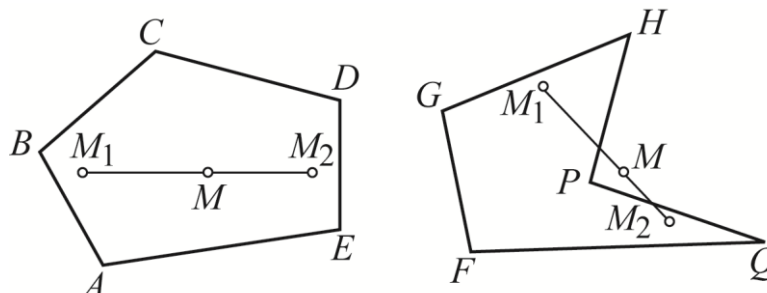


Рис. 3.16. Опукла ($ABCDE$) і неопукла ($FGYPQ$) множини

Згідно з теоремою 3.1 тільки п'ятикутник $ABCDE$ може бути багатокутником планів задачі лінійного програмування.

Теорема. Опорний розв'язок задачі лінійного програмування відповідає допустимій екстремальній точці простору розв'язків (без доведення).

Іншими словами, кожному опорному плану задачі лінійного програмування відповідає вершина (кутова точка) багатокутника планів і, навпаки, кожній вершині багатокутника планів відповідає опорний план.

Запитання для самоперевірки

1. Які типові задачі лінійного програмування розрізняють?
2. Запишіть задачу лінійного програмування в канонічній формі.
3. Які задачі лінійного програмування можна розв'язати графічно?
4. Які основні етапи графічного методу розв'язання задач лінійного програмування?
5. Які випадки графічного розв'язання задачі лінійного програмування розрізняють?
6. Наведіть властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування і деякі його теоретичні аспекти

4.1. Пошук оптимального плану. Умова оптимальності.

4.2. Алгоритм симплексного методу.

4.3. Метод штучного базису. Розширена M -задача.

4.4. Проблема виродження.

4.1. Пошук оптимального плану. Умова оптимальності

Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічній формі:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min ,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Щоб задача мала розв'язок, система її обмежень повинна бути сумісною. Це можливо, якщо ранг r системи не більше числа невідомих n : $r \leq n$. Випадок $r > n$ неможливий. При $r = n$ система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш ніж в одній крайній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, яка є їх опуклою лінійною комбінацією. Для розв'язання задачі лінійного програмування (ЗЛП) необхідно знайти всі крайні точки багатогранника планів і порівняти в них значення цільової функції. Отже, для відшукування оптимального плану необхідно дослідити всі опорні плани, максимальна кількість яких дорівнює C_n^m . Перебирати всі опорні плани не доцільно, а слід скористатись упорядкованим переходом від одного опорного плану до іншого. Таку можливість надає симплексний метод, який дозволяє від відомого опорного плану за скінчене число ітерацій отримати оптимальний план. Загальна ідея симплекс-методу (методу послідовного покращення плану) полягає у 1) знаходженні початкового опорного плану; 2) наявності ознаки оптимальності опорного плану; 3) вміння переходити до не гіршого опорного плану.

Розглянемо теоретичні основи симплекс-методу. За допомогою методу Жордана–Гаусса виразимо перші невідомі у вигляді:

[illegible]

Дану систему (4.1) можна записати у векторній формі:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m + x_{m+1} A_{m+1} + \dots + x_n A_n = A_0, \quad (4.2)$$

$$\text{де } A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1\ m+1} \\ a_{2\ m+1} \\ \dots \\ a_{m\ m+1} \end{pmatrix}, A_{m+2} = \begin{pmatrix} a_{1\ m+2} \\ a_{2\ m+2} \\ \dots \\ a_{m\ m+2} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1\ n} \\ a_{2\ n} \\ \dots \\ a_{m\ n} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Базис складають m векторів $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Маємо m базисних невідомих: $x_1, x_2, \dots, x_m$ і їх потрібно виразити через вільні невідомі $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$:

$$x_i = b_i - \sum_{k=1}^{n-m} a_{ik} x_{m+k}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Отримаємо висхідний опорний план:

$$X_0 = \left(b_1, b_2, \dots, b_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m} \right),$$

$$\text{або } X_0 = \left(x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, \underbrace{x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0}_{n-m} \right).$$

Значення функції для висхідного опорного плану:

$$Z_0 = Z(X_0) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m.$$

Виразимо:

[illegible]

де $A_1, A_2, \dots, A_m$ – лінійно незалежні вектори. Для даного плану відповідає розклад:

$$A_0 = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m. \quad (4.4)$$

Для зменшення значення цільової функції треба побудувати інший опорний план, тобто перейти до нового базису.

Кожний з n векторів співвідношення (4.2) розкладається за векторами базису єдиним чином:

$$A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A_i.$$

Введемо в базис вектор A_{m+1} , який має хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i\ m+1}$ в розкладанні

$$A_{m+1} = x_{1\ m+1} A_1 + x_{2\ m+1} A_2 + \dots + x_{m\ m+1} A_m. \quad (4.5)$$

Помножимо даний вираз на $\theta > 0$ та віднімемо від (4.4), отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1\ m+1}) A_1 + (x_2 - \theta x_{2\ m+1}) A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{m\ m+1}) A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \quad (4.6)$$

Вектор $X_1 = (x_1 - \theta x_{1\ m+1}; x_2 - \theta x_{2\ m+1}; \dots; x_m - \theta x_{m\ m+1}; \theta; 0; \dots; 0)$ є планом, якщо його компоненти невід'ємні. Оскільки $\theta > 0$, то всі компоненти вектора X_1 , в які входять недодатні $x_{i\ m+1}$, невід'ємні. Тому будемо розглядати тільки компоненти, до яких входять додатні $x_{i\ m+1}$. Іншими словами слід визначити таке $\theta > 0$, при якому для всіх $x_{i\ m+1} > 0$:

$$x_i - \theta x_{i\ m+1} \geq 0. \quad (4.7)$$

Звідки маємо $\frac{x_i}{x_{i\ m+1}} \geq \theta$. Вектор X_1 є планом задачі для будь-якого θ , що

задовольняє умові $\min_i \frac{x_i}{x_{i\ m+1}} \geq \theta > 0$ при $x_{i\ m+1} > 0$.

Вираз (4.6) можна розглядати як розкладання вектора A_0 за новим базисом. Один з коефіцієнтів розкладання повинен дорівнювати нулю. Нехай

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i\ m+1}} \geq \theta > 0, \text{ тоді відповідна компонента, в якій досягається}$$

мінімум, дорівнює нулю. Якщо ця компонента є першою, тобто:

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i\ m+1}} = \frac{x_1}{x_{1\ m+1}},$$

то підставивши величину θ в (4.6) отримаємо:

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1\,m+1}}x_{1\,m+1}\right)A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1\,m+1}}x_{2\,m+1}\right)A_2 + \dots + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1\,m+1}}x_{m\,m+1}\right)A_m + \\ + \frac{x_1}{x_{1\,m+1}}A_{m+1} = A_0,$$

і відповідно розкладання

$$A_0 = x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \dots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1},$$

якому відповідає новий опорний план:

$$X_1 = (0; x'_2; x'_3; \dots; x'_m; x'_{m+1}; 0; \dots; 0),$$

де $x'_i = x_i - \theta_0 x_{i\,m+1}$, $x'_{i\,m+1} = \theta_0$, а система векторів $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ утворює новий базис. Число θ називають симплексним відношенням.

Отже, перехід до нового опорного плану здійснюється через виключення одного вектора і включення до базису іншого. Критерій, що використовується для визначення вектора, який має включатись до базису є одним із основних складових симплексного методу. Якщо вектор A_{m+1} має бути включеним до базису, а в його розкладі всі $x_{i\,m+1} \leq 0$ і не має змоги вибрати таке $\theta > 0$, що виключало б один з векторів розкладу і план X_1 містить $m+1$ додатних компонент, то говорять, що система векторів $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ лінійно залежна і визначає внутрішню точку багатогранника розв'язків. У цьому випадку лінійна функція не може досягати мінімального значення і гіперплощина, що відповідає лінійній функції, не може стати опорною до багатогранника розв'язків і лінійна функція не обмежена на багатограннику розв'язків.

Умова оптимальності

Нехай задача лінійного програмування має плани і кожний її опорний план не вироджений. Для висхідного опорного плану X_0 маємо:

$$A_0 = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m,$$

значення лінійної функції цілі дорівнює:

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_m C_m = Z(X_0). \quad (4.8)$$

Розклад будь-якого вектора A_j за векторами даного базису $A_1, A_2, \dots, A_m$, єдиний:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \dots + x_{mj}A_m = A_j, \quad (j = \overline{1, m}), \quad (4.9)$$

тому розкладу вектора A_j в базисі відповідає і єдине значення лінійної функції:

$$x_{1j}C_1 + x_{2j}C_2 + \dots + x_{mj}C_m = Z_j, \quad (j = \overline{1, m}). \quad (4.10)$$

Нехай C_j – коефіцієнт лінійної функції, який відповідає вектору A_j .

Теорема. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $Z_j - C_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним, і можна побудувати такий план X , для якого виконується нерівність $Z(X) < Z(X_0)$.

Доведення. Помножимо вираз (4.9) і вираз (4.10) на додатне число $\theta > 0$ і віднімемо відповідно з:

$$A_0 = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m \quad \text{та} \quad x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_mC_m = Z(X_0)$$

відповідно, отримаємо

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0, \\ (x_1 - \theta x_{1j})C_1 + (x_2 - \theta x_{2j})C_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj})C_m + \theta C_j = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j).$$

Оскільки всі $x_1, x_2, \dots, x_m$ додатні, то завжди можна вибрати таке число $\theta > 0$, щоб всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, \dots, A_m, A_j$ були невід'ємними, а отже отримати новий план задачі:

$$X = (x_1 - \theta x_{1j}; x_2 - \theta x_{2j}; \dots; x_m - \theta x_{mj}; \theta; 0; \dots; 0),$$

якому відповідає значення лінійної функції $Z(X) = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j)$.

Оскільки за умовою теореми $Z_j - C_j > 0$ і $\theta > 0$, то $Z(X) < Z(X_0)$. ■

Наслідок. Якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j в даному базисі задовольняє умові $Z_j - C_j \leq 0$, то план X_0 є оптимальним.

Нерівність $Z_j - C_j \leq 0$ є **умовою оптимальності оптимізаційної задачі**, в якій цільова функція відшукується на мінімум. Величину $Z_j - C_j$ називають **оцінками плану**.

Для задачі лінійного програмування:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Теорема. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $Z_j - C_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним, і можна побудувати такий план X , для якого виконується нерівність $Z(X) > Z(X_0)$.

Наслідок. Якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j в даному і задовольняє умові $Z_i - C_i \geq 0$, то план X_0 є оптимальним.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$X_0 = \left(x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, \underbrace{x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0}_{n-m} \right),$$

68

оптимальний план знаходимо в колонці A_0 , коефіцієнти розкладу вектора A_j за базисом записуємо в колонці A_j .

Таблиця 4.1

i	Базис	C_0	C	c_1	c_2	$\dots$	c_l	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_j	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			A_0	A_1	A_2	$\dots$	A_l	$\dots$	A_m	A_{m+1}	$\dots$	A_j	$\dots$	A_k	$\dots$	A_n
1	A_1	c_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	x_{1m+1}	$\dots$	x_{1j}	$\dots$	x_{1k}	$\dots$	x_{1n}
2	A_2	c_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	x_{2m+1}	$\dots$	x_{2j}	$\dots$	x_{2k}	$\dots$	x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	A_l	c_l	x_l	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	x_{lm+1}	$\dots$	x_{lj}	$\dots$	x_{lk}	$\dots$	x_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	A_m	c_m	x_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	x_{mm+1}	$\dots$	x_{mj}	$\dots$	x_{mk}	$\dots$	x_{mn}
$m+1$	$\Delta_j = Z_j - C_j$	Z_0	Z_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$Z_{m+1} - C_{m+1}$	$Z_j - C_j$	$Z_j - C_j$	$Z_k - C_k$	$\dots$	$Z_n - C_n$	

В $(m+1)$ рядку в колонці A_0 записуємо значення лінійної функції $Z(X_0)$, а в колонках A_j записуємо значення оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$. Значення $Z(X_0)$ знаходимо як $Z(X_0) = C_0 X_0 = \sum_{i=1}^m c_i x_i$, $Z_j = C_j X_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}$. Аналізуючи значення $\Delta_j = Z_j - C_j$ маємо: якщо $Z_j - C_j \leq 0$, то опорний план X_0 оптимальний і мінімальне значення лінійної функції цілі дорівнює $Z(X_0)$. В протилежному випадку, тобто якщо $Z_j - C_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним, можна знайти менше значення лінійної функції. Якщо додатних оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$ декілька, то в базис має бути включений вектор, якому відповідає $\max(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$, за умови $Z_j - C_j > 0$ і θ_{0j} обчислюється для кожного j . Якщо значень $\max(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$ декілька, то до базису включається той вектор, у якого $\min C_j$.

Якщо хоча б для однієї $Z_j - C_j > 0$ коефіцієнти розкладу x_{ij} відповідного вектора недодатні, то лінійна функція не обмежена в багатограннику розв'язків або багатогранник розв'язків в даному випадку є необмеженою багатогранною областю.

Нехай $\max(\theta_{0j}(Z_j - C_j)) = \theta_{0k}(Z_k - C_k)$, де $m < k \leq n$. Тоді в базис включається вектор A_k і виключається вектор, якому відповідає $\theta_{0k} = \min \left\{ \frac{x_i}{x_{ik}} \right\} (x_{ik} > 0)$.

Нехай $\theta_{0k} = \min \left\{ \frac{x_i}{x_{ik}} \right\} = \frac{x_l}{x_{lk}}$, отже вектор A_l виключається з базису.

Елемент x_{lk} називають **направляючим**, а відповідний рядок і стовпець **направляючими**. Тепер новий базис утворюють вектори $A_1, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m$. Новий опорний план $X_0 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_k, x'_m)$ обчислюється за формулами:

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \neq l),$$

$$x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}} \quad (i = l).$$

Розкладання векторів у новому базисі визначається за формулами:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \neq l),$$

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (i = l).$$

Таблиця 4.2

i	Базис	$C_{\bar{o}}$	C	c_1	c_2	...	c_l	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_k	...	c_n
			A_0	A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_k	...	A_n
1	A_1	c_1	x'_1	1	0	...	x'_{1l}	...	0	x'_{1m+1}	...	x'_{1j}	...	0	...	x'_{1n}
2	A_2	c_2	x'_2	0	1	...	x'_{2l}	...	0	x'_{2m+1}	...	x'_{2j}	...	0	...	x'_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
l	A_k	c_l	x'_k	0	0	...	x'_{kl}	...	0	x'_{km+1}	...	x'_{kj}	...	1	...	x'_{kn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	c_m	x'_m	0	0	...	x'_{ml}	...	1	x'_{mm+1}	...	x'_{mj}	...	0	...	x'_{mn}
$m+1$	$\Delta_j = Z_j - C_j$	Z'_0	0	0	...	$Z'_l - C_l$	...	0	$Z'_{m+1} - C_{m+1}$	$Z'_j - C_j$	...	0	...	$Z'_n - C_n$	...	

Дані формули є формулами повного виключення Жордана–Гаусса. Всі обчислення за наведеними формулами доцільно проводити в симплексній таблиці (табл. 4.2).

Якщо в табл. 4.2 в $(m + 1)$ рядку всі оцінки $Z_j - C_j \leq 0$, то отриманий план X_0 є оптимальним. У випадку наявності додатних оцінок відшукуємо наступний опорний план. Процес продовжується до отримання оптимального плану або встановлення необмеженості лінійної функції.

Якщо оцінками оптимального плану є тільки нульові оцінки, що відповідають базисним векторам, то це підтверджує єдиність оптимального плану. Якщо нульова оцінка відповідає вектору, що не входить до базису, то оптимальний план не єдиний. У даному випадку задача лінійного програмування має нескінченну множину оптимальних планів.

Для задачі лінійного програмування, в якій відшукується максимальне значення в разі невиконання умов оптимальності $Z_j - C_j \geq 0$ в базис включається вектор, якому відповідає $\min(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$, за умови $Z_j - C_j < 0$. Якщо мінімальних оцінок декілька, то в базис включається той вектор, якому відповідає $\max C_j$. Решта всіх дій і обчислень аналогічно задачі лінійному програмуванню, в якій мінімізується цільова функція.

Приклад. На підприємстві можна організувати виробництво продукції двома способами, при цьому необхідно мати три види ресурсів: сировину, обладнання і електроенергію. Витрати ресурсів за один місяць і наявний загальний їх обсяг представлено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Норми витрат ресурсів

Ресурси	Витрати ресурсів за 1 місяць при організації виробництва		Запаси ресурсів
	1-м способом	2-м способом	
Сировина	1	2	4
Обладнання	1	1	3
Електроенергія	2	1	8

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тисячі виробів, при другому – 4 тисячі виробів. Скільки місяців має

пропрацювати підприємство кожним із способів, щоб за наявності ресурсів забезпечити максимальний випуск продукції?

Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1 – період роботи підприємства при організації виробництва продукції першим способом, x_2 – період роботи підприємства при організації виробництва продукції другим способом. Математична модель має вигляд:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max ,$$

за обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного вигляду:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу симплексним методом у симплексній таблиці (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

i	Базис	$C_{\bar{b}}$	C	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	4	1	2	1	0	0
2	A_4	0	3	1	1	0	1	0
3	A_5	0	8	2	1	0	0	1
4		Δ	0	-3	-4	0	0	0

Маємо початковий опорний план: $X_0 = (0, 0, 4, 3, 8)$. Значення цільової функції дорівнює $Z(X_0) = 0$. Опорний план не оптимальний, оскільки в індексному рядку є дві оцінки: Δ_1 та Δ_2 від'ємні. Оскільки

$\min(\theta_{0j}(Z_j - C_j)) = (-3) \cdot \frac{3}{1} = -9$, то $x_{21} = 1$ є направляючим, і, отже, вектор A_4

слід вивести з базису, а вектор A_1 ввести в базис. Перетворення зробимо в симплексній таблиці за методом Жордана–Гаусса (табл. 4.5)

Таблиця 4.5

i	Базис	C_{θ}	C	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	1	0	1	1	-1	0
2	A_1	3	3	1	1	0	1	0
3	A_5	0	2	0	-1	0	-2	1
4		Δ	9	0	-1	0	3	0

Маємо новий опорний план: $X_0 = (3, 0, 1, 0, 2)$. Значення цільової функції дорівнює $Z(X_0) = 9$. Опорний план не є оптимальний, оскільки в індексному

рядку є оцінка Δ_2 від’ємна. Згідно з $\theta_{02} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 1$, то $x_{12} = 1$ є

направляючим, і, отже, вектор A_3 слідує вивести з базису, а вектор A_2 ввести в базис. Перетворення зробимо в симплексній таблиці за методом Жордана–Гаусса (табл. 4.6)

Таблиця 4.6

i	Базис	C_{θ}	C	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_2	4	1	0	1	1	-1	0
2	A_1	3	2	1	0	-1	2	0
3	A_5	0	3	0	0	1	-3	1
4		Δ	10	0	0	1	2	0

Маємо опорний план: $X_0 = (3, 1, 0, 0, 3)$. Він є оптимальний, оскільки в індексному рядку всі оцінки Δ_0 невід’ємні. Максимальне значення цільової

функції дорівнює $Z_{max}(X_0)=10$. Отже, для забезпечення максимального випуску продукції у розмірі 10 тисяч одиниць підприємство має випускати продукцію першим способом два місяці, а другим способом – один місяць.

4.3. Метод штучного базису. Розширена M -задача

Якщо обмеження задачі лінійного програмування містять одиничну матрицю порядку m , то за умови невід’ємних значень вільних членів рівнянь початковий план визначений та за допомогою симплексного методу знаходять оптимальний план.

Якщо систему обмежень задачі лінійного програмування можна перетворити до вигляду $AX \leq A_0, A_0 \geq 0$, то вона завжди містить одиничну матрицю. Але є багато задач лінійного програмування, які не містять одиничної матриці і не перетворюються до вказаного вигляду, проте мають розв'язки.

В такому випадку використовується метод штучного базису.

Нехай потрібно дослідити функцію на мінімум $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$, за умови:

[illegible]

Система обмежень не містить одиничної матриці. Тому для отримання одиничної матриці додаємо до кожної рівності по одній змінній $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, які називають штучними і розв'язують розширену задачу:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \dots + Mx_{n+m} \rightarrow \min,$$

за обмежень:

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}.$$

Величину M беруть достатньо велике додатне число, якщо цільова функція в задачі досліджується на мінімум, і достатньо мале від'ємне число, якщо цільова функція в задачі досліджується на максимум. Вектори $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$ утворюють штучний базис.

Для відшукування оптимального плану даної задачі використовують таку теорему.

Теорема. Якщо в оптимальному плані $X_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0, \quad i = \overline{1, m}$, то план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Доведення. Якщо план X_0 є оптимальним планом розширеної задачі, то план X є планом висхідної задачі, при цьому $Z(X_0) = Z(X)$, оскільки останні m компонент плану X_0 дорівнюють нулю.

Доведення того, що план X є оптимальним планом висхідної задачі виконаємо від супротивного. Тобто нехай X не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, для якого $Z(X^*) < Z(X)$. Звідси для вектора $X_0^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$, який є планом розширеної задачі, маємо:

$$Z(X_0^*) = Z(X^*) < Z(X) = Z(X_0),$$

тобто $Z(X_0^*) < Z(X_0)$. Таким чином, план X_0 розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми. ■

Використовуючи симплексний метод для розв'язування розширеної задачі, отримуємо план, в якому всі штучні змінні дорівнюють нулю. Якщо початкова задача не має планів, тобто вона не сумісна, то оптимальний розв'язок розширеної задачі має хоча б одну $x_{n+i} > 0$. Висхідна задача буде мати оптимальний розв'язок, якщо вдалось виключити з базису всі штучні змінні.

Таким чином, якщо маємо задачу зі змішаними обмеженнями, наприклад:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr: max або min}$$

додамо в перші k нерівності $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$, $A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$ складуть базис

[illegible]

Необхідно використовувати метод штучного базису.

Добрива	Фосфор	Азот	Калій
A_1	2	1	3

A_2	1	2	4
A_3	3	1,5	2

Ціни за 1 кг добрив: $A_1 - 2$ грн, $A_2 - 3,5$ грн, $A_3 - 2,5$ грн. Скласти найбільш економний план закупівлі добрив.

Згідно з умовою задачі складемо цільову функцію:

$$Z = 2x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \min,$$

обмеження:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Перетворимо задачу до канонічної форми:

$$Z = 2x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - y_1 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 - y_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - y_3 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення, щоб ввести в базис змінні y_1, y_2 :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + y_1 - y_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 + y_2 - y_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - y_3 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Для того щоб отримати базис слід ввести штучну змінну y_4 та розв'язати розширену M -задачу:

$$Z = 2x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + M \cdot y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + y_1 - y_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 + y_2 - y_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - y_3 + y_4 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

i	Базис	C_{θ}	C	2	3,5	2,5	0	0	0	M
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_4	0	6	1	3	-1	1	0	-1	0
2	A_5	0	4	2	2	1/2	0	1	-1	0
3	A_7	M	12	3	4	2	0	0	-1	1
4	$\Delta_j = Z_j - c_j$		$12M$	$3M-2$	$4M-3,5$	$2M-2,5$	0	0	$-M$	0

$$\theta_2 = \min \left\{ \frac{6}{3}; \frac{4}{2}; \frac{12}{4} \right\} = 2$$

$$X_0 = (0, 0, 0, 6, 4, 0, 12), \quad Z(X_0) = 12M.$$

i	Базис	C_{θ}	C	2	3,5	2,5	0	0	0	M
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
5	A_4	0	0	-2	0	-7/4	1	-3/2	1/2	0
6	A_2	3,5	2	1	1	1/4	0	1/2	-1/2	0
7	A_7	M	4	-1	0	1	0	-2	1	1
8	$\Delta_j = Z_j - c_j$		$4M+7$	$3/2-M$	0	$M-13/8$	0	$7/4-2M$	$M-7/4$	0

$$X_0 = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 4), \quad Z(X_0) = 4M + 7.$$

i	Базис	C_{θ}	C	2	3,5	2,5	0	0	0	M
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
9	A_4	0	7	-15/4	0	0	1	-5	9/4	7/4

10	A_2	3,5	1	5/4	1	0	0	1	-3/4	-1/4
11	A_3	2,5	4	-1	0	1	0	-2	1	1
12	$\Delta_j = Z_j - c_j$	13,5	-1/8	0	0	0	0	-3/2	-1/8	13/8- -M

Оптимальний план задачі: $X^* = (0; 1; 4; 7; 0; 0; 0)$, $Z(X^*) = 13,5$.

Таким чином, для 1 га чорнозему фермерському господарству слід закупити 1 кг добрив складу A_2 і 4 кг добрив складу A_3 (добриво складу A_1 зовсім не закуповувати). Цим повністю задовольнятимуться вимоги внесення до чорнозему азоту і калію, а кількість фосфору на 1 га перевищить необхідний мінімум на 7 одиниць. Загальна вартість добрив для цього плану мінімальна і складе 13,5 грн з розрахунку 1 га.

4.4. Проблема виродження

У процесі використання симплексного методу монотонне зростання цільової функції у ході дослідження на максимум (або монотонне зменшення у ході дослідження на мінімум) має місце за умови, що на кожній ітерації маємо невироджений опорний план. Мають місце задачі, коли основна система обмежень в правій частині містить один або кілька нулів. Така ситуація може виникнути під час розв'язання задачі. Так, в рядку 5 симплексної таблиці прикладу пункту 4.3 міститься рівняння вільний член якого дорівнює нулю, отже опорний план вироджений $X_0 = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 4)$, оскільки він містить одну базисну невідому, значення якої дорівнює нулю. При цьому, якби довелось вводити в базис A_6 , то найменше значення в симплексному відношенні було б нуль.

Розглянемо, як зміниться цільова функція, якщо при черговому перетворенні за методом Жордана–Гаусса елемент розв'язування міститься в рядку з нульовою правою частиною. Відомо, що при кожній ітерації цільова функція змінюється на величину $\Delta Z = |\theta \cdot \Delta|$. Оскільки в цьому випадку $\theta = 0$, то введення в базис вектора, якому відповідає нульове симплексне відношення, не призводить до зміни цільової функції, отже, таке перетворення не має сенсу. Як правило, після декількох перетворень з використанням нульового

симплексного відношення можна отримати план, який був раніше, тобто має місце зациклення.

На практиці такі випадки зустрічаються дуже рідко, і мають, як правило, штучний характер, але теоретично такий випадок можливий.

Запитання для самоперевірки

1. Для розв'язання яких математичних задач використовується симплексний метод?
2. У чому суть симплекс-методу?
3. На яких властивостях задач лінійного програмування заснований симплекс-метод?
4. Як визначити початковий опорний план задачі лінійного програмування?
5. Сформулюйте послідовність етапів практичної реалізації симплекс-методу у ході розв'язування задач лінійного програмування.
6. Які ознаки оптимальності базисного плану?
7. Коли виникає необхідність використання симплекс-методу з штучним базисом?
8. У чому суть проблеми виродження?

5. Теорія двоїстості. Взаємно двоїсті задачі лінійного програмування

5.1. Правила складання умов взаємно двоїстих задач.

5.2. Теореми двоїстості.

5.1. Правила складання умов взаємно двоїстих задач

У різних розділах математики часто зустрічаються так звані *теореми двоїстості*. Кожна з них дозволяє для будь-якого твердження даної теорії побудувати – за певними стандартними правилами – інше твердження таким чином, що із справедливості першого автоматично впливає справедливість другого. Стосовно лінійного програмування це виражається в тому, що, розв'язуючи одну оптимізаційну задачу, одержуємо розв'язок ще однієї оптимізаційної задачі, *двоїстої до вихідної*.

Можна вказати на ряд практичних використань теорії двоїстості. У ході розв'язування задачі ЛП симплекс-методом розв'язок парної задачі виходить автоматично без додаткових зусиль з нашого боку, тому з двох зв'язаних між собою задач розв'язувати слід ту, яка простіше. Розглядаючи за кроками процес розв'язування вихідної задачі стандартним симплекс-методом і спостерігаючи за пов'язаним з ним процесом автоматичного розв'язування двоїстої задачі, був відкритий алгоритм так званого двоїстого *симплекс-методу*. Новий метод істотно розширив обчислювальні можливості і виявився дуже корисним під час розв'язання цілочисельних задач ЛП і задач ЛП з параметрами. Цікаво, що, записавши умови парних задач разом, виявилось можливим звести задачу оптимізації до звичайного розв'язування системи алгебраїчних рівнянь (з подвійним числом невідомих, з яких половина невідомих повинна дорівнювати нулю). Такий прийом використовується у процесі розв'язання транспортної задачі ЛП і є основою для розв'язання задач квадратичного програмування. Розв'язання двоїстої задачі корисне само по собі – воно дає можливість провести аналіз стійкості розв'язку вихідної задачі щодо малих змін в її умовах. Так, у задачі оптимального використання обмежених ресурсів можливо перевірити чутливість знайденого оптимального плану до малих варіацій у запасах ресурсів. Економічна інтерпретація двоїстих оцінок дозволяє визначити корисність кожного ресурсу і вказати найбільш прийнятний шлях зміни їх запасів для досягнення максимального прибутку.

Перша задача. Підприємство має m видів ресурсів у кількостях b_i ($i = \overline{1, m}$) з яких виготовляється n видів продукції. Відома матриця технологічних коефіцієнтів $A = (a_{ij})_{m \times n}$, а також відома вартість одиниці кожної продукції c_j ($j = \overline{1, n}$). Необхідно скласти оптимальний план виробництва, щоб загальний прибуток був максимальним. Тобто висхідна задача формулюється так: скільки і якої продукції x_j ($j = \overline{1, n}$) необхідно виробити, щоб при заданих вартостях c_j одиниці продукції і обсягах наявних ресурсів b_i максимізувати випуск продукції у вартісному вираженні. Тобто знайти вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє обмеженням:

і доставляє максимальне значення функції:

Це є висхідна задача.

ресурсів буде дорівнювати $\sum_{i=1}^m b_i y_i$.

Знайти вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, який задовольняє обмеженням:

і доставляє мінімальне значення функції:

Це є двоїста задача.

Обидві задачі утворюють пару сполучених двоїстих задач.

82

1. Основним невідомим однієї задачі відповідають балансові невідомі іншої задачі і навпаки:

Задача 1	Основні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$	Балансові змінні $u_1, u_2, \dots, u_m$
Задача 2	$v_1, v_2, \dots, v_n$ Балансові змінні	$y_1, y_2, \dots, y_m$ Основні змінні

Число основних невідомих однієї задачі дорівнює числу обмежень іншої задачі. Між невідомими взаємно двоїстих задач існують зв'язки:
 $x_j \leftrightarrow v_j, y_i \leftrightarrow u_i$.

2. Невід'ємним невідомим однієї задачі відповідають невід'ємні невідомі іншої задачі.

3. Фіктивним невідомим (тотожно рівним нулю) однієї задачі відповідають в іншій задачі невідомі без обмеження на знак і навпаки.

4. Якщо умови однієї задачі приведені до 1-ї стандартної форми, то умови іншої задачі будуть представлені в 2-й стандартній формі і навпаки.

5. Вільні члени в обмеженнях однієї задачі є коефіцієнтами цільової функції іншої задачі і навпаки.

6. Матриці коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях обох задач – взаємно транспоновані.

Види математичних моделей двоїстих задач

І. С и м е т р и ч н і з а д а ч і

Вихідна задача
 I.1. $Z = CX \rightarrow \min$
 $AX \geq A_0,$
 $X \geq 0,$

Двоїста задача
 $F = YA_0^T \rightarrow \max$
 $YA \leq C^T,$
 $Y \geq 0.$

Вихідна задача
 I.2. $Z = CX \rightarrow \max$
 $AX \leq A_0,$
 $X \geq 0,$

Двоїста задача
 $F = YA_0^T \rightarrow \min$
 $YA \geq C^T,$

$$Y \geq 0.$$

ІІ. Несиметричні задачі

Висхідна задача

ІІ.1. $Z = CX \rightarrow \min$
 $AX = A_0,$
 $X \geq 0,$

Двоїста задача

$F = YA_0^T \rightarrow \max$
 $YA \leq C^T.$

Висхідна задача

ІІ.2. $Z = CX \rightarrow \max$
 $AX = A_0,$
 $X \geq 0,$

Двоїста задача

$F = YA_0^T \rightarrow \min$
 $YA \geq C^T.$

5.2. Теореми двоїстості

Властивості розв'язків взаємно двоїстих задач зазвичай групуються у два блоки, які іменуються 1-ю і 2-ю теоремами двоїстості.

У теорему 1 увійшли наступні твердження:

Теорема 1.1. Якщо одна задача має оптимальний розв'язок, то інша задача також має оптимальний розв'язок, причому $Z_{\max}(X^*) = F_{\min}(Y^*)$ або $Z_{\min}(X^*) = F_{\max}(Y^*)$.

Доведення. Розглянемо несиметричну пару спряжених задач. Візьмемо математичну модель висхідної задачі у вигляді ІІ.1:

$$\begin{aligned} Z &= CX \rightarrow \min, \\ AX &= A_0, \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Нехай ця задача має розв'язок. Тоді її оптимальний план можна визначити симплексним методом. Необхідно вважати, що базисними векторами є вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ і остання ітерація симплексного методу має вигляд, представлений в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

		C	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_n
--	--	-----	-------	-------	---------	-------	-----------	---------	-------

Базис	$C_{\bar{\theta}}$	A_0	A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n
A_1	c_1	x^*_{11}	1	0	...	0	x_{1m+1}	...	x_{1n}
A_2	c_2	x^*_{21}	0	1	...	0	x_{2m+1}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_m	x^*_{m1}	0	0	...	1	x_{mm+1}	...	x_{mn}
$\Delta_j = Z_j - C_j$		Z^*_0	$Z_1 - c_1$	$Z_2 - c_2$	...	$Z_m - c_m$	$Z_{m+1} - c_{m+1}$	...	$Z_n - c_n$

Позначимо через D матрицю, що складається з компонентів векторів $A_1, A_2, \dots, A_m$ (базисні вектори останньої ітерації), тоді табл. 5.1 містить коефіцієнти розкладання векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$ вихідної системи за векторами базису, тобто кожному вектору A_j в цій таблиці відповідає вектор X_j , такий що:

$$A_j = DX_j \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.2)$$

Для оптимального плану маємо:

$$A_0 = DX^*, \quad \text{де} \quad X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)^T. \quad (5.3)$$

Позначимо $\bar{X}$ матрицю, що складається з коефіцієнтів у розкладанні векторів A_j в табл. 5.1. З урахуванням співвідношень (5.2), (5.3) маємо:

$$A = D\bar{X}, \quad \text{звідки} \quad D^{-1}A = \bar{X}, \quad (5.4)$$

$$A_0 = DX^*, \quad \text{звідки} \quad D^{-1}A_0 = X^*. \quad (5.5)$$

За таблицею мінімальне значення цільової функції дорівнює:

$$Z_0^* = C_{\bar{\theta}} X^*. \quad (5.6)$$

Розглянемо вектор $\bar{Z}$:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= C_{\bar{\theta}} X^* - C = (C_{\bar{\theta}} X_1 - c_1, C_{\bar{\theta}} X_2 - c_2, \dots, C_{\bar{\theta}} X_n - c_n) = \\ &= (Z_1 - c_1, Z_2 - c_2, \dots, Z_n - c_n). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оскільки його компоненти є відповідними оцінками $\Delta_j = Z_j - c_j \leq 0 (j = \overline{1, n})$ оптимального плану, то вектор $\bar{Z}$ не додатний: $\bar{Z} = C_{\bar{\sigma}} \bar{X} - C \leq 0$.

Оптимальний план вихідної задачі має вигляд: $X^* = D^{-1}A_0$, тому оптимальний план двоїстої задачі:

$$\begin{aligned} F = YA_0^T &\rightarrow \max \\ YA &\leq C^T, \end{aligned} \quad (5.8)$$

відшукаємо в аналогічній формі: $Y^* = C_{\bar{\sigma}} D^{-1}$. Покажемо, що вектор Y^* дійсно є планом двоїстої задачі (5.8). Для цього її систему обмежень запишемо у вигляді $YA - C^T \leq 0$ і підставимо в ліву частину нерівності вектор Y^* . Враховуючи співвідношення (5.4), (5.7) і (5.8), маємо:

$$YA - C^T = C^* D^{-1} A - C^T = C^* D^{-1} D \bar{X} - C^T = C^* \bar{X} - C^T \leq 0.$$

Таким чином, $Y^* A \leq C^T$. Оскільки вектор Y^* задовольняє систему обмежень задачі (5.8), то Y^* є планом двоїстої задачі. Значення цільової функції двоїстої задачі з цим планом буде $F(Y^*) = Y^* A_0^T$. З іншого боку,

$$F(Y^*) = Y^* A_0^T = C_{\bar{\sigma}}^* D^{-1} A_0^T = C^* X^* = Z(X^*) = Z_{\min}.$$

Таким чином, доведено, що цільова функція двоїстої задачі для плану Y^* дорівнює мінімальному значенню цільової функції вихідної задачі. Залишається довести, що Y^* є оптимальним планом двоїстої задачі.

Слід помножити рівняння $AX = A_0$ на будь-який довільний план Y двоїстої задачі, а нерівність $YA \leq C^T$ помножимо на будь-який план вихідної задачі X . Маємо:

$$\begin{aligned} YAX &= YA_0 = F(Y), \\ YAX &\leq C^T X = Z(X). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для будь-яких довільних планів X і Y виконується нерівність $F(Y) \leq Z(X)$. Це співвідношення поширюється і на екстремальні значення цільової функції, тобто:

$$F_{\max}(Y) \leq Z_{\min}(X).$$

З останньої нерівності випливає, що цільова функція досягає максимального значення в тому випадку, якщо $F_{\max}(Y) = Z_{\min}(X)$, але це має місце, якщо $Y = Y^*$, отже, Y^* і є оптимальний план двоїстої задачі.

Аналогічно можна довести, що якщо двоїста задача має розв'язок, то й висхідна також має розв'язок, причому $Z_{\min}(X) = F_{\max}(Y)$.

Для доведення другої частини теореми, припустимо, що цільова функція вихідної задачі не обмежена знизу. Тоді випливає, що $F(Y) \leq -\infty$. Це означає, що двоїста задача має суперечливу систему обмежень, а отже, не має розв'язків.

Таким же чином припустимо, що цільова функція двоїстої задачі не обмежена зверху, тобто $Z(X) \geq +\infty$. Це означає, що висхідна задача має необмежену цільову функцію на множині своїх планів або її система обмежень суперечлива, а отже, вихідна задача не має розв'язків. ■

Отже, сформулюємо без доведення ще три теореми.

Теорема 1.2. Для довільних розв'язків двох задач $Z_1 \leq F_2$.

Теорема 1.3. Якщо в одній задачі функція цілі необмежена, то інша задача розв'язків не має.

Теорема 1.4. Якщо одна задача не має розв'язків, то в іншій задачі функція цілі необмежена, або ж інша задача також не має розв'язків.

Теорема 2. Для оптимальності двох планів пари спряжених задач необхідно і достатньо, щоб ці плани задовольняли умову:

$$y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.9)$$

$$x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.10)$$

де X^* та Y^* — оптимальні плани відповідно висхідної та двоїстої задач.

Доведення. Для доведення звернемо увагу на співмножники, що стоять у дужках у виразах (5.9) - (5.10). Це різниці між лівими та правими частинами основних обмежень кожної з пари спряжених задач. Отже, другу теорему двоїстості можна сформулювати таким чином. Два плани пари спряжених задач лінійного програмування будуть оптимальними тоді і лише тоді, коли всім

відмінним від нуля компонентам плану кожної з задач відповідають обмеження спряженої задачі, які виконуються у вигляді точних рівнянь, а всім обмеженням, які залишаються у вигляді нерівностей, відповідають змінні спряженої задачі, що обов'язково дорівнюють нулю. Іншими словами, для того, щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб всім додатнім базисним змінним відповідали обмеження спряженої задачі, які задовольняються як точні рівняння, а обмеження, що залишаються у вигляді нерівностей, відповідали б вільним змінним, які дорівнюють нулю.

Доведемо необхідність виконання умов (5.9) – (5.10). Нехай X^* та Y^* – оптимальні плани симетричної пари спряжених задач.

Вихідна задача

$$\begin{aligned} Z = CX &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Двоїста задача

$$\begin{aligned} F = YA_0^T &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &\geq c_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Покажемо, що умови (5.11) та (5.12) задовольняються.

Оскільки X^* є планом задачі (5.12), то виконується співвідношення:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.13)$$

а оскільки Y^* є планом задачі (5.12), то виконується співвідношення:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.14)$$

Помножимо нерівності системи (5.13) на відповідні їм змінні оптимального плану двоїстої задачі y_i^* ($i = \overline{1, m}$), а нерівності системи (5.14) – на змінні x_j^* ($j = \overline{1, n}$) оптимального плану вихідної задачі. Отримаємо співвідношення:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* \leq \sum_{i=1}^m y_i^* b_i = F^*, \quad (5.15)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* \geq \sum_{j=1}^n x_j^* c_j = Z^*. \quad (5.16)$$

Згідно з першою теоремою двоїстості $F^* = Z^*$, отже:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \leq \sum_{i=1}^m y_i^* b_i = \sum_{j=1}^n x_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*. \quad (5.17)$$

Неважко помітити, що крайні члени останнього виразу – це та ж сама величина, а саме: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^*$, отже, у виразі (5.17) знаки нестрогої нерівності треба замінити знаками рівняння, звідки дістанемо:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = \sum_{i=1}^m y_i^* b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m y_i^* (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i) = 0, \quad (5.18)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = \sum_{j=1}^n x_j^* c_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n x_j^* (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j) = 0. \quad (5.19)$$

Кожний з доданків у рівнянні (5.18) буде недодатним, бо $y_i^* \geq 0$, а $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \leq 0$, що в добутку дає недодатну величину. Оскільки сума доданків одного знаку (у даному випадку недодатних) дорівнює нулю, це можливо лише тоді, коли кожен з доданків цієї суми дорівнює нулю:

$$y_i^* \cdot (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Застосувавши аналогічні міркування до визначення знаків доданків у виразі (5.19), отримаємо:

$$x_j^* \cdot (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким чином, умову необхідності доведено.

Доведемо тепер ознаку достатності. Нехай для деяких планів X' та Y' спряженої пари задач (5.11) та (5.12) виконуються умови:

$$y_i' \cdot (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j' - b_i) = 0 \Rightarrow y_i' \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j' = y_i' b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.20)$$

$$x_j' \cdot (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i' - c_j) = 0 \Rightarrow x_j' \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i' = c_j x_j', \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.21)$$

Шляхом послідовного додавання лівих та правих частин рівнянь у системі (5.20) визначимо суму всіх m рівнянь системи:

$$\sum_{i=1}^m y_i' \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j' = \sum_{i=1}^m y_i' b_i = F(Y'). \quad (5.22)$$

Аналогічно визначимо суму всіх n рівнянь системи (5.21):

$$\sum_{j=1}^n x_j' \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i' = \sum_{j=1}^n c_j x_j' = Z(X'). \quad (5.23)$$

Як бачимо, ліві частини виразів (5.22) та (5.23) однакові, отже, для планів X' та Y' маємо, що $Z(X') = F(Y')$. За першою теоремою двоїстості це є критерієм оптимальності планів пари спряжених задач. Звідси $X' = X^*$ та $Y' = Y^*$. Теорему доведено. ■

Теорема. Якщо при підстановці компонент оптимального плану в систему обмежень висхідної задачі i -те обмеження перетворюється в нерівність, то i -та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i -та компонента оптимального плану двоїстої задачі додатна, то i -те обмеження висхідної задачі задовольняється її оптимальним розв'язком як строга рівність.

Зауваження. У ході розв'язання ЗЛП симплекс-методом розв'язок двоїстої задачі знаходиться в рядку цільової функції.

Приклад. Побудувати і розв'язати двоїсту задачу для висхідної задачі:

$$Z = x_1 - x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Необхідно розглянути розв'язки задач з використанням теорем двоїстості.

Висхідна задача:

$$Z = x_1 - x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$F = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -1, \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'яжемо вихідну задачу симплексним методом (табл. 5.2), і перетворимо нерівності в рівності:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_i \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Таблиця 5.2

Базис	C_b	C	1	-1	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	2	-2	1	1	0	0
A_4	0	2	1	-2	0	1	0
A_5	0	5	1	1	0	0	1
Цільова функція		0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-1	1	0	0	0
A_3	0	6	0	-3	1	2	0
A_1	1	2	1	-2	0	1	0
A_5	0	3	0	3	0	-1	1
Цільова функція		2	1	-2	0	1	0

Закінчення табл. 5.2

$\Delta_j = Z_j - c_j$		2	0	-1	0	1	0
A_3	0	9	0	0	1	1	1
A_1	1	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
A_2	-1	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Цільова функція		3	1	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

З табл. 5.2 випливає, що $X^* = (4, 1)$, $Z(X^*) = 3$.

На підставі 1-ї теореми двоїстості маємо: $Z(X^*) = F(Y^*) = 3$.

Оскільки $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, то за 2-ю теоремою двоїстості систему обмежень двоїстої задачі запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1; \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Підставивши $X^* = (4, 1)$ у систему обмежень висхідної задачі:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 \leq 2; \\ 4 - 2 \cdot 1 \leq 2; \\ 4 + 1 \leq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} -7 < 2; \Rightarrow y_1 = 0; \\ 2 = 2; \Rightarrow y_2 > 0; \\ 5 = 5; \Rightarrow y_3 > 0. \end{cases}$$

Тоді система обмежень двоїстої задачі прийме вигляд:

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1; \\ -2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Звідки $Y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $F(Y^*) = 3$.

Нехай відомо розв'язок двоїстої задачі $Y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $F(Y^*) = 3$, знайдемо розв'язок висхідної задачі. За 1-ю теоремою двоїстості $F(Y^*) = Z(X^*) = 3$. Оскільки $y_2 > 0, y_3 > 0$, то за 2-ю теоремою двоїстості друга і третя нерівності висхідної задачі перетворюються в рівності:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2; \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Звідки, $X^* = (4, 1)$, $Z(X^*) = 3$.

Розглянемо розв'язок задач методом, заснованим на взаємно однозначній відповідності між змінними: основним змінним висхідної задачі відповідають балансові змінні двоїстої, і навпаки.

Нехай двоїста задача розв'язана симплексним методом (табл. 5.3):

$$F = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 1; \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1; \\ y_i \geq 0, i = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Таблиця 5.3

Базис	C_b	C	2	2	5	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	1	-2	1	1	-1	0
A_5	0	1	-1	2	-1	0	1
Цільова функція		0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$							0
A_3	5	1	-2	1	1	-1	0
A_5	0	2	-3	3	0	-1	1
Цільова функція		5	-12	5	5	-5	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-8	3	0	-5	0
A_3	5	$\frac{1}{3}$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
A_2	2	$\frac{2}{3}$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Цільова функція		3	-7	2	5	-4	-1
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-9	0	0	-4	-1

Розв'язок іншої задачі знайдемо за відповідністю між змінними:

Задача 1	Основні змінні			Балансові змінні	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Задача 2	y_4 y_5 y_1			y_2 y_3	
	Балансові змінні			Основні змінні	

Значення x_j визначаємо за симплексною таблицею (табл. 5.3) у рядку Δ_i у відповідному стовпці, причому значення x_j слід брати за модулем:

$$x_1 \rightarrow y_4, \quad x_1 = |\Delta_4| = 4,$$

$$x_2 \rightarrow y_5, \quad x_2 = |\Delta_5| = 1.$$

Таким чином, розв'язок висхідної задачі: $X^* = (4, 1)$, $Z(X^*) = 3$.

Якщо висхідна задача розв'язана симплексним методом, то розв'язок двоїстої задачі може бути знайдений за формулою: $Y^* = C \cdot A^{-1}$, де C – матриця-рядок коефіцієнтів при базисних змінних цільової функції в оптимальному розв'язанні висхідної задачі; A^{-1} – обернена матриця для матриці A , що є матрицею коефіцієнтів базисних змінних системи обмежень висхідної задачі в оптимальному розв'язку. З табл. 5.3 маємо:

$$C = (1 \quad -1 \quad 0), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y^* = C \cdot A^{-1} = (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right).$$

Таким чином, розв'язок двоїстої задачі: $Y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$, $F(Y^*) = 3$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади практичного використання теорії двоїстості.
2. Сформулюйте правила складання умов взаємно двоїстих задач.
3. Сформулюйте основні теореми теорії двоїстості.
4. Поясніть економічний зміст теорем двоїстості.
5. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?

Тема 6. Економічна інтерпретація двоїстих невідомих.

Двоїстий симплекс-метод

6.1. Економічна інтерпретація двоїстих невідомих.

6.2. Аналіз стійкості двоїстих оцінок.

6.3. Двоїстий симплекс-метод.

6.1. Економічна інтерпретація двоїстих невідомих

Зазвичай вільні члени обмежень типу $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ трактуються як запаси ресурсів, коефіцієнти перед невідомими – як норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції даного виду, балансові невідомі – як залишки ресурсів. При цьому самі нерівності показують, що загальні витрати кожного ресурсу не можуть перевищувати його запаси. Функція цілі, Z_1 максимум якої розшукують, зазвичай трактується як прибуток від реалізації виробленої продукції. На підставі теореми 1.1 прибуток в оптимальному плані можна виразити через запаси ресурсів: $Z_{1max} = F_{2min} = \sum y_i b_i$.

Звідси випливає, що невідома (двоїста до залишку ресурсів u_i) дорівнює першій похідній від максимального прибутку за запасом i -го ресурсу $\frac{\partial Z_{1max}}{\partial b_i} = 0$ і тому маємо таку інтерпретацію: невідома показує, на скільки збільшиться прибуток в оптимальному плані, якщо збільшити запас ресурсу b_i на одиницю. Іншими словами прибуток у разі збільшення ресурсу b_i на Δb_i збільшиться на $y_i \Delta b_i$, при цьому варіація ресурсу Δb_i не повинна перевищувати деякого допустимого рівня.

За наявності обмеження типу $\geq$, коли вільні члени обмежень не можна трактувати як запаси ресурсів, двоїсті невідомі інтерпретуються так: двоїста невідома y_i показує інтенсивність збільшення функції цілі в оптимальному розв'язку при зміні вільного члена b_i на одиницю убік ослаблення відповідного обмеження.

Таким чином, невідомі y_i є певними вартісними оцінками корисності ресурсів. Це не означає, що така реальна ціна ресурсів, за яку їх можна придбати; тіньові ціни характеризують корисність кожного ресурсу для подальшого збільшення прибутку під час розширеного виробництва.

Якщо якийсь ресурс є в надлишку, залишок цього ресурсу відмінний від нуля $u_k > 0$, отже, його двоїста невідома дорівнює нулю $y_i = 0$ і подальше збільшення запасу цього ресурсу не буде приводити до зміни прибутку (тіньова ціна даного ресурсу дорівнює нулю).

Якщо виявилося, що в оптимальному плані вичерпані запаси відразу декількох ресурсів (балансові невідомі дорівнюють нулю, відповідні обмеження реалізуються як строгі рівності), то тіньові ціни y_i будуть показувати найбільш бажаний шлях розширення ресурсів. Якщо в задачі враховано витрати на придбання ресурсів, то найбільш вигідним буде збільшення запасів ресурсів пропорційно їх тіньовим цінам:

$$\Delta b_1 : \Delta b_2 : \Delta b_3 = y_1 : y_2 : y_3.$$

Економічну інтерпретацію двоїстих задач і оцінки дефіцитності ресурсів в околі оптимального плану розглянемо на прикладі.

Приклад. Для виготовлення двох видів продукції A і B використовують три види сировини, яку підприємство може щомісяця закуповувати в обмежених обсягах. Щомісячне знаходження необхідної сировини, витрати його на виготовлення одиниці кожного виду продукції, а також прибуток від реалізації одиниці продукції представлені у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Види сировини	Норми витрат		Запаси, кг
	A	B	
I	9	6	540
II	5	10	500
III	14	7	980
Прибуток, грн	5	6	

Визначити, яку кількість продукції кожного виду підприємство повинно випускати щомісячно, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Позначимо через x_1 і x_2 відповідно кількість продукції A і B , яку підприємство випускає протягом місяця. Критерієм ефективності Z є прибуток від реалізації продукції. Маємо математичну модель задачі:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \leq 540 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 500 \\ 14x_1 + 7x_2 \leq 980 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Складемо двоїсту задачу. Нехай кожному виду сировини поставлена у відповідність оцінка y_1 , y_2 та y_3 . Тоді загальна оцінка сировини F , яка використовується під час виготовлення продукції, становить:

$$F = 540y_1 + 500y_2 + 980y_3 \rightarrow \min, \quad (6.3)$$

а система обмежень:

$$\begin{cases} 9y_1 + 5y_2 + 14y_3 \geq 5, \\ 6y_1 + 10y_2 + 7y_3 \geq 6, \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Задачі (6.1), (6.2) та (6.3), (6.4) утворюють симетричну пару взаємно двоїстих задач. Рішенням вихідної задачі є оптимальний план виробництва продукції A і B , а двоїстої – оптимальна система оцінок. Щоб розв'язати ці задачі, досить розв'язати одну з них. Оскільки висхідна задача містить тільки дві невідомі, то її можна розв'язати графічно. Потім, за теоремою двоїстості, розв'яжемо і другу задачу.

Розв'яжемо висхідну задачу симплексним методом (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Базис	C_b	C	5	6	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	540	9	6	1	0	0
A_4	0	500	5	10	0	1	0
A_5	0	980	14	7	0	0	1
Цільова функція		0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$		0	-5	-6	0	0	0

Закінчення табл. 6.2

A_3	0	240	6	0	1	-0,6	0
A_2	6	50	1/2	1	0	0,1	0
A_5	0	630	21/2	0	0	-0,7	1
Цільова функція		300	3	6	0	0,6	0
$\Delta_j = Z_j - c_j$			-2	0	0	0,6	0
A_1	5	40	1	0	1/6	-0,1	0
A_2	6	30	0	1	-1/12	0,15	0

A_5	0	60	0	0	-7/4	0,25	1
Цільова функція		300	380	5	6	1/3	0,4
$\Delta_j = Z_j - c_j$			0	0	1/3	0,4	0

$$\mathbf{X}^* = (40; 30; 0; 0; 60), \quad \mathbf{Y}^* = (1/3; 2/5; 0).$$

$$F_{\min} = 540 \cdot 1/3 + 500 \cdot 0,4 = 380$$

Оскільки $F_{\min} = Z_{\max}$, то обидві задачі розв'язані правильно.

Підставимо значення двоїстих оцінок $y_1^* = 1/3$, $y_2^* = 2/5$ і $y_3^* = 0$ до системи обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 9 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0,4 = 5, \\ 6 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot 0,4 = 6. \end{cases}$$

Обидва обмеження двоїстої задачі виконуються як рівняння, тобто двоїсті оцінки сировини не перевищують прибуток від реалізації кожного виду продукції. Тому продукцію доцільно виробляти у кількостях, які визначаються оптимальним планом вихідної задачі. Будь-яка зміна початкових умов вихідної задачі може вплинути як на її оптимальний план, так і на систему двоїстих оцінок, тому економічний аналіз з використанням двоїстих оцінок передбачає визначення інтервалу їх стійкості.

Змінні $y_1^* = 1/3$ і $y_2^* = 2/5$ визначають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини відповідно I та II типів. Ці дві оцінки відмінні від нуля і тому використовуються цілком. У цей час двоїста оцінка сировини III типу дорівнює нулю $y_3^* = 0$, тому при оптимальному плані виробництва $\mathbf{X}^*$ залишається певний запас сировини III типу. Таким чином, позитивні умовні оцінки мають тільки ті типи сировини, які повністю використовуються при оптимальному плані виробництва. Отже, двоїсті оцінки характеризують дефіцит сировини, що використовується.

Розглянемо числа, які містяться у стовпці вектора A_3 останньої ітерації симплексної таблиці. Отже, зростання прибутку від реалізації у разі збільшення обсягу сировини I типу на одиницю обумовлено переходом до нового оптимального плану, за яким випуск продукції A збільшується на 1/6 одиниць,

випуск продукції Y зменшується на $1/12$ одиниць, а використання сировини III типу зростає на $7/4$ кг. Відповідно, числа у стовпці вектора A_4 показують, як зміниться оптимальний план, якщо збільшити кількість сировини II типу на $0,4$ кг.

Величина двоїстої оцінки показує, наскільки зросте максимальне значення цільової функції вихідної задачі у разі збільшення кількості сировини відповідного типу на 1 кг. Так, збільшення кількості сировини I типу на 1 кг призведе до того, що з'явиться можливість знайти новий план виробництва, за яким щомісячний загальний прибуток від реалізації виробів може збільшитися на $\Delta Z = 1/3$ грн.

6.2. Аналіз стійкості двоїстих оцінок

Змінні двоїстої задачі визначають темп зміни цільової функції вихідної задачі, якщо змінюється запас i -го виду сировини. Це справедливо в околі точки b_i , а саме поки базис D залишається незмінним. Якщо $y_i^* > 0$, то значення цільової функції вихідної задачі можна збільшити за рахунок збільшення запасів i -ї сировини, оскільки ця сировина буде використовуватися для збільшення випуску продукції. Якщо $y_i^* = 0$, то збільшення i -го виду сировини не супроводжується збільшенням цільової функції, так як цієї сировини достатньо. Наведені співвідношення відповідають другій теоремі двоїстості і є основою для теорії доповнюючої нежорсткості. Система рівнянь (6.5) показує, що зміна величини b_i супроводжується зміною екстремального значення цільової функції $Z_{\max}$ на величину $|y_i^*|$ і може бути охарактеризована лише тоді, коли при зміні b_i значення змінних y_i^* в оптимальному плані не змінюється. Це справедливо для тих $b_i + \Delta b_i$, для яких немає невід'ємних чисел серед компонент вектора B , де матриця D^{-1} є оберненою до матриці D , утвореної з компонент базисних векторів, що визначали початковий план вихідної задачі:

$$G = D^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots\dots\dots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Отже, якщо знайдено рішення висхідної задачі, то без особливих труднощів можна провести аналіз стійкості двоїстих оцінок щодо зміни величин b_i . Це дозволяє оцінити стійкість оптимального плану двоїстої задачі щодо зміни b_i , визначити ступінь впливу зміни b_i на максимальне значення цільової функції висхідної задачі, що дає можливість знайти найбільш доцільне спрямування можливих змін b_i .

Приклад. Необхідно знайти матрицю D^{-1} , яка є оберненою до матриці D , утвореної з компонентів базисних векторів A_3 , A_4 і A_5 . Матрицю D^{-1} можна записати за останньою ітерацією симплексної таблиці (табл. 6.2):

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -0,1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0,15 & 0 \\ -\frac{7}{4} & 0,25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді компоненти вектора G (6.5) варто записати таким чином:

$$D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots\dots\dots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -0,1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0,15 & 0 \\ -\frac{7}{4} & 0,25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 540 + \Delta b_1 \\ 500 + \Delta b_2 \\ 980 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + \frac{1}{6}\Delta b_1 - 0,1\Delta b_2 \\ 30 + \frac{1}{2}\Delta b_1 + 0,15\Delta b_2 \\ 60 - \frac{7}{4}\Delta b_1 + 0,25\Delta b_2 + \Delta b_3 \end{pmatrix}.$$

Слід визначити, за яких значень Δb_i ($i = \overline{1,3}$) ці компоненти невід'ємні:

$$\begin{cases} 40 + \frac{1}{6}\Delta b_1 - 0,1\Delta b_2 \geq 0, \\ 30 + \frac{1}{2}\Delta b_1 + 0,15\Delta b_2 \geq 0, \\ 60 - \frac{7}{4}\Delta b_1 + 0,25\Delta b_2 + \Delta b_3 \geq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Якщо запаси сировини I та II типів не змінюються, система має рішення:

$$\begin{cases} \Delta b_1 = 0 \\ \Delta b_2 = 0 \\ \Delta b_3 \geq -60 \end{cases} \Rightarrow \Delta b_3 \in [-60; +\infty).$$

Тобто запаси сировини III типу можуть необмежено зростати або зменшуватися в межах 60 кг, що не супроводжується зміною плану двоїстої задачі $Y^* = (1/3; 2/5; 0)$. Оскільки за цим планом оцінка, що відповідає сировині III типу, дорівнює нулю, екстремальне значення цільової функції у разі зміни кількості сировини III типу не змінюється.

Якщо залишаються незмінними запаси сировини I і III типів, система нерівностей (6.7) дає рішення:

$$\begin{cases} \Delta b_1 = 0 \\ \Delta b_3 = 0 \\ -240 \leq \Delta b_2 \leq 400 \end{cases} \Rightarrow \Delta b_2 \in [-240; 400].$$

У разі зміни сировини II типу в межах $\Delta b_2 \in [-240; 400]$ екстремальне значення цільової функції змінюється на величину $\Delta Z_{\max} = \frac{2}{5} \cdot \Delta b_2$, що пов'язано із зміною оптимального плану виробництва. При постійних запасах сировини II та III типів зміна запасів сировини I типу в межах $\Delta b_1 \in [-240; 240/7]$ не призведе до зміни оптимального плану двоїстої задачі, а екстремальне значення цільової функції (у разі відповідної зміни плану виробництва) зміниться на величину $\Delta Z_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \Delta b_1$.

Отже, якщо змінюються запаси сировини тільки одного з типів, інтервал стійкості двоїстих оцінок наступний:

$$\begin{aligned} \Delta b_3 &\in [-60; +\infty), \text{ якщо } \Delta b_1 = 0, \quad \Delta b_2 = 0; \\ \Delta b_2 &\in [-240; 400], \text{ якщо } \Delta b_1 = 0, \quad \Delta b_3 = 0; \\ \Delta b_1 &\in [-240; 240/7], \text{ якщо } \Delta b_2 = 0, \quad \Delta b_3 = 0. \end{aligned}$$

Слід перевірити, чи змінюється оптимальний план двоїстої задачі, якщо збільшити запаси всіх видів сировини на 20, 30 і 10 кг відповідно. Для цього необхідно підставити дані, наведені в системі нерівностей (6.6):

$$\begin{cases} 40 + 1/6 \cdot 20 - 0,1 \cdot 30 > 0 \\ 30 - 1/2 \cdot 20 + 0,15 \cdot 30 > 0 \\ 60 - 7/4 \cdot 20 + 0,25 \cdot 30 + 10 > 0 \end{cases}.$$

Оскільки система нерівностей виконується, то оптимальний план двоїстої задачі залишається незмінним. Збільшення сировини призведе до збільшення максимального значення цільової функції вихідної задачі на величину:

$$\Delta Z_{\max} = \Delta b_1 \cdot y_1^* + \Delta b_2 \cdot y_2^* + \Delta b_3 \cdot y_3^* = 20 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot 0 = \frac{56}{3}.$$

Слід зауважити, що доцільно розглянути економічний зміст вимог позитивності оцінок вихідної задачі, якщо її цільова функція досліджується на максимум. Якщо $\Delta_j = Z_j - c_j < 0$, то питома вага вартості ресурсів Z_j , які необхідні для збільшення рівня виробничої діяльності на одиницю, менше ніж питомий прибуток, тому необхідно ввести x_j в базис, що еквівалентно збільшенню небазисної змінної x_j від нуля до певного позитивного значення. Отже, потрібно перейти до нового опорного плану. Процес продовжується до тих пір, поки всі оцінки стануть позитивними, тобто для всіх видів сировини питома вага дорівнюватиме або стане меншою ніж питомий прибуток.

6.3. Двоїстий симплекс-метод

У теорії подвійності вихідна задача вирішується симплекс-методом, двоїста задача вирішується двоїстим симплекс-методом. Існує цілий клас задач, наприклад задача про дієту, умови якої природним чином формулюються відразу в другій стандартній формі. Для вирішення таких задач двоїстий симплекс-метод більш зручний, ніж звичайний алгоритм симплекс-методу.

Якщо розглядати першу симплексну таблицю з одиничним додатковим базисом, то маємо, що в стовпцях записана висхідна задача, а в рядках – двоїста. Оцінками плану висхідної задачі є c_j , а оцінками плану двоїстої задачі – b_i . Розв’язавши двоїсту задачу в симплексній таблиці, в якій записана висхідна задача, можна знайти оптимальний план двоїстої задачі, разом з оптимальним планом висхідної задачі. Цей метод називається **двоїстим симплексним методом**.

Розглянемо висхідну задачу у вигляді:

$$Z = CX \rightarrow \min$$

$$AX = A_0,$$

$$X \geq 0,$$

тоді двоїста задача така:

$$F = YA_0^T \rightarrow \max$$

$$YA \leq C^T.$$

Нехай базис складають вектори $A_1, A_2, \dots, A_l, \dots, A_m$, при якому хоча б одна з компонент вектора $X = D^{-1}A_0 = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_m)$ від’ємна, наприклад, $x_l < 0$. Для всіх векторів A_j виконується $Z_j - C_j \leq 0$. За теоремами двоїстості маємо план двоїстої задачі $Y = C_0 D^{-1}$, але він не є оптимальним, оскільки базис містить від’ємну компоненту і не є планом висхідної задачі, при цьому оцінки оптимального плану двоїстої задачі мають бути невід’ємними. Тут вектор A_l слід виключити з базису висхідної задачі, а вектор, якому відповідає від’ємна оцінка, включити в базис двоїстої задачі. Якщо в l -му рядку не міститься $x_{lj} < 0$, то лінійна функція двоїстої задачі не обмежена в багатокутнику розв’язків, а висхідна задача не має розв’язків. Якщо ж в l -му рядку міститься $x_{lj} < 0$, то обчислюємо $\theta_{0j} = \min \left\{ \frac{x_i}{x_{ik}} \right\} \geq 0$ та визначаємо вектор, що відповідає $\max(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$ у ході розв’язування висхідної задачі на мінімум і $\min(\theta_{0j}(Z_j - C_j))$ у ході розв’язування висхідної задачі на максимум. Цей вектор включають в базис висхідної задачі. Вектор, що слід виключити з базису висхідної задачі визначається направляючим рядком.

Якщо $\theta_{0j} = \min \left\{ \frac{x_i}{x_{ik}} \right\} = 0$, тобто $x_i = 0$, то направляючого вибирають x_{ij} ,

якщо $x_{ij} > 0$, то процес продовжуємо до отримання $X \geq 0$. Таким чином знаходимо оптимальний план двоїстої задачі, а отже, і оптимальний план висхідної задачі. За алгоритмом двоїстого симплексного методу умову $Z_j - C_j \leq 0$ можна не враховувати до виключення всіх $x_i < 0$, і далі оптимальний план знаходимо звичайним симплексним методом. Це зручно використовувати, якщо всі $x_i < 0$, тоді для переходу до плану висхідної задачі за одну ітерацію необхідно θ_{0j} визначити не по мінімуму, а по максимуму,

тобто $\theta_{0j} = \max \left\{ \frac{x_i}{x_{ik}} \right\} \geq 0$.

Двоїстий симплексний метод зручно використовувати в задачах лінійного програмування, в яких система обмежень містить вільні члени будь-якого знаку.

Приклад. Знайти $F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ за обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічної форми.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \\ -x_1 - 4x_2 + x_4 = -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Розв'язування прикладу здійснимо в симплекс-таблиці.

№ п/п	Базис	$C_{\text{баз}}$	C_j	2	3	0	0	Примітки
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	A_3	0	-6	-3	-2	1	0	$\theta = \min \left\{ \frac{-b_i}{-a_{ik}} \right\}$

2	A_4	0	-4	-1	-4	0	1	
	Δ_1		0	-2	-3	0	0	
3	A_1	2	2	1	2/3	-1/3	0	(3)=(1):[-3]
4	A_4	0	-2	0	-10/3	-1/3	1	(4)=(2)+(3)
	Δ_2		4	0	-5/3	-2/3	0	
5	A_1	2	8/5	1	0	-2/5	1/5	(5)=(3)+(6)[-2/3]
6	A_2	3	3/5	0	1	1/10	-3/10	(6)=(4):[-10/3]
	Δ_3		5	0	0	-1/2	-1/2	

$$F_{\min} = Z_{\max} = 5, \quad X^* = (8/5, 3/5, 0, 0).$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте економічну інтерпретацію властивостей двоїстих оцінок.
2. Яка економічна інтерпретація двоїстих невідомих?
3. У чому полягає аналіз стійкості двоїстих оцінок?
4. У чому суть двоїстого симплекс-методу?

7. Аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач

7.1. Огляд задач в економіці, які зводяться до розв'язання задач лінійного параметричного програмування.

7.2. Задачі ЛП з параметрами у вільних членах обмежень.

7.1. Огляд задач в економіці, які зводяться до розв'язання задач лінійного параметричного програмування

Під час обґрунтування управлінського рішення в економічній задачі реального підприємства стикаються з проблемою, що значення обсягів ресурсів, ціни, прибуток, собівартість можуть змінюватись у відповідних межах. В даній ситуації важливо знати поведінку оптимального плану у разі зміни висхідних даних залежно від параметрів, які вводять в задачу для її розв'язання. Розроблено спеціальний розділ – параметричне програмування, в

якому розглядаються оптимізаційні задачі з цільовими функціями й обмеженнями, що залежать від параметрів.

Розглянемо декілька прикладів типових оптимізаційних задач параметричного програмування. В задачі планування виробництва (3.1) – (3.2): знайти максимум лінійної функції цілі

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min),$$

за наявності лінійної системи обмежень-нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \\ (i = \overline{1, m}), \end{cases}$$

де усі $x_j \geq 0$; n – кількість видів продукції; m – кількість видів ресурсів; коефіцієнти c_j цільової функції виражають ціну одиниці продукції j -го виду, x_j – кількість одиниць j -ї продукції, що планується реалізовувати. Якщо ціна на продукцію залежить від сезону, то вона є функцією часу t , а для кожного виду продукції вона змінюється по-різному, що враховується коефіцієнтом α_j . Тому вартість продукції, що описується цільовою функцією, складається зі сталої частини – $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ і змінної $\sum_{j=1}^n \alpha_j t x_j$, яка залежить від терміну зберігання t , де $t \in I_1$, I_1 – вибраний інтервал.

Нехай залежність ціни від параметра t лінійна, а обмеження задачі залишились тими ж, де a_{ij}, b_i – сталі, тоді ЗЛП буде мати вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^n (c_j + \alpha_j t) x_j \rightarrow \max(\min), \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \\ x_j \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}), t \in I_1. \end{cases} \quad (7.2)$$

До задачі (7.1) – (7.2) зводить і задача, в якій c_j означають кількість деякої продукції, яка виробляється за j -ю технологією, а x_j – відрізок терміну роботи за цією технологією за умови, що змінення інтенсивності виробництва за кожною технологією лінійно залежить від деякого параметру t . Тоді

функція цілі виражає загальну кількість випущеної продукції за планом $(x_1, \dots, x_n)$ використання різних технологій залежно від параметра t з виконанням системи обмежень (7.2).

Якщо в задачі (3.1) – (3.2) можуть змінюватись обсяги ресурсів b_i залежно від параметра t , а решта коефіцієнтів задачі a_{ij}, c_j сталі, тоді маємо ЗЛП у вигляді:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + \gamma_i t, \\ x_j \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}), t \in I_2, \end{cases}$$

$(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ – задані значення, I_2 – заданий інтервал.

Існують також ситуації в економці, коли коефіцієнти a_{ij} , що є нормами витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції також змінюються і залежать від деякого параметра t і при цьому і решта коефіцієнтів задачі c_j, b_i також залежать від одного параметра. Тоді задача має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^n (c_j + \alpha_j t) x_j \rightarrow \max(\min),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \beta_{ij} t) x_j \leq b_i + \gamma_i t, \\ x_j \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}), t \in I_2, \end{cases}$$

при цьому допустимі області змінення параметра t , а також сталі $\alpha_j, \beta_{ij}, \gamma_i$ визначають, виходячи з реальних виробничих умов.

7.2. Задачі ЛП з параметрами у вільних членах обмежень

Володіння двоїстих невідомих u_i дозволяє встановити відносну цінність кожного дефіцитного ресурсу і з'ясувати, запаси яких ресурсів вигідно змінювати, і в якій пропорції. Однак неясно, до яких меж можна збільшувати запас одного, нехай навіть найбільш дефіцитного ресурсу, оскільки з його збільшенням будуть вичерпані запаси інших ресурсів і вже нестача інших ресурсів буде стримувати можливий подальший ріст прибутку. Для того щоб

з'ясувати, в яких межах варіації ресурсів знайдений план залишається оптимальним і допустимим, потрібно вирішувати задачу з параметрами. У ході вирішення задач ЛП з параметрами у вільних членах $b = b_0 + b_1 \cdot t_1 + b_2 \cdot t_2$ в симплекс-таблицю вводимо кілька стовпців вільних членів b_0, t_1, t_2 . Після визначення оптимального рішення по першому (основному) стовпцю b_0 слід виписати комбіноване рішення з урахуванням інших стовпців вільних членів і провести аналіз залежності рішення від параметрів. Якщо у разі зміни параметрів комбінований вільний член у будь-якому обмеженні змінює знак і стає від'ємним, то отримане рішення стає неприпустимим. У цьому випадку зручно скористатися ітерацією двоїстого симплекс-методу, в результаті якої умова оптимальності не буде порушена і буде отримане оптимальне рішення для іншої області зміни параметра.

Облік параметрів необхідний для перевірки стійкості знайденого статичного рішення, для визначення його чутливості до неминучих малих порушень умов задачі. Для ілюстрації цього розглянемо задачу.

Приклад. У табл. 7.1 наведені норми витрат ресурсів (сталь, кольорові метали, завантаження токарних верстатів) для виробництва двох видів виробів A і B . У цій же таблиці вказаний прибуток від виробництва і реалізації кожного виробу.

Таблиця 7.1

Види ресурсів	A	B	Запаси
Сталь, кг	10	70	570
Кольорові метали, кг	20	50	420
токарні верстати, верстато-г.	300	400	5 600
Прибуток, тис. грн	3	8	

Необхідно знайти оптимальний план виробництва продукції і перевірити його на стійкість стосовно варіацій запасів ресурсів.

Позначимо через x_1, x_2 – кількість виробів кожного виду і сформулюємо умови задачі у вигляді.

Слід знайти максимальне значення функції цілі.

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max ,$$

за обмежень

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 570, \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420, \\ 300x_1 + 400x_2 \leq 5600, \end{cases}$$

$$\text{усі } x_j \geq 0.$$

Можна скоротити перші дві нерівності на 10, а третя нерівність – на 100; це призведе до того, що норми витрат a_{ij} , запаси b_i , залишки u_i і варіації $t_i = \Delta b_i$ ресурсів будуть вимірюватися у десятках кг і сотнях верстато-годин відповідно.

У цій задачі необхідно знайти не тільки одне статичне рішення для конкретних значень вільних членів, але також дослідити оптимальне рішення на стійкість при можливих варіаціях вільних членів. При економічній інтерпретації потрібно не тільки отримати оптимальний план виробництва продукції при заданих запасах ресурсів, але також вирішити деякі виробничі питання, наприклад: які ресурси можна скоротити і на скільки, які ресурси вигідно збільшити, в якій пропорції і на скільки. Тому загальний стовпець вільних членів необхідно представити у вигляді чотирьох доданків $b = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3$ і ввести 3 параметри – по одному на кожен вільний член. Тут b_0 – вихідний стовпець вільних членів, а коефіцієнти стовпців параметрів t_2, t_3 утворюють в симплекс-таблиці одиничну матрицю.

Слід переписати систему обмежень з урахуванням параметрів:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 57 + t_1, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 42 + t_2, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 56 + t_3, \end{cases}$$

привести задачу до канонічної форми і заповнити симплекс-таблицю (табл. 7.2):

Таблиця 7.2

		C				3	8	0	0	0	
$\#$	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
1	A_3	57	1	0	0	1	7	1	0	0	
2	A_4	42	0	1	0	2	5	0	1	0	
3	A_5	56	0	0	1	3	4	0	0	1	
4	Δ_1	$Z_1 = 0$				-3	-8	0	0	0	

Вирішуємо задачу, орієнтуючись тільки на основний стовпець вільних членів b_0 , не звертаючи поки уваги на стовпці параметрів t_1, t_2, t_3 . Спочатку потрібно ввести в базис x_2 (табл. 7.3)

Таблиця 7.3

		C				3	8	0	0	0	
№	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
5	A_2	$^{57}/_7$	$^{1}/_7$	0	0	$^{1}/_7$	1	$^{1}/_7$	0	0	[1] : 7
6	A_4	$^9/_7$	$^{-5}/_7$	1	0	$^9/_7$	0	$^{-5}/_7$	1	0	[2] – [5]×5
7	A_5	$^{164}/_7$	$^{-4}/_7$	0	1	$^{17}/_7$	0	$^{-4}/_7$	0	1	[3] – [5]×4
8	Δ_2	$Z_2 =$ $^{456}/_7$	$^8/_7$	0	0	$^{-13}/_7$	0	$^8/_7$	0	0	

Тепер ввести в базис x_1 , оскільки $\Delta_2 < 0$ (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

		C				3	8	0	0	0	
№	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
9	A_1	1	$^{-5}/_9$	$^7/_9$	0	1	0	$^{-5}/_9$	$^7/_9$	0	[6] : $^9/_7$
10	A_2	8	$^2/_9$	$^{-1}/_9$	0	0	1	$^2/_9$	$^{-1}/_9$	0	[5] – [9]× $^{1}/_7$
11	A_5	21	$^7/_9$	$^{-17}/_9$	1	0	0	$^7/_9$	$^{-17}/_9$	1	[7] – [9]× $^{17}/_7$
12	Δ_3	$Z_3 =$ 67	$^1/_9$	$^{13}/_9$	0	0	0	$^1/_9$	$^{13}/_9$	0	

Після цих двох ітерацій у рядку 12 (рядку функції цілі) більше немає від'ємних елементів. Треба виписувати отримане оптимальне рішення разом з інформацією в стовпцях t_1, t_2, t_3 :

$$x_1 = 1 - ^5/_9 t_1 + ^7/_9 t_2;$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 8 + \frac{2}{9} t_1 - \frac{1}{9} t_2; \\
x_5 &= 21 + \frac{7}{9} t_1 - \frac{17}{9} t_2 + t_3; \\
x_3 &= x_4 = 0; \\
z_{max} &= 67 + \frac{1}{9} t_1 + \frac{13}{9} t_2.
\end{aligned}$$

Слід нагадати, що вільні члени функції цілі записані в симплекс-таблиці із зворотними знаками.

Потрібно зауважити, що стовпці параметрів $t_1 = \Delta b_1$, $t_2 = \Delta b_2$, $t_3 = \Delta b_3$ в таблицях повністю дублюються стовпцями залишків ресурсів x_3 , x_4 , x_5 , тому немає особливої необхідності їх спеціально обчислювати. У даному прикладі всі обмеження були обмеженнями-нерівностями одного типу (типу $\leq$), тому стовпці при балансових невідомих у вихідній таблиці повністю збігалися зі стовпцями параметрів. При обмеженнях-нерівностях протилежного типу (типу $\geq$) стовпці параметрів відрізняються від стовпців балансових невідомих тільки знаком. У всякому разі, у ході вирішення більшості задач ЛП із стандартної симплекс-таблиці можна виписати не один статичний розв'язок, а більш загальний розв'язок з урахуванням можливих варіацій запасів ресурсів (стовпці параметрів потрібно вводити тільки в разі обмежень-рівностей, для яких балансові невідомі тотожно рівні нулю). У даній задачі вийшло, що прибуток в оптимальному плані не залежить від $t_3 = \Delta b_3$. Це природно, оскільки в цьому оптимальному плані третій ресурс не витрачений повністю, залишок цього ресурсу відмінний від нуля $x_5 = 21$ (тобто можна скоротити надлишковий запас $b_3 = 56$ на 21 одиницю без скорочення виробництва). Перші два ресурси витрачені повністю $x_3 = x_4 = 0$, і саме це стримує подальше зростання прибутку. Розглядаючи залежність прибутку від параметрів $z_{max} = 67 + \frac{1}{9} t_1 + \frac{13}{9} t_2$, варто зауважити, що збільшення запасу 1-го ресурсу на одиницю (на 10 кг) призводить до збільшення прибутку на $\frac{1}{9}$, а збільшення запасу 2-го ресурсу призводить до збільшення прибутку на $\frac{13}{9}$ вартісних одиниць (тис. грн). З цих перших двох ресурсів другий є більш дефіцитним, більш корисним для отримання максимального прибутку. У процесі розширення виробництва треба в першу чергу вкладати кошти у збільшення запасу другого ресурсу.

Найбільша віддача буде при збільшенні ресурсів у пропорції

$$\Delta b_1 : \Delta b_2 : \Delta b_3 = \frac{1}{9} : \frac{13}{9} : 0 = 1 : 13 : 0.$$

Але як дізнатися, до яких меж можна змінювати запаси ресурсів?

Необхідно спочатку варіювати запас найбільш дефіцитного другого ресурсу (кольорові метали) і розглянути, в яких межах зміни параметра t_2 знайдений план залишається допустимим. За будь-якими можливими значеннями параметра компоненти плану повинні залишатися невід'ємними:

$$x_1 = 1 + \frac{7}{9} t_2 \geq 0; \quad \text{звідки } t_2 \geq -\frac{9}{7} = -1,286;$$

$$x_2 = 8 - \frac{1}{9} t_2 \geq 0; \quad \text{звідки } t_2 \leq 72;$$

$$x_5 = 21 - \frac{17}{9} t_2 \geq 0; \quad \text{звідки } t_2 \leq \frac{189}{17} = 11,118;$$

$$x_3 = x_4 = 0;$$

$$z_{\max} = 67 + \frac{13}{9} t_2.$$

Виявляється, знайдений план залишається оптимальним і допустимим тільки в інтервалі варіювання параметра $-1,286 \leq t_2 \leq 11,118$, або ж для таких значень запасу другого ресурсу: $40,714 \leq b_2 \leq 53,118$. Занепокоєння тут викликає нижня межа – варто тільки зменшити заданий запас $b_2 = 43$ всього на 1,3 одиниці (тобто на 3 %), як план стає неприпустимим (компонента x_1 буде негативною). Як кажуть, знайдений план нестійкий щодо малих змін вільних членів. Природно, щоб не було неприємної несподіванки, треба заздалегідь знайти оптимальне рішення для $b_2 \leq 40,714$.

Варто продублювати далі попередню табл. 7.4 (рядки 9 – 12):

№	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
9	A_1	1	$-\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	0	1	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	0	$[1] : \frac{9}{7}$
10	A_2	8	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	$[5] - [9] \times \frac{1}{7}$
11	A_5	21	$\frac{7}{9}$	$-\frac{17}{9}$	1	0	0	$\frac{7}{9}$	$-\frac{17}{9}$	1	$[7] - [9] \times \frac{17}{7}$
12	Δ_3	$Z_3 = 67$	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{9}$	0	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{9}$	0	

При $b_2 < 40,714$ ($t_2 < -1,286$) комбінований вільний член в 1-му обмеженні (9-й рядок таблиці) $b_2 = 1 + \frac{7}{9} t_2$ стає негативним.

Потрібно виправити цю ситуацію однією ітерацією двоїстого симплекс-методу, для чого в рядку 9 знаходимо негативні елементи (якщо таких немає, то задача для цих значень параметра рішення не має); в рядку 9 є тільки один

негативний елемент (виділений рамочкою і кольором), варто взяти його за розв'язний і провести заміну базису ітерацією Гаусса – Жордана (табл. 7.5):

Таблиця 7.5

№	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
13	A_3	$-9/5$	1	$-7/5$	0	$-9/5$	0	1	$-7/5$	0	$[9] : (-5/9)$
14	A_2	$42/5$	0	$1/5$	0	$2/5$	1	0	$1/5$	0	$[10] - [13] \times 1/7$
15	A_5	$112/5$	0	$-4/5$	1	$7/5$	0	0	$-4/5$	1	$[11] - [13] \times 17/7$
16	Δ	$Z =$ $336/5$	0	$8/5$	0	$1/5$	0	0	$8/5$	0	

Необхідно виписувати новий оптимальний розв'язок і визначити припустимі межі варіювання параметра t_2 , для яких справедливий знайдений розв'язок:

$$x_3 = -9/5 - 7/5 t_2 \geq 0; \quad \text{звідки} \quad t_2 \leq -9/7 = -1,286;$$

$$x_2 = 42/5 + 1/5 t_2 \geq 0; \quad \text{звідки} \quad t_2 \geq -42;$$

$$x_5 = 112/5 - 4/5 t_2 \geq 0; \quad \text{звідки} \quad t_2 \leq 28;$$

$$x_1 = x_4 = 0;$$

$$Z_{\max} = 336/5 + 8/5 t_2.$$

Новий розв'язок справедливий на інтервалі $-42 \leq t_2 \leq -1,286$, або $0 \leq b_2 \leq 40,714$. З фізичних міркувань очевидно, що параметр t_2 не може бути менше -42 , оскільки запас другого ресурсу не може бути негативним (до речі, з рядка 14 випливає, що при $t_2 < -42$ невід'ємних розв'язків немає, так як у цьому рядку з від'ємним вільним членом немає невід'ємних коефіцієнтів при вільних невідомих).

Виключно в навчальних цілях необхідно знайти оптимальні розв'язки даної задачі для всіх значень параметра t_2 ($-42 \leq t_2 < \infty$) при $t_1 = t_3 = 0$. Вже знайдені розв'язки в діапазонах $-42 \leq t_2 \leq -1,286$ і $-1,286 \leq t_2 \leq 11,118$. Для аналізу діапазону $t_2 > 11,118$ потрібно повернутися до попередньої табл. 7.4 (рядки 9 – 12).

№	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
9	A_1	1	$-5/9$	$7/9$	0	1	0	$-5/9$	$7/9$	0	
10	A_2	8	$2/9$	$-1/9$	0	0	1	$2/9$	$-1/9$	0	
11	A_5	21	$7/9$	$-17/9$	1	0	0	$7/9$	$-17/9$	1	
12	Δ	$Z = 67$	$1/9$	$13/9$	0	0	0	$1/9$	$13/9$	0	

Знову аналізуючи розв'язок на інтервалі $-1,286 \leq t_2 \leq 11,118$, переконуємося, що при $t_2 > 11,118$ комбінований вільний член $b_3 = 21 - 17/9 t_2$ у 3-му обмеженні (рядок 11) змінює знак. У цьому рядку є один від'ємний елемент, варто приймати його за розв'язний; у результаті ітерації двоїстого симплекс-методу з цим розв'язним елементом отримуємо (в рядках 17 – 20) черговий розв'язок, який справедливий для всіх $t_2 > 11,118$ (табл. 7.6):

Таблиця 7.6

№	Бази с	A_0	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Примітки
17	A_4	$-189/17$	$-7/17$	1	$-9/17$	0	0	$-7/17$	1	$-9/17$	$[11] : (-17/9)$
18	A_1	$164/17$	$-4/17$	0	$7/17$	1	0	$-4/17$	0	$7/17$	$[9] - [17] \times 7/9$
19	A_2	$115/17$	$3/17$	0	$-1/17$	0	1	$3/17$	0	$-1/17$	$[10] + [17] \times 1/9$
20	Δ	$Z = 1412/17$	$12/17$	0	$13/17$	0	0	$12/17$	0	$13/17$	

Випишуємо останній розв'язок:

$$x_4 = -189/17 + t_2 \geq 0; \text{ звідки } t_2 \geq 189/17 = 11,118;$$

$$x_1 = 164/17 \geq 0; \quad x_2 = 115/17 \geq 0; \quad Z_{\max} = 1412/17.$$

Отже, знайдені оптимальні розв'язки для всіх значень параметра t_2 . Далі наведена зведена таблиця розв'язків для всіх значень запасу кольорових металів $b_2 = 42 + t_2$, десятки кг (табл. 7.7):

Таблиця 7.7

$b_2 < 0$	Розв'язків немає		Немає
$0 \leq b_2 \leq 40,714$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0,2 b_2$	$z_{\max} = 1,6 b_2$
$40,714 \leq b_2 \leq 53,118$	$x_1 = 0,778 b_2 - 31,667$	$x_2 = 12,667 - 0,111 b_2$	$z_{\max} = 1,444 b_2 + 6,333$
$b_2 > 53,118$	$x_1 = 9,647$	$x_2 = 8,765$	$z_{\max} = 83,059$

Варто раз відзначити, що стовпці параметрів t_i повністю дублюються в таблицях стовпцями балансових невідомих y_i , тому не було особливої необхідності заздалегідь передбачати їх у вихідній симплекс-таблиці.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування з параметрами у вільних членах.
2. Для яких цілей потрібно врахування параметрів у вільних членах?
3. Приведіть етапи розв'язання задачі лінійного програмування з параметрами у вільних членах.

8. Транспортна задача. Методи розв'язання транспортної задачі

8.1. Загальна постановка транспортної задачі.

8.2. Способи складання першого базисного плану.

8.3. Критерій оптимальності. Метод потенціалів.

8.4. Виродження плану транспортної задачі.

8.1. Загальна постановка транспортної задачі

Маємо m пунктів відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ і n пунктів призначення $B_1, B_2, \dots, B_n$. Відомі запаси a_i продукції у кожного постачальника A_i , потреби b_j кожного споживача B_j і тарифи c_{ij} (вартість перевезення одиниці товару від пункту A_i в пункт B_j). Потрібно скласти оптимальний план перевезення, тобто визначити, яка кількість вантажу x_{ij} має бути відправлена з кожного пункту

відправлення в кожний пункт призначення, щоб загальна вартість всіх перевезень була найменшою.

Дано: тарифи, запаси і потреби

Знайти: оптимальний план перевезення вантажів

Поста- чальники	Споживачі				Запа- си
	B_1	B_2		B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
...	...	...		...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2		b_n	

Поста- чальники	Споживачі				Запа- си
	B_1	B_2		B_n	
A_1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	a_2
...	...	...		...	...
A_m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2		b_n	

Якщо з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення заплановано перевезення x_{ij} кількість вантажу, то вартість кожного перевезення буде $c_{ij}x_{ij}$, а

вартість всього плану перевезень – $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$. Кількість вивезеного товару від

A_i не може перевищувати його запасу a_i :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i :$$

кількість привезеного товару в B_j не може перевищувати потреби b_j :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j .$$

Якщо $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то транспортна задача називається збалансованою або

закритою. У цьому випадку весь вироблений товар повинен бути вивезений, усі потреби повинні бути задоволені:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i , \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j . \end{cases}$$

Математична модель транспортної задачі:

Знайти найменше значення лінійної функції:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (8.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Теорема. Будь-яка транспортна задача, у якій сумарний обсяг запасів дорівнює сумарному обсягу потреб, має розв'язок.

Доведення. Для доведення теореми слід показати, що при заданих умовах існує хоча б один план задачі і лінійна функція на множині планів обмежена.

Нехай $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = M > 0$. Тоді величини $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}$ є планом, оскільки вони задовольняють системі обмежень (8.2), а саме підставляючи x_{ij} в дану систему обмежень маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{M} M = b_j. \end{aligned}$$

Виберемо зі значень c_{ij} найбільше $C' = \max c_{ij}$ і замінимо в лінійній функції (8.1) всі коефіцієнти на C' , тоді, враховуючи $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq C' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C' \sum_{i=1}^m a_i = C' M.$$

Виберемо зі значень c_{ij} найменше $C'' = \min c_{ij}$ і замінимо в лінійній функції (8.1) всі коефіцієнти на C'' , тоді, враховуючи $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq C'' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C'' \sum_{i=1}^m a_i = C'' M.$$

Об'єднуючи розглянуті дві нерівності в одну, отримаємо

$$C' M \leq Z \leq C'' M,$$

тобто лінійна функція обмежена на множині планів транспортної задачі. ■

Якщо транспортна задача незбалансована, то її можна закрити введенням фіктивного постачальника або фіктивного споживача:

якщо $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ вводиться фіктивний постачальник A_ϕ , запаси якого

дорівнюють $a_\phi = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, тарифи при цьому $c_\phi = 0$;

якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ вводиться фіктивний споживач B_ϕ , потреби якого

дорівнюють $b_\phi = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, тарифи при цьому $c_\phi = 0$.

8.2. Способи складання першого базисного плану

Оптимальний план перевезень треба шукати тільки серед базисних планів, в яких число відкритих маршрутів (ненульових x_{ij}) найменше.

Система обмежень транспортної задачі містить mn невідомих і $m+n$ рівнянь, але так як $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то одне з рівнянь виявляється зайвим, і система обмежень має містити $r = m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь, а отже не вироджений опорний план має включати $m + n - 1$ додатних компонент або перевезень.

Якщо транспортна задача розв'язується у таблиці, то клітинки, які мають відмінні від нуля перевезення, називають зайнятими, решту клітинок – незайнятими. Зайняті клітинки відповідають базисним невідомим, і для невиродженого опорного плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$. Опорність плану обумовлюється його ациклічністю, тобто в таблиці не можна побудувати замкнутий цикл, всі вершини якого знаходяться в зайнятих клітинках.

Циклом називають послідовну сукупність клітинок вигляду $(i_1 j_1)(i_1 j_2) \times (j_2 i_2) \dots (j_1 i_m)$, в якому дві і тільки дві сусідні клітинки розміщені в одному стовпці або одному рядку таблиці, причому остання клітинка знаходиться в тому ж рядку або стовпці, що і перша. Побудова циклів розпочинається з будь-якої зайнятої клітинки і потім переходять по стовпчику

або по рядку в іншу зайняту клітинку, при цьому роблять повороти під прямим кутом у зайнятих клітинках і рухаються до іншої зайнятої клітинки по рядку або по стовпцю для повернення в першопочаткову клітинку. Якщо таке повернення можливе, то отриманий цикл і план не є опорним, в противному випадку – опорний.

Для складання першого опорного плану розроблено декілька методів, з яких найпростішими є діагональний метод (північно-західного кута) і метод найменшої вартості.

Приклад. Маємо 3 пункти відправлення і 4 пункти призначення. Відомі запаси a_i продукції у кожного постачальника A_i , потреби b_j кожного споживача B_j і тарифи c_{ij} (вартість перевезення одиниці товару від пункту A_i в пункт B_j). Потрібно скласти оптимальний план перевезення, тобто визначити, яка кількість вантажу x_{ij} має бути відправлена з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення, щоб загальна вартість всіх перевезень була найменшою.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	7	46
A_2	1	1	6	4	34
A_3	3	5	9	4	40
Потреби	40	35	30	45	150

Побудувати початковий опорний план 1) методом північно-західного кута або його ще називають діагональним методом; 2) методом мінімальної вартості.

Задачу спочатку слід перевірити на збалансованість. Задача не є збалансованою, оскільки $120 < 150$. Маємо $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ то слід ввести фіктивного постачальника A_4 , запаси якого дорівнюють $a_4 = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i = 150 - 120 = 30$, тарифи при цьому $c_{\phi} = 0$. Тепер маємо збалансовану задачу:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	7	46
A_2	1	1	6	4	34
A_3	3	5	9	4	40
A_4	0	0	0	0	30
Потреби	40	35	30	45	150 150

1) у методі північно-західного кута (діагональному методі) заповнювати таблицю розпочинають з клітинки першого стовпця першого рядка. Для цього порівнюють $a_1 = 46$ з $b_1 = 40$, $b_1 < a_1$ і менший з обсягів записуємо в клітинку, що стає заповненою, при цьому потреби першого споживача задоволені повністю (решту клітинок в першому стовпці обнуляємо), але запаси першого постачальника повністю не вичерпані. Тому потреби другого споживача обсягом на 6 одиниць можна задовольнити за рахунок першого постачальника (перехід до другого стовпця) та решту потреб ($36-6=29$) обсягом 29 одиниць вантажу привезти з другої бази (перехід на другий рядок). Процес продовжуємо до тих пір, доки не задовольнимо потреби всіх споживачів за рахунок запасів постачальників:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 40	3 6	2 0	7 0	46/6/0
A_2	1 0	1 29	6 5	4 0	34/5/0
A_3	3 0	5 0	9 25	4 15	40/15/0
A_4	0 0	0 0	0 0	0 30	30
Потреби	40	35/29/0	30/25/0	45	150 150

Побудований план є опорним і не виродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок у таблиці дорівнює 7, що дорівнює $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Загальна вартість складеного плану перевезення дорівнює сумі добутків обсягів перевезень на відповідні вартості, тобто

$$F = 40 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 29 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 25 \cdot 9 + 15 \cdot 4 = 522 \text{ грн};$$

2) у методі мінімальної вартості із всієї таблиці вартостей перевезення вибирають найменшу вартість і в клітинку, що їй відповідає, розміщують найменше з чисел a_i або b_j . Далі з розгляду виключають або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю використані, або стовпець, що відповідає споживачу, потреби якого повністю задоволені, або і рядок, і стовпець, якщо використані і запаси постачальника і задоволені потреби споживача. Й далі з решти частини таблиці вартостей вибирають найменшу вартість, і процес розподілу запасів продовжують доки всі вони повністю не будуть розподілені, а потреби – задоволені.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46/16/0
A_2	1 34	1 0	6 0	4 0	34/0
A_3	3 6	5 0	9 0	4 34	40/34/0
A_4	0 0	0 19	0 0	0 11	30
Потреби	40/6/0	35/19/0	30/0	45	150 150

Отже, побудову початкового опорного плану розпочинаємо з клітинки другого рядка і першого стовпця, оскільки $c_{21} = 1$ (хоча можна було б розпочати з $c_{22} = 1$). Отже в клітинку з індексами 2 1 заносимо число 34, тому що воно є мінімальним з чисел $a_2 = 34$ та $b_1 = 40$, а другий рядок виключаємо з подальшого розгляду, тому від другого постачальника повністю вивезений вантаж. З решти таблиці знову здійснюємо вибір клітинки з мінімальною вартістю і вилучаємо з таблиці відповідний рядок або стовпець залежно від того, що вичерпано. Стовпець або рядок, які відповідають фіктивному споживачу або фіктивному постачальнику, розглядаються в останню чергу.

Побудований план є опорним і не виродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок у таблиці дорівнює 7, що дорівнює $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Загальна вартість складеного плану перевезення дорівнює:

$$F = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 34 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 34 = 296 \text{ грн.}$$

Маємо, що загальна вартість перевезення вантажу, початково зпланованого методом мінімальної вартості, набагато менша, ніж методом північно-західного кута.

8.3. Критерій оптимальності. Метод потенціалів

Знайдений висхідний опорний план перевіряється на оптимальність методом потенціалів за критерієм, який стверджує наступна теорема.

Теорема. Якщо план $X^*(x_{ij}^*)$ транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з $m + n$ чисел u_i^* і v_j^* , які задовольняють вимоги:

$$\begin{aligned} u_i^* + v_j^* &= c_{ij} \quad \text{для } x_{ij}^* > 0, \\ u_i^* + v_j^* &\leq c_{ij} \quad \text{для } x_{ij}^* = 0. \end{aligned}$$

Числа u_i^* і v_j^* називаються потенціалами, відповідно, постачальників і споживачів.

Доведення. Маємо транспортну задачу, в якій мінімізується лінійна функція $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$ за обмежень:

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Розглянемо її як двоїсту деякій висхідній задачі лінійного програмування, умови якої отримують відомими правилами складання двоїстих задач. Кожному обмеженню виду $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i$ висхідної задачі відповідає змінна u_i ($i = \overline{1, m}$), а кожному обмеженню виду $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j$ — змінна v_j ($j = \overline{1, n}$), при цьому слід максимізувати функцію $Z = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max$

при обмеженнях $u_i + v_j \leq c_{ij}$. План X^* — оптимальний план двоїстої задачі, тому план $Y^* = (u_i^*, v_j^*)$ є планом висхідної задачі і на основі теореми двоїстості $F_{\min} = Z_{\max}$ або:

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^*, \quad x_{ij}^* \geq 0.$$

Отже, на основі теорем двоїстості отримуємо, що обмеження висхідної задачі, які відповідають додатним компонентам оптимального плану двоїстої задачі, виконуються як строгі рівності, а відповідні компоненти, дорівнюють нулю – як нерівності, тобто:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0,$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0. \blacksquare$$

Отже, з доведеної теореми випливає, що потенціали u_i і v_j знаходять з рівняння $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для зайнятих клітинок. Одному з потенціалів дається довільне значення, наприклад $u_1 = 0$, тоді інші потенціали визначаються однозначно. Для того, щоб первісний опорний план був оптимальний, необхідне виконання наступних умов:

1) для кожної зайнятої клітини сума потенціалів повинна дорівнювати вартості одиниці перевезення, що стоїть в цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij};$$

2) для кожної незайнятої клітини сума потенціалів повинна бути менше або дорівнювати вартості одиниці перевезення, що стоїть в цій клітинці:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}.$$

Якщо хоча б одна незайнята клітина не задовольняє умову, то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити, вводячи в базис вектор, відповідний клітинці, для якої порушується умова оптимальності.

Таким чином, для перевірки плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Часто обчислюють $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$. Цю оцінку називають оцінкою вільних клітинок. Якщо $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорний план є оптимальним. Якщо хоча б одна з оцінок $\Delta_{ij} > 0$, то опорний план не є оптимальним і його можна поліпшити, перейшовши від одного опорного плану до іншого.

Перевіримо опорний, невироджений план, отриманий методом мінімальної вартості, на оптимальність. Для цього побудуємо таблицю потенціалів.

$u \backslash v$	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$
$u_1 = 0$	2 4	3	2	3 7
$u_2 = -1$	1	2 1	1 6	2 4
$u_3 = 1$	3	4 5	3 9	4
$u_4 = -3$	-1 0	0	-1 0	0

Для обчислення невідомих u_i і v_j використовуємо рівняння:

$$u_1 + v_2 = 3, \quad u_1 = 0,$$

$$u_1 + v_3 = 2,$$

$$u_2 + v_1 = 1,$$

$$u_3 + v_1 = 3,$$

$$u_3 + v_4 = 4,$$

$$u_4 + v_2 = 0,$$

$$u_4 + v_4 = 0.$$

Обчислюємо оцінки Δ_{ij} : $\Delta_{11} = 2 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 7 = -4 < 0$, $\Delta_{22} = (-1 + 3) - 1 > 0$, $\Delta_{23} = 1 - 6 = -5 < 0$, $\Delta_{24} = 2 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{32} = 4 - 5 = -1 < 0$, $\Delta_{33} = 3 - 9 = -6 < 0$, $\Delta_{41} = -1 - 0 = -1 < 0$, $\Delta_{43} = -1 - 0 = -1 < 0$. В одному випадку маємо, що $\Delta_{22} = (-1 + 3) - 1 > 0$. Отже, опорний план не є оптимальним і його слід поліпшити.

Перехід до іншого базисного плану

Наявність позитивної оцінки вільної клітини ($\Delta_{ij} > 0$) у ході перевірки опорного розв'язку на оптимальність свідчить про те, що отриманий розв'язок не є оптимальним і для зменшення значення цільової функції треба перейти до іншого опорного рішення. При цьому необхідно перерозподілити вантажі, переміщаючи їх із зайнятих клітин у вільні. Вільна клітина стає зайнятою, а одна з раніше зайнятих клітин – вільною.

Для вільної клітини із $\Delta_{ij} > 0$ будується цикл (ланцюг), всі вершини якого крім однієї знаходяться в зайнятих клітинах; кути прямі, число вершин парне. Біля вільної клітини циклу із $\Delta_{ij} > 0$ ставиться знак «+», потім по черзі проставляються знаки «-» і «+». У вершин зі знаком «-» обирають мінімальний вантаж (ρ), його додають до вантажів, що стоять біля вершин зі знаком «+», і віднімають від вантажів у вершин зі знаком «-». У результаті перерозподілу вантажу отримаємо новий опорний план. Цей план перевіряємо на оптимальність, і так далі до тих пір, поки не отримаємо оптимальний розв'язок.

Оптимальний план повинен розшукуватись тільки серед базисних планів з одним і тим же числом відкритих маршрутів (число ненульових базисних невідомих незмінне і дорівнює рангу матриці системи обмежень задачі). Якщо відкривається новий маршрут (у базис вводиться невідома x_{pq}), один зі старих маршрутів має бути закритий.

При призначенні нових обсягів перевезень x_{ij} треба стежити за дотриманням балансів по рядках і стовпцях таблиці (всі запаси повинні бути вивезені, всі потреби – задоволені).

Продовжимо розв'язування прикладу. Оскільки опорний план не є оптимальним і його слід поліпшити, то слід відкрити новий маршрут від A_2 до B_2 з тарифом $c_{22} = 1$ (оскільки $\Delta_{22} > 0$). Необхідно ввести в базис невідому x_{22} .

Постачальники (План 2)	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 34 -	1 0 + ρ	6 0	4 0	34
A_3	3 6 +	5 0	9 0	4 34 -	40
A_4	0 0	0 19 -	0 0	0 11 +	30
Потреби	40	35	30	45	150

Напрямок обходу ланцюга не має значення. Важливо, щоб всі вузли ланцюга, крім початкового, розташовувалися в зайнятих базисних клітинах.

Загальне число маршрутів не повинно збільшитися (в іншому випадку новий план не буде базисним). Вибираємо серед клітин зі знаком «-» вантаж мінімальної величини: $\rho = \min\{34, 19, 34\} = 19$. До всіх клітин зі знаком «+» або «-» розносимо вантаж. Маршрут x_{42} закривається.

Новий розподіл вантажу між постачальниками та споживачами такий:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 4	16 3	30 2	0 7	46
A_2	15 1	19 1	0 6	0 4	34
A_3	25 3	0 5	0 9	15 4	40
A_4	0 0	0 0	0 0	30 0	30
Потреби	40	35	30	45	150

Побудований план є опорним і не виродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок у таблиці дорівнює 7. Загальна вартість даного опорного плану перевезення дорівнює:

$$F = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 15 + 19 \cdot 1 + 3 \cdot 25 + 15 \cdot 4 = 277 \text{ грн.}$$

Методом потенціалів перевіримо опорний план на оптимальність в таблиці:

$u \backslash v$	$v_1 = 3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	3 / 4	3	2	4 / 7
$u_2 = -2$	1	1	0 / 6	2 / 4
$u_3 = 0$	3	3 / 5	2 / 9	4
$u_4 = -4$	-1 / 0	-1 / 0	-1 / 0	0

За змістом таблиці маємо висновок, що план оптимальний, оскільки всі $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} < 0$.

Економічна оцінка $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$ показує, на скільки грошових одиниць зменшаться транспортні витрати від завантаження даної клітини

одиницею вантажу. Ефективність плану від завантаження потенційної клітини вантажем ρ одиниць становить $\Delta F = \Delta_{ij} \cdot \rho$ грошових одиниць.

8.4. Виродження плану транспортної задачі

У ході розв'язання транспортної задачі може виявитися, що число зайнятих клітин менше, ніж $r = m + n - 1$. У цьому випадку завдання має вироджений розв'язок. Для можливого його виключення доцільно поміняти місцями постачальників і споживачів або ввести у вільну клітку з найменшою вартістю нульову поставку. Нуль поміщають в таку клітину, щоб у кожному рядку і кожному стовпці було не менше однієї зайнятої клітини. Дуже часто план вироджується у процесі його поліпшення, коли при відкритті нового маршруту закривається відразу кілька старих маршрутів.

Продовжимо розгляд прикладу. Якщо ввести в базис x_{24} , то закриваються відразу два маршрути x_{21} і x_{34} . У цьому випадку слід закрити тільки один маршрут з найбільшою вартістю, інші ж залишити в плані, але з нульовими обсягами перевезень, так, щоб загальне число маршрутів формально не змінилося (в плані є базисний нуль $x_{21} = 0$).

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 15 –	1 19	6 0	4 0 + ρ	34
A_3	3 25 +	5 0	9 0	4 15 –	40
A_4	0 0	0	0 0	0 30 +	30
Потреби	40	35	30	45	150

Новий план буде виродженим:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 0	3 16	2 30	7 0	46
A_2	1 0	1 19	6 0	4 15	34
A_3	3 40	5 0	9 0	4 0	40
A_4	0 0	0	0 0	0 30 +	30
Потреби	40	35	30	45	150

Виродження може зустрітися також у процесі складанні початкового плану.

У прикладі, що розглядається, були часткові баланси між групами постачальників і групами споживачів. Досить переставити місцями деяких постачальників або деяких споживачів (що цілком припустимо), і початкові плани будуть виродженими. Нижче наведені умови цієї дещо зміненої задачі, де переставлені місцями споживачі і постачальники:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1	4	1	6	34
A_1	3	7	4	2	46
A_3	5	4	3	9	40
A_4	0	0	0	0	30
Потреби	35	45	40	30	

Складемо початковий план діагональним методом.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1 34	4 0	1 0	6 0	34
A_2	3 1	7 45	4 0	2 0	46
A_3	5 0	4 0	3 40	9 0	40
A_4	0 0	0 0	0 0	0 30	30
Потреби	35	45	40	30	150

Тут через часткові баланси загальне число заповнених кліток виявилось рівним 5, а не $(m + n - 1) = 7$. Треба ввести в план ще два маршрути з нульовим обсягом перевезень. Відомо, що в невиродженому плані, що складений діагональним методом, ненульові компоненти розташовуються на діагоналі таблиці сходами, так що перехід до сусіднього компоненту відбувається або по вертикалі, або по горизонталі. Тому поставимо базисні нулі там, де сходи обриваються, і перехід до сусіднього компоненту плану відбувається по діагоналі. Якщо є кілька варіантів розміщення базисних нулів, вибираємо будь-який. Зараз (план б) прийнято $x_{34} = x_{33} = 0$. Тепер число базисних невідомих дорівнює $(m + n - 1) = 7$.

Складемо тепер початковий план методом мінімальної вартості.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1 34	4 0	1 0	6 0	34
A_2	3 1	7 15	4 0	2 30	46
A_3	5 0	4 0	3 40	9 0	40
A_4	0	0	0	0	

	0	30	0	0	30
Потреби	35	45	40	30	150

Цей план також виявився виродженим, число ненульових компонентів тут дорівнює 6, що менше $(m + n - 1) = 7$. Однак, на відміну від попередніх випадків, не відомо, куди можна поставити додатковий базисний нуль – адже потрібно гарантувати, що після цього для будь-якої вільної клітинки можна буде побудувати замкнутий ланцюжок, всі інші вузли якого будуть розташовані у заповнених клітинках. Тому у випадку виродження вихідного плану, складеного методом мінімального елемента, застосовується спеціальний прийом, що називається методом « ε -зсуву». Ідея цього методу полягає в усуненні самої причини виродження, для чого до всіх запасів, крім останнього, додається мала величина ε , а з останнього запасу віднімаються всі додані величини (щоб не змінити величини загального запасу).

Складений після ε -зсуву план буде не виродженим. Величину ε заміняємо базисним нулем, що у даній таблиці попадає в клітинку A_3B_4 . Далі в процесі поліпшення плану зберігаємо базисні нулі аж до одержання оптимального рішення.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_2	B_4	B_1	B_3	
A_2	1 $34 + \varepsilon$	4 0	1 0	6 0	$34 + \varepsilon$
A_2	3 $1 - \varepsilon$	7 $15 + 2\varepsilon$	4 0	2 30	$46 + \varepsilon$
A_3	5 0	4 $+ \varepsilon$	3 40	9 0	$40 + \varepsilon$
A_4	0 0	0 $30 - 3\varepsilon$	0 0	0 0	$30 - 3\varepsilon$
Потреби	35	45	40	30	150

Приклад. Фірма здійснює поставку пляшок на три заводи, що займаються виробництвом безалкогольних напоїв. Вона має три склади, причому на складі 1 знаходиться 6 000 пляшок, на складі 2 – 3 000 пляшок і на складі 3 – 4 000

пляшок. Першому заводу потрібно 4000 пляшок, другому заводу – 5000 пляшок, третьому – 1 000 пляшок, четвертому – 3 000. Матрицею

$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ задана вартість перевезення однієї пляшки від кожного

складу до кожного заводу. Необхідно так організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною.

Початковий опорний план отримаємо за методом мінімальної вартості.

Склади	Заводи				запаси
	1	2	3	4	
1	6 0	4 3 000	9 0	8 3 000	6 000
2	5 0	3 2 000	2 1 000	8 0	3 000
3	2 4 000	3 0	6 0	8 0	4 000
потреби	4 000	5 000	1 000	3 000	

Число заповнених клітин 5, $r = m + n - 1 = 6$. Отже задача є виродженою.

Для виключення виродженості необхідно в якусь клітинку ввести нульову поставку. Така клітина стає умовно зайнятою, її доцільно визначити під час обчислення потенціалів зайнятих клітин, вона повинна мати найменшу вартість порівняно з іншими клітинками, які можуть бути умовно зайнятими. Для знаходження потенціалів необхідно помістити нульову поставку в клітинку (3, 2).

$u \backslash v$	$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 8$
$u_1 = 0$	3 6	4	3 9	8
$u_2 = -1$	2 5	3	2	7 8
$u_3 = -1$	2	3	2 6	7 8

План оптимальний. Вартість транспортних витрат буде мінімальною і становитиме:

$$F = 4 \cdot 3\,000 + 8 \cdot 3\,000 + 3 \cdot 2\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 4\,000 = 52\,000 \text{ грош.од.}$$

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть економіко-математичну модель транспортної задачі.

2. Запишіть транспортну задачу в матричній формі і назвіть її властивості.
3. Назвіть методи розв'язування транспортної задачі.
4. Який критерій оптимальності для транспортної задачі в матричній формі?
5. Дайте економічну інтерпретацію методу потенціалів розв'язування транспортної задачі.
6. Як здійснити перехід до іншого базисного плану?
7. Як розв'язати транспортну задачу у випадку виродження?

9. Транспортні задачі з додатковими умовами та задачі економічного змісту, що зводяться до транспортної задачі

9.1. Застосування транспортної задачі до вирішення деяких економічних задач. Транспортні задачі з додатковими умовами.

9.2. Задачі транспортного типу.

9.1. Застосування транспортної задачі до вирішення деяких економічних задач. Транспортні задачі з додатковими умовами

Алгоритми і методи вирішення транспортної задачі можуть бути використані у ході вирішення деяких економічних задач, що не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. У цьому випадку величини вартості c_{ij} мають різний зміст залежно від конкретної економічної задачі. До таких відносяться такі задачі:

1. Оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. У них c_{ij} є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції потрібно використовувати кожен з верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Так як транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з від'ємним знаком.
2. Оптимальні призначення або проблема вибору. Мається m механізмів, які можуть виконувати n різних робіт з продуктивністю c_{ij} . Задача дозволяє

визначити, який механізм і на яку роботу треба призначити, щоб добитися максимальної продуктивності.

3. Задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції.

4. Збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу. Зменшення порожнього пробігу скоротить кількість автомобілів для перевезень, збільшивши їх продуктивність.

5. Рішення задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника з якихось причин не може бути направлений одному із споживачів. Дане обмеження можна врахувати, присвоївши відповідній клітинці достатньо велике значення вартості, тим самим в цю клітинку не будуть робитися перевезення.

Транспортні задачі з додатковими умовами.

Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями

У транспортних задачах з обмеженими пропускними спроможностями крім тарифів для кожного маршруту додатково задані пропускні спроможності кожного маршруту $x_{ij} \leq d_{ij}$. В умовах завдання пропускні спроможності будемо записувати в нижній частині клітинок, а тарифи – у верхній.

Приклад. Маємо три пункти відправлення і три пункти призначення. Відомі запаси a_i продукції у кожного постачальника A_i , потреби b_j кожного споживача B_j і тарифи c_{ij} (вартість перевезення одиниці товару від пункту A_i в пункт B_j , записані в верхній частині клітинки), а також пропускні спроможності кожного маршруту d_{ij} (записані в нижній частині клітинки). Потрібно скласти оптимальний план перевезення, тобто визначити, яка кількість вантажу x_{ij} має бути відправлена з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення, щоб загальна вартість всіх перевезень була найменшою.

Постачальники	Споживачі			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5 30	2 25	3 25	45

A_2	7 40	9 15	6 20	65
A_3	4 25	7 20	5 15	40
Потреби	70	30	50	

Через двосторонні обмеження $0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$ у цій задачі з'являється два види вільних невідомих – одні з них в оптимальному плані прирівнюються нулю $x_{ij} = 0$, інші – максимально можливим значенням $x_{ij} = d_{ij}$ (вільні невідомі задаються, базисні невідомі – обчислюються). Значення базисних невідомих, які визначаються системою обмежень-рівностей через вільні невідомі, перебувають в інтервалі $0 < x_{ij} < d_{ij}$ (при виродженні може бути $0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$).

Функцію цілі також можна виразити через вільні невідомі:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = f_0 + \sum_{(i,j) \notin B} c'_{ij} x_{ij}.$$

Якщо коефіцієнт у перетвореній функції цілі перед вільною невідомою додатний $c'_{ij} > 0$, то збільшення x_{ij} приводить до збільшення витрат f ; таку невідому треба зробити якнайменшою, тобто прирівняти її нулю $x_{ij} = 0$.

Якщо коефіцієнт перед вільною невідомою від'ємний $c'_{ij} < 0$, то збільшення x_{ij} приводить до зменшення витрат f ; таку невідому треба зробити якнайбільшою, наскільки допускає пропускна спроможність, тобто $x_{ij} = d_{ij}$.

У процесі викладення методу потенціалів було доведено, що різниця між дійсним і непрямим тарифами показує, як змінюється функція цілі у разі збільшення x_{ij} на одиницю.

Для вільної (не базисної) невідомої x_{ij} відповідна їй балансова невідома двоїстої задачі $w_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ буде базисною і саме її значення буде записане у вигляді коефіцієнта в цільовій функції при вільній невідомій x_{ij} . Звідси впливає такий критерій оптимальності плану транспортної задачі із обмеженими пропускними спроможностями:

$$\begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij}, & \text{якщо } x_{ij} = 0; \\ u_i + v_j \geq c_{ij}, & \text{якщо } x_{ij} = d_{ij}; \\ u_i + v_j = c_{ij}, & \text{якщо } 0 < x_{ij} < d_{ij}. \end{cases}$$

Ця задача не завжди має розв'язок, наприклад, коли попит не може бути задоволений через обмеженість пропускних спроможностей маршрутів.

Послідовність розрахунків покажемо на прикладі.

У процесі складання першого опорного плану методом мінімальної вартості послідовні невідомі приймаються рівними меншому значенню трьох (а не двох, як звичайно) чисел – залишку запасу, залишку попиту і пропускній спроможності даного маршруту: $x_{ij} = \min \{a_i, b_j, d_{ij}\}$.

Постачальники	Споживачі						Запаси
	B_1		B_2		B_3		
A_1	5		2		3		45/20/0
	30	0	25	25	25	20	
A_2	7		9		6		65/50/10/5
	40	40	15	5	20	15	
A_3	4		7		5		40/15/0
	25	25	20	0	15	15	
Потреби	70/45/5		30/5/0		50/30/0		

Базисні невідомі відзначені напівжирним шрифтом. Сірим кольором і курсивом відзначені вільні невідомі, що дорівнюють пропускним спроможностям маршруту.

У 1-му стовпці і 2-му рядку залишилися нерозподілені залишки в 5 одиниць. Подібно відкритій транспортній задачі уводимо фіктивного постачальника A_4 із запасом $a_4 = 5$ і фіктивного споживача B_4 з потребами $b_4 = 5$. Тариф $c_{44} = 0$ приймаємо рівним нулю, інші тарифи $c_{4j} = c_{i4} = M$, де M – дуже велике число (щоб заблокувати ці маршрути).

Таким чином, одержуємо перший (явно неприпустимий) план:

Постачальники (План 1)	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	5	2	3	M		45
	0	25	20			
A_2	7	9	6	M		65
	40	5	15	5		
A_3	4	7	5	M		40
	25	0	15			
A_4	M	M	M		0	
	5			+	0	

Потреби	70	30	50		
---------	----	----	----	--	--

опорний план не є оптимальним і його слід поліпшити.

Вартість цього плану дуже велика, план явно не оптимальний, оскільки використані заблоковані маршрути x_{41} і x_{24} . Спробуємо поліпшити план, звільнивши неприпустимі маршрути. План вироджений, тому ставимо базисний нуль у клітинку $x_{44} = 0$ і вважаємо $x_{33} = 15$ – базисною змінною (це допустимо, якщо в подальшому обсяг перевезень на цьому маршруті не буде збільшений).

Методом потенціалів знаходимо найбільш перспективну вільну невідому, яку варто ввести в базис.

$u \backslash v$	v	$v_1 = 2M-6$	$v_2 = 3$	$v_3 = 0$	$v_4 = M-6$
$u_1 = 3$	3	$2M-3$ 5	6 2	3	$M-3$ M
$u_2 = 6$	6	$2M$ 7	9	6	M
$u_3 = 5$	5	$2M-1$ 8	8 7	5	$M-1$ M
$u_4 = -M+6$	-M+6	M	$-M+9$ M	$-M+6$ M	0

Потенціали визначаємо тільки за базисними клітинками (напівжирний шрифт). У вільних клітинках, виділених сірими кольорами, умова оптимальності вимагає, щоб непрямі тарифи (у верхній частині клітинки) були більше дійсних тарифів (у нижній частині), тобто $u_i + v_j \geq c_{ij}$; в інших вільних клітинках умова оптимальності звичайна $u_i + v_j \leq c_{ij}$ (непрямі тарифи повинні бути менше дійсних). Найбільша розбіжність вийшла для клітинки x_{11} . Уводимо цю невідому в базис, для чого в таблиці плану будемо замкнутий ланцюг $x_{11} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{44} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11}$. Переміщаємо по цьому ланцюжку нерозподілені залишки. При збільшенні x_{23} треба стежити, щоб $x_{23} \leq d_{23} = 20$. Обидва заблокованих маршрути звільнилися, фіктивних постачальника A_4 і споживача B_4 тепер можна відкинути. Це перший реальний план перевезень (всі запаси вивезені, весь попит задоволений). Невідома x_{23} більш не є базисною (тому що $x_{23} = d_{23}$); знайдений план є виродженим.

Постачальники (План 2)	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 5	2 25	3 15	M 0	45
A_2	7 40	9 5	6 20	M 0	65
A_3	4	7	5	M	40

	25	0	15		
A_4	M	M	M	0	
	0		0	5	
Потреби	70	30	50		

Для перевірки плану на оптимальність вважаємо $x_{33} = 15$ – базисною змінною і ставимо базисний нуль у клітинку x_{32} (більше нікуди). Заповнюємо таблицю потенціалів.

v	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$
u			
$u_1 = 3$	5	5	3
$u_2 = 7$	9	9	7
$u_3 = 5$	7	7	5

Умови оптимальності виконані – у всіх вільних клітинках, де обсяги перевезень дорівнюють пропускним спроможностям, непрямі тарифи більше дійсних.

Отриманий опорний план – оптимальний. Його вартість:

$$f = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 7 \cdot 40 + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 25 + 5 \cdot 15 = 740.$$

Двоступінчаста транспортна задача

Дуже часто між виробниками A_i і споживачами B_j немає прямих зв'язків, вся продукція спочатку направляється на оптові бази (пункти розподілу) D_k і тільки далі поступає в роздрібну торговельну мережу. У цьому випадку пункти розподілу включаємо як в число споживачів, так і в число постачальників. Прямі перевезення від виробників до споживачів забороняємо, назначаючи дуже великі тарифи на цих маршрутах; також забороняємо перевезення з бази на базу. Особливості цієї задачі розглянемо на такому прикладі.

Тарифи	D_1	D_2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
D_1	0		5	7	2	3	1	3 700
D_2		0	3	1	4	5	2	3 700
A_1	10	27						1 000
A_2	12	14						1 500
A_3	13	8						1 200
Попит	3 700	3 700	800	500	750	1000	650	

Маємо три підприємства з обсягами виробництва 1 000, 1 500, 1 200 і п'ять споживачів з попитом 800, 500, 750, 1 000, 650. Задача замкнута, оскільки загальний запас продукції дорівнює загальному попиту 3 700. Спочатку вироблена продукція перевозиться в пункти розподілу D_1 і D_2 , які в таблиці

умов завдання включені і в число постачальників, і в число споживачів. Товарообіг баз приймаємо рівному загальному попиту (можливо, буде досить однієї бази). Сірим фоном відмічені заборонені маршрути (із тарифами M).

Складаємо перший план методом мінімальної вартості:

План 1	D_1	D_2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1200	100 -	$+\rho$		750	1000	650
D_2		2400 +	800 -	500			
A_1	1000						
A_2	1500						
A_3		1200					

Цей план – недопустимий, оскільки зайнята заборонена клітинка $D_1 D_2$. Методом потенціалів знаходимо найбільш перспективний маршрут, який треба ввести в план перевезень. Знайдено відразу два таких еквівалентних маршрути: $D_1 - B_1$, або $A_2 - D_2$. Приймаємо перший варіант і складаємо замкнутий ланцюжок, що починається з клітинки $D_1 B_1$. Переміщаємо по цьому ланцюжку 100 одиниць товару і тим самим розвантажуюємо заборонену клітинку.

План 2	D_1	D_2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1 00		100		750	1 000	650
D_2		2 500	700	500			
A_1	1 000						
A_2	1 500						
A_3		1 200					

Методом потенціалів визначаємо, що цей план – оптимальний. Товарообіг першої бази можна знизити до:

$$3\,700 - 1\,200 = 2\,500,$$

а другої

$$3\,700 - 2\,500 = 1\,200.$$

Існує також еквівалентний план з тим самим значенням цільової функції:

План 3	D_1	D_2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

D_1	1 300				750	1 000	650
D_2		2 400	800	500			
A_1	1 000						
A_2	1 400	100					
A_3		1 200					

Тепер найменший товарообіг першої бази дорівнює $3\,700 - 1\,300 = 2\,400$, а другої $3\,700 - 2\,400 = 1\,300$. Можна комбінувати ці два еквівалентні плани.

На рис. 9.1 ці плани зображені у вигляді орієнтованих графів.

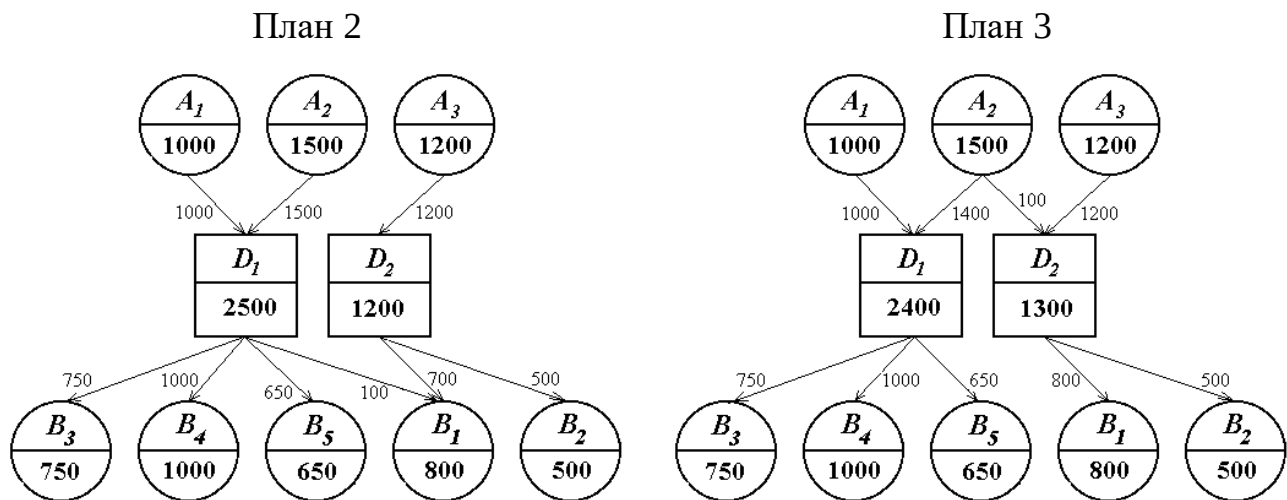


Рис. 9.1. Оптимальні плани двоступінчатої транспортної задачі

Транспортна задача за критерієм часу

При перевезеннях швидкопсувної продукції з невеликим терміном зберігання треба якнайшвидше доставити товар споживачам, тому змінюється функція цілі – бажано зменшити найбільший час в плані перевезень:

$$f = \max\{t_{ij}\} \rightarrow \min.$$

Ця функція цілі не є лінійною, тому оптимальний план транспортної задачі за критерієм часу не обов'язково повинен бути базисним. Задачу розв'язуємо у такий спосіб.

На першому етапі складаємо план методом мінімального елемента (мінімальної вартості). Визначаємо для знайденого плану максимальний час

перевезень $t_{pq} = \max\{t_{ij}\}$ і викреслюємо (забороняємо) всі вільні клітинки таблиці планів з часом перевезень, що не менше t_{pq} . На другому етапі намагаємось розвантажити клітинку з максимальним часом перевезень (ставимо в цю клітинку знак $+\rho$ і будуємо замкнений ланцюжок для перерахування обсягів перевезень). Проте тут є одна особливість. Необхідно було стежити, щоб у разі переходу до нового плану число базисних невідомих не змінювалось, тобто коли закривався один маршрут, відкривався тільки один інший, для чого всі вузли замкненого ланцюжка, крім одного, розташовували у базисних клітинках. Але зараз число нових маршрутів може бути більшим, тобто в базисних клітинках повинні бути тільки ті вузли ланцюжка, що відмічені позначкою «-», а вузли із позначкою «+» можуть бути де завгодно. Таким чином наприкінці одержуємо план з мінімальним часом найтривалішого перевезення, який вже не можна зменшити. Але (це ще одна особливість) пошук оптимального плану на цьому не завершується. Викреслюємо (третій етап) в плані найтриваліший маршрут перевезень і переходимо до скороченої транспортної задачі без одного споживача, поставки до якого вже не можна зменшити. Намагаємось поліпшити план перевезень до інших споживачів, щоб вони одержали свою продукцію якнайшвидше і мали деякий резерв терміну зберігання.

Приклад. Маємо трьох постачальників і п'ять споживачів. Нижче наведені умови закритої задачі (час перевезень на кожному маршруті, запаси 3-х постачальників, попит 5-и споживачів). Перевозиться швидкопсувна продукція з невеликим терміном зберігання, треба якнайшвидше доставити товар споживачам.

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	6	3	4	8	30
A_2	1	5	6	9	7	35
A_3	3	4	1	6	10	40
Потреби	20	34	16	10	25	

Висхідний план отримаємо методом мінімальної вартості.

	Споживачі	Запаси
--	-----------	--------

Постачальники (План 1)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 0+	6 0	3 0	4 10	8 20	30/20/0
A_2	1 20 -	5 10	6 0	9 0	7 5 +	35/15/5/0
A_3	3 0	4 24	1 16	6 0	10 0	40/24/0
Потреби	20/0	34/10/0	16/0	10	25/20/0	

Найтриваліший маршрут A_1-B_5 в цьому плані вимагає 8 годин. Викреслюємо в таблиці планів всі вільні клітинки з таким і більшим часом перевезень (дві клітинки A_2-B_4 і A_3-B_5). Розвантажуюмо клітинку A_1-B_5 , відкриваючи маршрут A_1-B_1 .

Постачальники (План 2)	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 20 -	6 0	3 0+	4 10	8 0	30
A_2	1 0+	5 10 -	6 0	9 0	7 25	35
A_3	3 0	4 24 +	1 16 -	6 0	10 0	40
Потреби	20	34	16	10	25	

Найтриваліший маршрут A_2-B_5 в новому плані 2 вимагає 7 годин і ця величина не може бути зменшена, оскільки поставка продукції споживачеві B_5 другими маршрутами вимагає ще більше часу. План 2 – вже оптимальний, але не найкращий. Розглянемо тепер скорочену задачу без споживача B_5 .

У скороченій задачі найтриваліший маршрут A_2-B_2 вимагає 5 годин. Викреслюємо в таблиці плану 2 всі клітинки з таким і більшим часом перевезень і робимо спробу розвантажити клітинку A_2-B_2 . Зверніть увагу, що для цього виявилось потрібним відкрити відразу два нових маршрути A_2-B_1 і A_1-B_3 .

	Споживачі	Запаси
--	-----------	--------

Постачальники (План 2)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 2	0 6	10 3	10 4	0 8	30
A_2	10 1	0 5	0 6	0 9	25 7	35
A_3	0 3	34 4	6 1	0 6	0 10	40
Потреби	20	34	16	10	25	

У другому оптимальному плані (плані 3) найтриваліші маршрути (без споживача B_5) A_3-B_2 і A_1-B_4 вимагають 4 години і ці клітинки неможливо розвантажити навіть частково. Отже одержано найкращий план перевезень, що забезпечує поставку 25 одиниць продукції за 7 годин (це найменший термін поставки споживачу B_5), 44 одиниць продукції за 4 години, (найменший термін поставок споживачам B_2 і B_4), 10 одиниць продукції за 3 години, 10 одиниць продукції за 2 години і 16 одиниць продукції за 1 годину.

Багатопродуктова транспортна задача

Під час перевезення неоднорідного вантажу (вугілля різних сортів, цементу різних марок, сталевого прокату) є можливість заміни частки попиту на взаємозамінний вид продукту. В багатопродуктовій транспортній задачі потрібно оптимізувати загальний план перевезень, якщо відомі коефіцієнти взаємозамінності одного виду продукту на інший. Особливості вирішення цієї задачі розглянемо на прикладі перевезень 2-х видів вугілля (буре вугілля і антрацит) від 2-х постачальників A_1 , A_2 до 2-х споживачів B_1 , B_2 . Умови задачі (тарифи, запаси і попит на кожний вид продукту) наведені в таблиці:

	B_1	B_2	Запас(1)	Запас(2)
A_1	30	21	300	100
A_2	15	24	400	140
Попит(1)	100	200		
Попит(2)	60	40		
Попит(3)	200(1)	90(1)		

Тут позначено: Запас(1) – це запаси бурого вугілля, Запас(2) – антрациту. Аналогічно, Попит(1) і Попит(2) – це попит на буре вугілля і антрацит (т); ці

кількості не можна замінювати на інший вид товару. Попит(3) – це кількості взаємозамінного товару (виражені в одиницях бурого вугілля).

Відомо, що за теплотворною здатністю 3 одиниці бурого вугілля еквівалентні 2-м одиницям антрациту. Отже можна перерахувати всі запаси і попит в одиниці одного виду вугілля, наприклад, в одиниці бурого вугілля. Коефіцієнт $k = 3/2$ назовемо коефіцієнтом взаємозамінності.

Розщеплюємо кожний пункт постачання на два підпункти $A_1(1)$, $A_1(2)$ і $A_2(1)$, $A_2(2)$ по числу видів товару. Кожний пункт споживання розщеплюємо на три підпункти $B_1(1)$, $B_1(2)$, $B_1(3)$ і $B_2(1)$, $B_2(2)$, $B_2(3)$. Запаси і попит на антрацит виражаємо в одиницях бурого вугілля, для чого помножимо їх на $k = 3/2$. Одержимо: $a_1(1) = 300$, $a_1(2) = 100 \cdot 3/2 = 150$, $a_2(1) = 100$, $a_2(2) = 140 \cdot 3/2 = 210$, $b_1(1) = 100$, $b_1(2) = 60 \cdot 3/2 = 90$, $b_1(3) = 220$, $b_2(1) = 200$, $b_2(2) = 40 \cdot 3/2 = 60$, $b_2(3) = 90$. Нагадаємо, що попит на взаємозамінний товар був відразу виражений в одиницях бурого вугілля, тому його не потрібно було перераховувати.

Тепер перераховуємо тарифи c_{ij} . Затрати на перевезення залежать від маси вантажу, а не від його споживчої властивості (теплотворної здатності). Тому умовно збільшуючи запаси 2-го виду вантажу в k разів, слід відповідно зменшити в k разів тарифи на перевезення цього умовно збільшеного вантажу (в межах $A_1(2)$ і $A_2(2)$ розширеної таблиці тарифів):

	$B_1(1)$	$B_1(2)$	$B_1(3)$	$B_2(1)$	$B_2(2)$	$B_2(3)$	Запаси
$A_1(1)$	30	1000	30	21	1000	21	300
$A_1(2)$	1000	$30 \cdot 2/3 = 20$	$30 \cdot 2/3 = 20$	1000	$21 \cdot 2/3 = 14$	$21 \cdot 2/3 = 14$	$100 \cdot 3/2 = 150$
$A_2(1)$	15	1000	15	24	1000	24	100
$A_2(2)$	1000	$15 \cdot 2/3 = 10$	$15 \cdot 2/3 = 10$	1000	$24 \cdot 2/3 = 16$	$24 \cdot 2/3 = 16$	$140 \cdot 3/2 = 210$
Попит	100	$60 \cdot 3/2 = 90$	220	200	$40 \cdot 3/2 = 60$	90	760

Оскільки попит на певний вид товару не може бути задоволеним іншими видами товарів, деякі маршрути забороняємо дуже великими тарифами на перевезення (в таблиці ці клітинки виділені сірим кольором).

Тепер багатопродуктова задача приведена до звичайної транспортної задачі. Наша задача – збалансована, оскільки сумарний запас дорівнює сумарному попиту (760). Як відомо, звичайна збалансована транспортна задача завжди має розв'язок. Але для багатопродуктової задачі треба ще перевірити умови, що запасів досить для задоволення попиту на певні види товарів (що не можуть бути замінені іншими видами):

– сумарний запас бурого вугілля дорівнює $a_1(1) + a_2(1) = 300 + 100 = 400$, що перевищує сумарний попит на незамінну частку на цей вид вугілля $b_1(1) + b_2(1) = 100 + 200 = 300$;

– сумарний запас антрациту (в умовних одиницях) дорівнює $a_1(2) + a_2(2) = 150 + 210 = 360$, що перевершує сумарний попит на незамінну частку на цей вид вугілля $b_1(2) + b_2(2) = 90 + 60 = 150$.

Отже, приведена задача має розв'язок. Оптимальний план в одиницях бурого вугілля (План 1) з мінімальними витратами $f_{min} = 8\ 850$ наведений у таблиці:

План 1	$B_1(1)$	$B_1(2)$	$B_1(3)$	$B_2(1)$	$B_2(2)$	$B_2(3)$	Запаси
$A_1(1)$	10			200		90	300
$A_1(2)$		90			60		150
$A_2(1)$	90		10				100
$A_2(2)$			210				210
Попит	100	90	220	200	60	90	760

У таблиці План 2 обсяги перевезень антрациту виражені в тоннах.

План 2	$B_1(1)$	$B_1(2)$	$B_1(3)$	$B_2(1)$	$B_2(2)$	$B_2(3)$	Запаси
$A_1(1)$	10			200		90	300
$A_1(2)$		$90 \cdot \frac{2}{3} = 60$			$60 \cdot \frac{2}{3} = 40$		$150 \cdot \frac{2}{3} = 100$
$A_2(1)$	90		10				100
$A_2(2)$			$210 \cdot \frac{2}{3} = 140$				$210 \cdot \frac{2}{3} = 140$
Попит	100	$90 \cdot \frac{2}{3} = 60$	220(1)	200	$60 \cdot \frac{2}{3} = 40$	90	

9.2. Задачі транспортного типу

Серед всіх задач математичного програмування транспортні задачі і задачі транспортного типу становлять близько 70 % і ця частка продовжує зростати з опануванням нових класів завдань. Зведення проблеми до задачі транспортного типу гарантує просте її вирішення.

Задача про призначення

Зміст задачі про призначення можна сформулювати як пошук найкращого виконавця для кожної роботи. Маємо кілька кандидатів на виконання деяких робіт і таблицю продуктивності q_{ij} кожного кандидата на кожній роботі. Слід найкращим чином розподілити виконавців за робочими місцями, щоб загальна продуктивність була найбільшою. Задача легко зводиться до

транспортної, де всі запаси і попит дорівнюють одиниці $a_i = b_j = 1$; замість пошуку максимуму загальної продуктивності можна знаходити мінімум витрат, матрицю c_{ij} яких одержують як $c_{ij} = q_{\max} - q_{ij}$. Всі змінні x_{ij} тут приймають тільки два значення 0 або 1 ($x_{ij} = 1$ означає, що робітник A_i призначений на роботу B_j).

Приклад. Отже розглянемо задачу призначення чотирьох робітників на виконання чотирьох робіт, якщо задана матриця витрат (скільки буде коштувати виконання кожної роботи кожним виконавцем).

Прочерк у матриці означає, що цей робітник не може виконувати цю роботу. Крім того врахуємо, що з'явився новий робітник (A_5), який може виконувати ці роботи з витратами 60, 45, 30, 80. Чи не буде економічно вигідним призначити на роботу нового виконавця?

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	50	50	–	20
A_2	70	40	20	30
A_3	90	30	50	–
A_4	70	20	60	70

Зазвичай для відкритої транспортної задачі вводимо фіктивне робоче місце B_ϕ з нульовими витратами і складаємо план методом мінімального елемента.

План 1 вироджений, тому методом ε -зсуву знайдені позиції для чотирьох базисних нулів. Робітник A_3 не одержує роботи, якщо прийняти нового працівника A_5 . Цей план фактично є оптимальним, але за методом потенціалів потрібно зробити кілька зайвих ітерацій, після яких базисні нулі займуть інші позиції.

План1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0			1	
A_2	0		1		
A_3	0				1
A_4	0	1			
A_5	1				

План2	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1				1
A_2			1	
A_3		1		
A_4	1			

Якщо призначити на робочі місця штатний персонал (без A_5), то вартість плану 2 збільшиться на 10 цінових одиниць. Робітник A_4 при цьому одержує найбільш невідповідну для нього роботу B_1 .

Розподільна задача з пропорційними продуктивностями

Якщо матриця продуктивностей має вигляд $q_{ij} = \alpha_i \beta_j$, то загальну розподільну задачу (задачу про оптимальне завантаження обладнання) можна звести до транспортної і одержати її розв'язок набагато простіше. Розглянемо приклад складання оптимальної програми обробки чотирьох видів виробів B_1, B_2, B_3, B_4 на трьох взаємозамінних верстатах A_1, A_2, A_3 , якщо відомі продуктивності верстатів q_{ij} для кожного виробу (шт./год.), собівартості одиниці продукції c_{ij} (грн/шт.), фонд завантаження обладнання a_i (год.) і мінімальне планове замовлення b_j (шт.). Умови задачі наведені в таблиці:

Вер- стати	Собівартість, грн./шт.				Фонд часу	Вер- стати	Продуктивність, шт./год.				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4			B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20	10	5	12	240	A_1	30	50	30	20	5
A_2	8	12	9	8	150	A_2	60	100	60	40	10
A_3	5	10	6	9	150	A_3	18	30	18	12	3
Замовлення	3000	15000	4500	1500		β_j	6	10	6	4	

Потрібно визначити $3 \times 4 = 12$ чисел x_{ij} – кількості виробів кожного типу (шт.), що виготовляються на верстаті A_i . Складаємо обмеження задачі.

Об'єм виробленої продукції має бути не меншим, ніж планове замовлення:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 3000, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 15000, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 4500, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 1500. \end{cases}$$

Завантаження верстатів не може перевершувати фонду часу:

$$\begin{cases} \frac{x_{11}}{30} + \frac{x_{12}}{50} + \frac{x_{13}}{30} + \frac{x_{14}}{20} \leq 240, \\ \frac{x_{21}}{60} + \frac{x_{22}}{100} + \frac{x_{23}}{60} + \frac{x_{24}}{40} \leq 150, \\ \frac{x_{31}}{18} + \frac{x_{32}}{30} + \frac{x_{33}}{18} + \frac{x_{34}}{12} \leq 150. \end{cases}$$

Всі невідомі – невід’ємні:

$$x_{ij} \geq 0$$

Цільова функція виражає загальні витрати:

$$f = (20x_{11} + 8x_{21} + 5x_{31}) + (10x_{12} + 12x_{22} + 10x_{32}) + (5x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33}) + (12x_{14} + 8x_{24} + 9x_{34}) \rightarrow \min.$$

Помічаємо, що в цієї задачі продуктивності – пропорційні: $q_{ij} = \alpha_i \beta_j$; співмножники α_i, β_j наведені в таблиці. Переходимо до нових змінних $x_{ij} = \beta_j y_{ij}$:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 6y_{11}, & x_{12} &= 10y_{12}, & x_{13} &= 6y_{13}, & x_{14} &= 4y_{14}, \\ x_{21} &= 6y_{21}, & x_{22} &= 10y_{22}, & x_{23} &= 6y_{23}, & x_{24} &= 4y_{24}, \\ x_{31} &= 6y_{31}, & x_{32} &= 10y_{32}, & x_{33} &= 6y_{33}, & x_{34} &= 4y_{34}, \end{aligned}$$

Підставляємо ці вирази в обмеження задачі і функцію цілі. Після скорочення загальних співмножників одержуємо:

$$\begin{cases} y_{11} + y_{21} + y_{31} \geq \frac{3000}{6} = 500, \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} \geq \frac{15000}{10} = 1500, \\ y_{13} + y_{23} + y_{33} \geq \frac{4500}{6} = 750, \\ y_{14} + y_{24} + y_{34} \geq \frac{1500}{4} = 375. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} \leq 5 \cdot 240 = 1200, \\ y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} \leq 10 \cdot 150 = 1500, \\ y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} \leq 3 \cdot 150 = 450. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f &= 6(20y_{11} + 8y_{21} + 5y_{31}) + 10(10y_{12} + 12y_{22} + 10y_{32}) + 6(5y_{13} + 9y_{23} + 6y_{33}) + 4(12y_{14} + 8y_{24} + 9y_{34}), \\ f &= (120y_{11} + 100y_{12} + 30y_{13} + 48y_{14}) + \\ &+ (48y_{21} + 120y_{22} + 54y_{23} + 32y_{24}) + \\ &+ (30y_{31} + 100y_{32} + 36y_{33} + 36y_{34}). \end{aligned}$$

Таким чином, задача зведена до транспортної задачі з новими тарифами $c'_{ij} = \beta_j c_{ij}$, запасами $a'_i = \alpha_i a_i$, попитом $b'_j = \frac{b_j}{\beta_j}$ відносно невідомих $y_{ij} = \frac{x_{ij}}{\beta_j}$. Умови цієї транспортної задачі і її оптимальний розв'язок наведено нижче.

Тарифи, запаси, попит						Оптимальний план Y_{ij}						Оптимальний план X_{ij}					
	B_1	B_2	B_3	B_4	Запас		B_1	B_2	B_3	B_4	Суми		B_1	B_2	B_3	B_4	Час
A_1	120	100	30	48	1 200	A_1		450	750		1200	A_1		4500	4500		240
A_2	48	120	54	32	1500	A_2	500	600		375	1475	A_2	3000	6000		1500	147,5
A_3	30	100	36	36	450	A_3		450			450	A_3		4500			150
Попит	500	1500	750	375		Суми	500	1500	750	375		Штук	3000	15000	4500	1500	

Транспортна задача виявилася відкритою, тому був введений фіктивний споживач B_f із попитом 25 одиниць. Оптимальний план відносно y_{ij} знайдений методом потенціалів. Оптимальний план відносно x_{ij} визначений за формулами $x_{ij} = \beta_j y_{ij}$. Наприкінці обчислено реальний час завантаження обладнання.

Більш простий і поширений випадок пропорційності продуктивностей, коли вони є однаковими для всіх споживачів $q_{ij} = \alpha_i$. Сформулюємо умови двох типових задач з такими продуктивностями.

Приклад. Нехай на чотирьох ткацьких верстатах з фондом завантаження 200, 300, 250, 400 годин виробляється тканина трьох артикулів A, B, C з продуктивністю 260, 200, 340, 500 м/год. Сумарний попит на тканину кожного артикула – 200, 100, 150 тис. м. Відома матриця прибутку c_{ij} , грн/м. Необхідно найкращим чином розподілити замовлення між верстатами. Умови завдання зведемо в стандартну таблицю:

Верстати	Тканина			Фонд часу	Продуктивність м/год	Запас тис. м
	A	B	C			
I	2,5	1,6	0,8	200	260	52
II	2,2	1,0	1,0	300	200	60
III	2,0	1,9	0,6	250	340	85
IV	2,8	1,2	0,9	100	500	200
Попит	200	100	150			

В останньому стовпчику таблиці (запас, тис. м) обчислені максимальні об'єми виробництва для кожного верстату (фонд часу $\times$ продуктивність), після чого задача безпосередньо зводиться до транспортної задачі. Отже для задач даного типу «продуктивності» – це лише коефіцієнти, що зв'язують розмірності попиту з розмірностями запасів.

Приклад. Запаси вугілля трьох сортів дорівнюють 300, 800, 400 т з теплотворною здатністю 1 800, 2 500, 3 000 кал/кг. Вугілля перевозиться до чотирьох споживачів, попит яких виражений у млн кал: 750, 920, 1 100, 800.

Відомі сумарні витрати на видобування і доставку вугілля (матриця c_{ij} , грн/т). Знайти оптимальний план поставок вугілля. Умови задачі записуємо в таблицю:

Вугілля	Витрати, грн/т				Запас т	Теплотворна здатність, кал/кг	Запас млн. кал
	B_1	B_2	B_3	B_4			
I	27	36	18	18	300	1 800	540
II	30	25	15	20	800	2 500	2 000
III	35	30	24	21	400	3 000	1 200
Попит	750	920	1100	800			

Знання теплотворної здатності дозволило перерахувати запаси вугілля кожного сорту в теплові одиниці (млн кал). Якщо визначати план x_{ij} в цих же одиницях, задача буде звичайною транспортною задачею.

Задача про заміну устаткування

Після вироблення ресурсу обладнання можна замінити і купувати нове, або зробити ремонтні роботи різного ступеня складності. Необхідно знайти найбільш вигідну стратегію оновлення устаткування. Звичайно такі задачі намагаються розв'язувати методами динамічного програмування. Проте про оптимальну стратегію заміни устаткування можна звести до задачі транспортного типу.

Приклад. Майстерня використовує щотижня дискові пили у таких кількостях (за днями тижня):

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд	Усього
Попит	24	12	14	20	18	14	22	124

Можна кожний день купувати нові пили за ціною 12 грошових одиниць, чи віддавати їх на заточення, що коштує 3 грошові одиниці, але ця (ремонтна) робота виконується 2 доби. Є ще можливість віддавати пили на термінове нічне заточення, що буде коштувати 6 грошових одиниць. Яка буде найвигідніша стратегія щотижневого оновлення інструменту?

Відразу відкинемо стратегію закупівлі всіх 124 пил, що буде коштувати $124 \times 12 = 1\,488$ грошових одиниць. Можна закупити тільки 24 пили (максимальний щоденний попит) і далі віддавати їх на заточення. Навіть якщо це буде виключно термінові нічні заточення, вартість такої стратегії буде $24 \times 12 + 100 \times 6 = 888$ грошових одиниць, тобто значно менше, ніж 1 488. Чи можна ще знизити вартість оновлення інструменту використовуючи звичайне дводобове заточення?

Сформулюємо цю задачу як транспортну, де роль споживачів відіграють дні тижня з відомим попитом. Роль постачальників будуть відігравати різні

стратегії (способи) постачання інструменту. Перший спосіб – купівля нових пил за ціною 12 грошових одиниць – може забезпечити поставку інструменту в будь-який день тижня, отже запас цього «постачальника» дорівнює 124 пили. Наприкінці кожного робочого дня з'являється можливість віддавати на заточення затуплені пили (у кількості, що дорівнює попиту на цей день). Нагадаємо, що звичайне заточення потребує 2 доби, тобто оновлення інструменту на наступні два дні можливе за допомогою термінового нічного заточення і тільки у разі поставок на третій і наступні дні можна розраховувати на більш дешеве звичайне заточення. Отже, маємо ще 7 «постачальників» за днями тижня з запасами, що дорівнюють пилам, використаним у цей день. Затрати на наступні два дні дорівнюють 6, в останні дні 3 грошовим одиницям. До речі, остання 8-ма стратегія наприкінці тижня – нічого не робити, зношений за неділю інструмент списується. Таким чином, маємо 8 стратегій оновлення інструменту і 8 споживачів цього інструменту (8-й споживач – фіктивний, оскільки ця задача відкрита – один перший «постачальник» спроможний забезпечити весь попит).

Нижче в таблиці наведені умови задачі і складено перший план.

Вартість оновлення (зверху курсивом) і план (знизу напівжирне)

<i>Стратегії</i>	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд	<i>Залишки</i>	<i>Запаси</i>
Нове	¹² 24	¹²	¹²	¹²	¹²	¹²	¹²	100	124
Пн		⁶ 12	⁶ 2	³ 10	3	3	3		24
Вт			⁶ 12	⁶	3	3	3		12
Ср				⁶ 10	⁶ 4	³	3		14
Чт					⁶ 18	⁶ 2	³		20
Пт						⁶ 10	⁶ 6	2	18
Сб							⁶ 14		14
Нд								22	22
<i>Попит</i>	24	12	14	20	18	14	22	124	

Далі буде пояснено, як був складений цей перший план. Спочатку задовольняється попит першого споживача, що можна зробити тільки одним способом – закупити всі 24 пили. Це – найбільший денний попит, тому більше за цією стратегією інструмент діставати не будемо, залишок запасу першого постачальника переносимо в графу *Залишки*. Задача скорочується на один рядок і один стовпець.

Попит 12 пил у вівторок (якщо перша стратегія вже виключена) можна задовольнити тільки терміновим нічним заточенням інструмента, що відпрацював у понеділок. Запас 24 пили скорочується на 12, тобто є ще 12 пил,

що будуть використані у наступні дні (і нам потрібно вирішити, яким способом вони будуть заточені). Задача скорочується ще на один стовпець.

Попит 14 пил у середу можна задовольнити тільки терміновим заточенням, але різними замовленнями. До середи ми маємо знову 24 пили (12 після понеділка і 12 після вівторка). Вирішуємо здати на термінове заточення 12 пил, що маємо після вівторка, ще 2 пили маємо після понеділка, тоді 10 пил можна заточити звичайним більш дешевим способом. Отже до четверга маємо 10 пил після звичайного заточення і ще 10 пил одержуємо після термінового заточення. Задача знову скорочується на два рядки і ще на один стовпець.

Ось таким чином був складений цей план оновлення інструменту. Перевірка методом потенціалів показала, що цей план – оптимальний і є ще багато еквівалентних планів. Вартість оптимального плану складає $f_{min} = 840$ грошових одиниць. Наведемо інструкцію послідовності постачання інструменту за днями тижня:

- 1) до понеділка слід купувати 24 пили і використати їх у понеділок;
- 2) наприкінці понеділка здати 10 пил на звичайне дводобове заточення і 14 пил на термінове нічне заточення;
- 3) у вівторок використати 12 пил (що одержані після нічного заточення) і знову здати їх на термінове нічне заточення;
- 4) щосереди маємо 14 пил (що одержані після нічного заточення), використовуємо їх, далі 10 пил віддаємо на нічне і 4 – на звичайне дводобове заточення;
- 5) щочетверга маємо 10 пил після термінового і 10 пил після звичайного заточення, використовуємо їх, далі віддаємо 18 пил на термінове і 2 пили на звичайне дводобове заточення;
- 6) у п'ятницю використовуємо 18 пил (що одержані після нічного заточення), з них 16 віддаємо на термінове заточення, а 2 пили вже не потрібні (списуємо);
- 7) щосуботи маємо 4 пили після звичайного заточення і беремо ще 10 після нічного заточення, наприкінці віддаємо всі 14 пил на останнє нічне заточення;
- 8) щонеділі маємо 22 пили (з них 2 після звичайного і 20 після термінового заточення), використовуємо їх і списуємо;
- 9) на новий тиждень знову купуємо 24 нові пили. Далі все повторюється.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади економічних задач, для яких доцільно використовувати алгоритми та методи вирішення транспортної задачі.
2. У чому особливість розв'язання задачі вибору оптимального варіанта використання виробничого обладнання?

10. Задачі дробово-лінійного програмування. Основні методи їх розв'язання та аналізу

10.1. Економічна і математична постановка задачі дробово-лінійного програмування.

10.2. Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування.

10.3. Розв'язування дрібно-лінійної задачі зведенням до задачі лінійного програмування.

10.1. Економічна і математична постановка задачі дробово-лінійного програмування

Часто в реальних оптимізаційних задачах в економіці підприємства критерієм оптимальності використовують рівень рентабельності, продуктивності праці і т. д. Ці фінансові показники є відносними величинами та математично виражаються дробово-лінійними функціями. У цьому випадку загальна економіко-математична модель така:

Максимізувати рентабельність виробництва:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \rightarrow \max, \quad (10.1)$$

де c_j – прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції, при цьому загальний прибуток $\sum_{j=1}^n c_j x_j$; d_j – витрати на виробництво одиниці j -го виду продукції, при цьому $\sum_{j=1}^n d_j x_j$ – загальні витрати на виробництво;

за умови виконання обмежень щодо використання ресурсів підприємств:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i \\ (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Оскільки задача (10.1) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише цільовою функцією, тому для її вирішення використовуються модифіковані відомі методи розв'язання задач лінійного програмування.

10.2. Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування

Нехай дана задача дробово-лінійного програмування для випадку двох змінних:

$$Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Як і в лінійному програмуванні будуємо область допустимих розв'язків відповідно до системи обмежень. Для побудови цільової функції її вираз

$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = Z$ слід спростити, припустивши $d_1 x_1 + d_2 x_2 > 0$. Маємо:

$$(c_1 - Z d_1) x_1 + (c_2 - Z d_2) x_2 = 0,$$

звідки виразимо

$$x_2 = -\frac{(c_1 - Z d_1)}{(c_2 - Z d_2)} x_1,$$

$$x_2 = k x_1,$$

де $k(Z) = \frac{(Z d_1 - c_1)}{(c_2 - Z d_2)}$ – кутовий коефіцієнт, який є функцією від Z .

Рівняння $x_2 = k x_1$ представляє пряму з кутовим коефіцієнтом, що проходить через початок координат. Якщо Z приймає постійне значення ($Z = \text{const}$), то деяке постійне значення отримає і коефіцієнт k , а пряма займе на площині в прямокутній системі координат певне положення (рис. 10. 1). За іншого постійного значення Z пряма $x_2 = k x_1$ займе інше положення. Воно як би повернеться навколо початку координат.

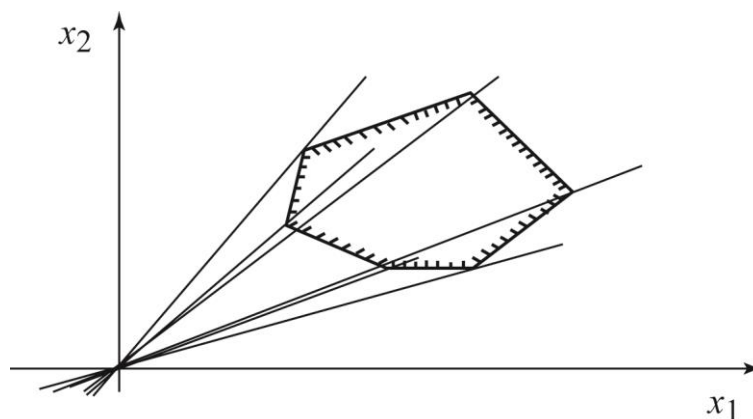


Рис. 10.1.

Необхідно з'ясувати знак похідної кутового коефіцієнта k стосовно Z :

$$k'(Z) = \frac{(c_2 d_1 - c_1 d_2)}{(c_2 - Z d_2)^2}.$$

Звідси видно, що знаменник дробу завжди додатний, а чисельник не залежить від цільової функції Z . Отже, похідна k' має постійний знак.

Правило 1. Якщо $k'(Z) = \frac{(c_2 d_1 - c_1 d_2)}{(c_2 - Z d_2)^2} > 0$, то оскільки знаменник завжди

додатний, слідує, що $(c_2 d_1 - c_1 d_2) > 0$, то для відшукування точки максимуму необхідно повертати пряму, яка описує цільову функцію біля початку координат у напрямку проти годинникової стрілки.

Правило 2. Якщо $k'(Z) = \frac{(c_2 d_1 - c_1 d_2)}{(c_2 - Z d_2)^2} < 0$, то $(c_2 d_1 - c_1 d_2) < 0$ і для

відшукування точки максимуму необхідно повертати пряму, яка описує цільову функцію біля початку координат у напрямку за годинниковою стрілкою.

Зауваження. Багатокутник розв'язків задачі дробово-лінійного програмування може бути: обмежений і максимальне та мінімальне значення досягаються у його кутових точках; необмежений, проте існують кутові точки, в яких досягаються максимальне та мінімальне значення цільової функції; необмежений і досягається лише один із екстремумів; необмежений і точки екстремумів визначити неможливо.

Приклад. На плодоконсервному заводі з трьох видів фруктів (яблука, груші, сливи) виготовляють компот двох видів. Кількість фруктів, необхідна для приготування 1 л компоту, запас фруктів і витрати подані в табл. 10.1. Відомо також, що яблук можна витратити не більше 500 кг, груш і слив – не менше 400 і 300 кг відповідно. Потрібно скласти план виробництва компоту двох видів і отримати максимальну та мінімальну собівартість 1 л компоту.

Таблиця 10.1

Умова задачі

Фрукти	Запаси, кг	Витрата (кг) на компот виду	
		I	II
Яблука	500	0,3	0,2
Груші	400	0,2	0,3
Сливи	300	0,3	0,2
Витрати на 1 л компоту, грош. од.		0,5	0,6

Позначимо: x_1 – кількість літрів компоту I виду, x_2 – кількість літрів компоту II виду. Тоді система обмежень за витратою фруктів прийме вигляд:

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,2x_2 \leq 500 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 \geq 400 \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Витрати на виробництво компоту: $z_1 = 0,5x_1 + 0,6x_2$, загальний обсяг виробництва компоту представляється функцією $z_2 = x_1 + x_2$, відношення загальних витрат до загального обсягу виробництва дає собівартість 1 л компоту:

$$Z = \frac{0,5x_1 + 0,6x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,2x_2 \leq 500, \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 \geq 400, \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 300, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Необхідно створити область допустимих розв'язків (ОДР). Щоб визначити, в якій точці ОДР цільова функція буде мати екстремальне значення, виразимо x_2 :

$$x_2 = \frac{0,5 - Z}{Z - 0,6} x_1,$$

його похідна

$$k' = \frac{0,1}{(Z - 0,6)^2}.$$

Оскільки похідна за будь-якого значення Z додатна, функція $k = \frac{0,5 - Z}{Z - 0,6}$ зростаюча; із збільшенням Z кутовий коефіцієнт збільшується. Це відповідає обертанню прямої проти ходу годинникової стрілки (рис. 10.2).

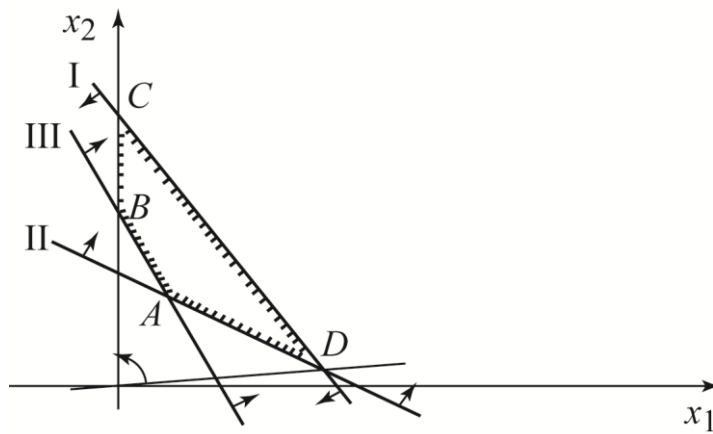


Рис. 10.2

Таким чином, найбільше значення цільова функція буде досягати в вершинах B і C області припустимих рішень, тобто максимальна собівартість визначається у всіх точках ребра BC . Координати точок B і C рівні відповідно $(0; 1\,500)$ і $(0; 2\,500)$; цільова функція в цих точках:

$$Z_{\max} = Z(B) = Z(C) = 0,6,$$

тобто максимальна собівартість 1 л компоту становить 60 грош. од.

Мінімальна собівартість досягається в точці D області припустимих розв'язків; цільова функція в точці D :

$$Z_{\min} = Z(D) \approx 0,52.$$

Отже, мінімальна собівартість 1 л компоту 52 грош. од, максимальна – 60 грош. од.

На рис. 10.2 видно, що собівартість 1 л компоту залишається постійною, рівною 60 грош. од. у процесі виробництва компоту II виду від 1 500 до 2 500 л., тобто $1\,500 \leq x_2 \leq 2\,500$.

Зауваження. Розв'язання задач графічним методом може бути простішим. Досить знайти координати крайніх точок області допустимих розв'язків, а потім обчислити значення цільової функції в цих точках і вибрати з них найбільше і найменше.

10.3. Розв'язування дрібно-лінійної задачі зведенням до задачі лінійного програмування

Задачу дробово-лінійного програмування можна звести до задачі лінійного програмування і вирішити симплексним методом.

Позначимо $y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j}$ за умови $\sum_{j=1}^n d_j x_j \neq 0$. Цільова функція

буде мати вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \sum_{j=1}^n c_j x_j y_0 = \sum_{j=1}^n c_j y_j,$$

де нова змінна $y_j = y_0 x_j$, звідки $x_j = \frac{y_j}{y_0}$. Тоді система обмежень $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$

буде $\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i$ або $\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j}{y_0} = b_i$. Маємо $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0$. Та з урахуванням

$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j}$ або $\frac{1}{y_0} = \sum_{j=1}^n d_j x_j$ та $\sum_{j=1}^n d_j x_j y_0 = 1$, а отже:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_j y_j &= 1, \\ (i = \overline{1, m}), \quad y_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 > 0. \end{aligned}$$

Отже отримаємо таку модель задачі:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^n c_j y_j \rightarrow \max, \\ \text{за умови} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 &= 0, \\ \sum_{j=1}^n d_j y_j &= 1, \\ (i = \overline{1, m}), \quad y_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 > 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Маємо звичайну задачу лінійного програмування, яка розв'язується симплексним методом. Після знаходження оптимального розв'язку отриманої задачі, використовуючи вказані вище співвідношення, знаходять оптимальний розв'язок вихідної задачі дробово-лінійного програмування.

Приклад. Дано задачу дробово-лінійного програмування:

$$F = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max \text{ за обмежень:}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Позначимо $x_1 + 2x_2 + 1 = \frac{1}{y_0}$, $y_0 > 0$, тоді $F = 2x_1y_0 - x_2y_0$.

Позначимо: $x_1y_0 = y_1$, $x_2y_0 = y_2$, $x_3y_0 = y_3$, $x_4y_0 = y_4$.

Перетворимо систему обмежень, помноживши обидві частини всіх обмежень на y_0 , і перейдемо до змінних y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 . Задача набуде вигляду $F = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max$ за обмежень:

$$\begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,4}, y_0 > 0. \end{cases}$$

№	Базис	$c_{\text{баз}}$	c_j	0	2	-1	0	0	Примітки
			A_0	y_0	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	A_3	0	0	-2	1	-2	1	0	
2	A_4	0	0	-6	2	1	0	1	
3			1	1	1	2	0	0	
4	A_3	0	2	0	3	2	1	0	
5	A_4	0	6	0	8	13	0	1	
6	y_0	0	1	1	1	2	0	0	
7	Δ_1		0	0	-2	1	0	0	
8	A_1	2	2/3	0	1	2/3	1/3	0	

9	A_4	0	2/3	0	0	2/3	-8/3	1	
10	y_0	0	1/3	1	0	4/3	-1/3	0	
11	Δ_2		4/3	0	0	7/3	2/3	0	

Маємо $Y^* = (1/3, 2/3, 0, 0, 2/3)$.

Тоді $x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 2$, $x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0$, $x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0$, $x_4 = \frac{y_4}{y_0} = 2$,

$X^* = (2, 0, 0, 2)$, $F_{\max} = 4/3$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть економічну і математичну постановку задачі дробово-лінійного програмування.
2. Які методи застосовуються для розв'язання задачі дробово-лінійного програмування?
3. Яка геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування?
4. Як розв'язання дробово-лінійної задачі зводиться до задачі лінійного програмування?

11. Цілочислові задачі лінійного програмування. Основні методи їх розв'язання та аналізу

11.1. Економічна постановка задачі цілочислового програмування та її математична модель.

11.2. Графічний метод розв'язання цілочислових задач.

11.3. Основні аналітичні методи розв'язання цілочислових задач. Метод Гоморі.

11.4. Метод гілок і меж.

11.1. Економічна постановка задачі цілочислового програмування та її математична модель

Значна частина задач комерційної діяльності вимагає цілочислового розв'язку. До них належать задачі, у яких змінні величини означають кількість одиниць неділимої продукції, наприклад, розподілу товарів між підприємствами, розкрій матеріалів, число верстатів під час завантаження обладнання, розподіл транспортних засобів за рейсами, продаж автомобілів, розподіл літаків за авіалініями, кількість персональних комп'ютерів у керуючому комплексі і т. д. Лінійні задачі, розв'язок яких має бути отримано в цілих числах, називають задачами цілочислового програмування. У випадку, коли цілочислових значень повинні набувати не всі, а тільки одна або декілька змінних, задача називається частково цілочисловою. До цілочислових задач належать і задачі, в яких змінні набувають значення 0 або 1. Слід відмітити, що умова цілочисловості є нелінійна і може зустрічатись в задачах, які містять як лінійні, так і нелінійні функції.

У загальному вигляді математична модель цілочислового програмування має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad (11.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (11.2)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11.3)$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j - \text{цілі числа.}$$

11.2. Графічний метод розв'язання цілочислових задач

За наявності в задачі лінійного програмування двох змінних, а в системі обмежень – нерівностей, вона може бути розв'язана графічним методом.

У системі координат $X_1 O X_2$ знаходять область допустимих розв'язків, будують вектор $\bar{C}$ і лінію рівня. Переміщуючи лінію рівня по напрямку $\bar{C}$ для задач на максимум, знаходимо найбільш віддалену від початку координат точку і її координати.

У тому випадку, коли координати цієї точки цілочислові, в області допустимих розв'язків будують цілочислову решітку і знаходять на ній такі цілі числа, які задовольняють систему обмежень і за яких значення цільової функції

найближче до екстремального не цілочислового розв'язку. Координати такої вершини i є цілочисловим розв'язком. Аналогічно розв'язується задача на мінімум.

Отже, особливість геометричної інтерпретації цілочислової задачі, порівняно зі звичайною задачею лінійного програмування, полягає у визначенні множини допустимих розв'язків. Областю допустимих розв'язків загальної задачі лінійного програмування є опуклий багатогранник. З урахуванням вимоги цілочисловості з даної області вибирають множину дискретних розв'язків, яка складається з окремих точок. Якщо в умові задачі наявні дві змінні, розв'язок задачі можна відшукати графічно, використавши цілочислову сітку, а якщо це не можливо, то слід застосувати спеціальні методи.

Приклад. Для покращення фінансового становища фірма прийняла рішення щодо збільшення випуску конкурентоспроможної продукції, для чого прийнято рішення про встановлення в одному з цехів додаткового обладнання, що займає $19/3$ м² площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 ум. од., при цьому вона може купити обладнання двох видів. Придбання першого комплекту обладнання 1-го виду коштує 1,0 ум. од., другого виду – 3 ум. од. Придбання одного комплекту обладнання 1-го виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 шт., а одного комплекту обладнання 2-го виду – на 4 шт. Знаючи, що для встановлення одного комплекту обладнання 1-го виду потрібно 2 м² площі, а для обладнання 2-го виду – 1 м² площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Складемо математичну модель задачі.

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа.} \end{cases} \end{aligned}$$

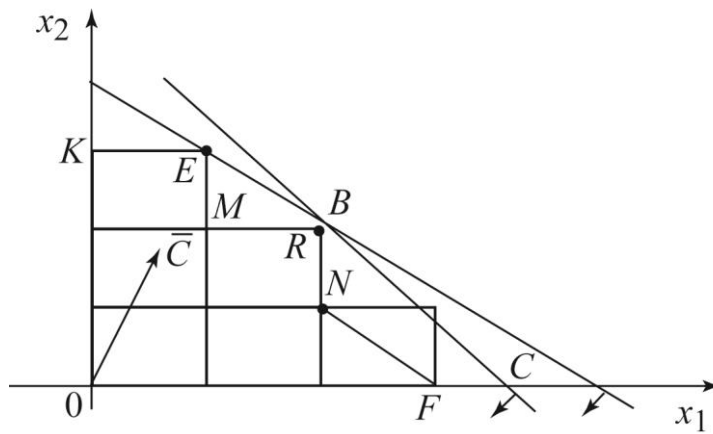


Рис. 11.1.

Без умови цілочисловості чотирикутник $OABC$ – область допустимих розв'язків.

Оптимальний розв'язок у точці $B\left(\frac{9}{5}, \frac{41}{15}\right)$, $Z_{\max} = \frac{218}{15}$ ум. од.

Умову цілочисловості задовольняють 12 точок. Замінюємо багатокутник $OABC$ на $OKEMRNF$, що містить всі допустимі точки з цілочисловими координатами. За градієнтом оптимум у точці $E(1, 3)$, $Z_{\max}(X_{\text{цел}}) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$ ум. од.

Висновок. Фірмі слід придбати один комплект обладнання першого виду і три комплекти обладнання другого виду, що забезпечить їй за наявних обмежень на виробничі площі та кошти максимальне збільшення випуску продукції, що дорівнює 14 ум. од за зміну.

11.3. Основні аналітичні методи розв'язання цілочислових задач.

Метод Гоморі

Методи цілочислової оптимізації можна розділити на три основні групи:

а) метод відсікання; б) комбіновані методи; в) наближені методи.

Метод відсікання полягає в поступовому звуженні області допустимих розв'язків. Спочатку задача розв'язується без урахування вимог цілочисловості змінних, продовжується з введенням даної вимоги, при цьому область допустимих розв'язків зменшується до тих пір, доки в оптимальному розв'язку не будуть змінні, значення яких цілі числа.

Розглянемо один з методів відсікання – метод Гоморі.

Алгоритм Гоморі:

1) розв'язується задача без урахування умов цілочисловості;

2) отриманий оптимальний розв'язок (якщо він існує) перевіряється на цілочисловість. Якщо умова цілочисловості виконується за всіма змінними, то оптимальний розв'язок знайдено. Якщо ця умова не виконується, то необхідно перейти до наступного етапу або робити висновок, що задача виявилась нерозв'язаною (випадок: базисна змінна дробова, а всі коефіцієнти в рядку цілі числа);

3) будується додаткове обмеження, що відтинає частину області, в якій міститься оптимальний розв'язок задачі (11.1), (11.2) і не міститься жодного допустимого розв'язку задачі (11.1) – (11.3);

4) останній етап передбачає повернення до задачі лінійного програмування з відкинутою умовою цілочисловості, але з розширеною системою обмежень, в яку включено додаткове обмеження, яке отримане на 3-му кроці. До розширеної системи обмежень знову застосовується симплексна процедура. Якщо знайдений таким чином розв'язок буде знову не цілочисловим, то формується нове додаткове обмеження і процес обчислень повторюється.

Алгоритм Гоморі дозволяє за кінцеве число кроків дійти до оптимального цілочислового розв'язку, якщо він існує. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислової задачі методом Гоморі на площині представлена на рис. 11.2.

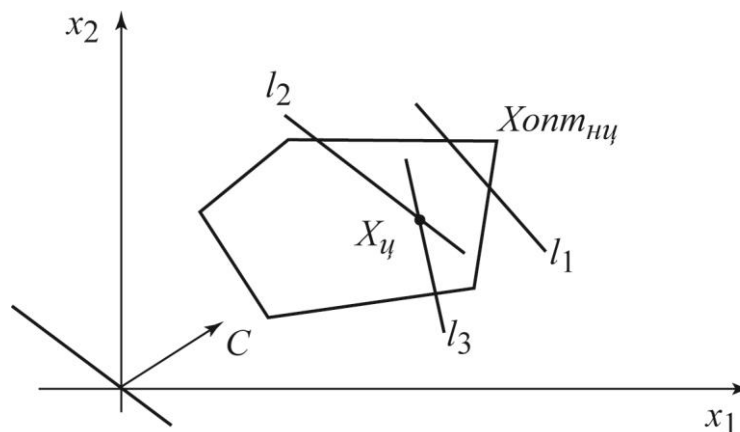


Рис. 11.2.

На рис. 11.2 $X_{opt\ nu}$ – оптимальний розв'язок без урахування цілочисловості; три прямі l_1, l_2, l_3 відповідають трьом додатковим лінійним обмеженням.

Необхідно скласти правильне додаткове обмеження, яке відсікає частину області допустимих розв'язків. Правило відсікання повинно задовольняти наступні умови: 1) бути лінійним; 2) відсікає знайдений оптимальний нецілочисловий розв'язок задачі; 3) не відсікає жодної з цілочислових точок задачі (11.1) – (11.3).

Процедура формування правильного відсікання

Після кожної ітерації система обмежень має вигляд:

$$x_i = \beta_i - \sum_{x_j \in \{B3\}} \alpha_{ij} x_j, x_j \in \{B3\} - \text{множина вільних змінних,}$$

$$x_i \in \{B3\} - \text{множина базисних змінних.}$$

Якщо виконується умова оптимальності задачі, то потрібно знайти оптимальний розв'язок. Якщо всі компоненти оптимального плану є цілочисловими, то задача розв'язана.

Нехай деякі β_0 – нецілі, нехай компонента i_0 – неціла. Розглянемо рівність, для якої виконується умова оптимальності:

$$x_{i_0} = \beta_{i_0} - \sum_{x_j \in \{B3\}} \alpha_{i_0 j} x_j.$$

Число представляється як: $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, $0 \leq \{\alpha\} < 1$, тоді:

$$\beta_{i_0} = [\beta_{i_0}] + \{\beta_{i_0}\}, \quad \alpha_{i_0 j} = [\alpha_{i_0 j}] + \{\alpha_{i_0 j}\}, \quad x_j \in \{B3\}.$$

Нехай β_{i_0} неціле, то $\{\beta_{i_0}\} > 0$ і $\{\alpha_{i_0 j}\} \geq 0$, тоді

$$x_i = \left([\beta_{i_0}] - \sum_{x_j \in \{B3\}} [\alpha_{i_0 j}] x_j \right) + \left(\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{B3\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j \right). \quad (11.4)$$

Оскільки перший доданок рівності (11.4) є ціле число, то для того щоб x_{i_0} було цілим, необхідно, щоб другий доданок також був цілим, тобто величина $L_{i_0} = \{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{B3\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j$ повинна бути цілим числом. Необхідно показати, що

$L_{i_0} \leq 0$ – ціле число. Величина $\sum_{x_j \in \{B3\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j$ не може бути від'ємною; з умови

$0 \leq \{\beta_{i_0}\} < 1$. І враховуючи, що L_{i_0} – ціле, то якщо $L_{i_0} > 0$, впливає, що $\{\beta_{i_0}\} > 1$ – це суперечить визначенню дробової частини числа.

Таким чином, доведено, що будь-який допустимий розв'язок задачі (11.1) – (11.3) має задовольняти нерівності $\{\beta_i\} - \sum_{x_j \in \{B3\}} \{\alpha_{ij}\} x_j \leq 0$.

Теорема. Нерівність $\{\beta_i\} - \sum_{x_j \in \{B3\}} \{\alpha_{ij}\} x_j \leq 0$ визначає правильне відсікання

Гоморі, тобто: 1) є лінійним; 2) відсікає знайдений оптимальний не цілочисловий розв'язок задачі; 3) не відсікає жодного цілочислового плану задачі.

Продовження прикладу. Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі.

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа.} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа.} \end{cases}$$

Розв'язавши задачу без врахування умови цілочисловості, в таблиці отримали нецілочисловий оптимальний розв'язок :

$$X^* \left(\frac{9}{5}, \frac{41}{15} \right), Z_{\max} = \frac{218}{15} \text{ ум. од.}$$

Варто формувати додаткове обмеження:

знайти дробові частини чисел $9/5$ і $41/15$

$$\{a\} = a - [a];$$

$$\left\{ \frac{9}{5} \right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \quad \left\{ \frac{41}{15} \right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}, \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15} \quad \text{отже, скласти додаткове}$$

обмеження для 5-го рядка. Знайти дробові частини

$$\left\{ \frac{3}{5} \right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}, \quad \left\{ -\frac{1}{5} \right\} = -\frac{1}{5} - (-1) = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}, \quad \text{додаткове обмеження буде}$$

мати вигляд:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geq \frac{4}{5} \quad \text{або} \quad \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 - x_5 = \frac{4}{5}$$

і додати в симплекс-таблицю (рядок 7).

№	Базис	$c_{\text{баз}}$	c_j	2	4	0	0	0	Примітки
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_3	0	19/3	2	1	1	0		

2	A_4	0	10	1	3	0	1		
		Δ_1	0	-2	-4	0	0		
3	A_3	0	3	5/3	0	1	-1/3		
4	A_2	4	10/3	1/3	1	0	1/3		
	Δ_2		40/3	-2/3	0	0	4/3		
5	A_1	2	9/5	1	0	3/5	-1/5	0	
6	A_2	4	41/15	0	1	-1/5	2/5	0	
		Δ_3	218/15	0	0	2/5	6/5		
7	A_5	0	-4/5	0	0	-3/5	-4/5	1	
8	A_1	2	1	1	0	0	-1	1	
9	A_2	4	3	0	1	0	2/3	-1/3	
10	A_3	0	4/3	0	0	1	4/3	-5/3	
11		Δ_3	14	0	0	0	2/3	2/3	

Цілочисловий оптимальний розв'язок:

$$X_y^*(1, 3), Z_{\max} = 14 \text{ ум. од.}$$

Комбіновані методи цілочислової оптимізації передбачають перебір всіх допустимих цілочислових розв'язків, але при цьому перебір є цілеспрямований у невеликій області розв'язків. Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Наближені методи розв'язування також досить часто використовують. У реальних задачах часто досить наближеного розв'язку. До наближених методів відносять метод локальної оптимізації (метод вектора спаду), модифікації точних методів, методи випадкового пошуку та ін. Багато наближених методів використовують алгоритми точних методів, як наприклад, метод гілок і меж.

11.4. Метод гілок і меж

Основи цього методу доцільно розглянути на чисельному прикладі.

Приклад. Знайти

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ цілі числа.} \end{cases}$$

Початкову задачу лінійного програмування (ЛП0) (тобто без урахування цілочисловості) розв'яжемо графічно (рис. 11.3). Її оптимальним розв'язком буде:

$$x_1 = 3,75; x_2 = 1,25; z = 23,75.$$

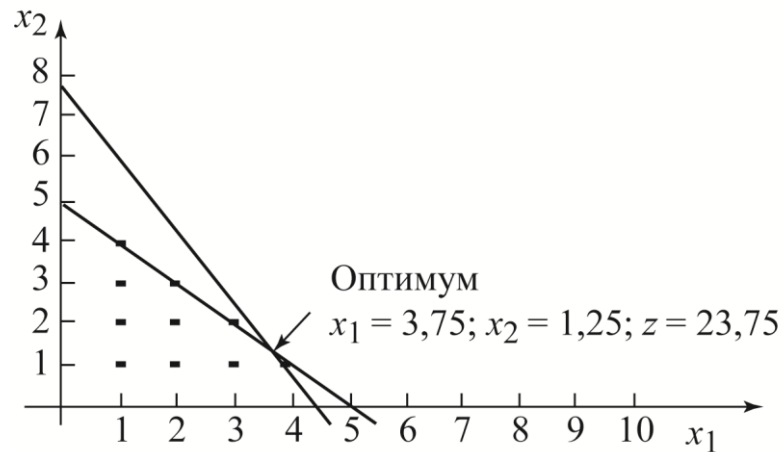


Рис. 11.3.

Оскільки оптимальний розв'язок не цілочисловий, варто застосувати метод гілок і меж, який змінює простір розв'язків задачі лінійного програмування. Спочатку обирається одна з змінних, яка має бути цілочисловою і значення якої в оптимальному розв'язку нецілочислове. Оберемо $x_1 = 3,75$. Область $3 < x_1 < 4$ простору допустимих розв'язків задачі ЛП0 не містить цілочислових значень змінної x_1 і може бути виключена з розгляду. Це еквівалентно заміні вихідної задачі ЗЛ0 двома новими задачами лінійного програмування ЛП1 і ЛП2, які визначаються так:

1) простір допустимих розв'язків ЛП1 – простір допустимих розв'язків ЛП0 + ($x_1 \leq 3$);

2) простір допустимих розв'язків ЛП2 – простір допустимих розв'язків ЛП0 + ($x_1 \geq 4$).

На рис. 11.4 зображені простори допустимих розв'язків задач ЛП1 і ЛП2.

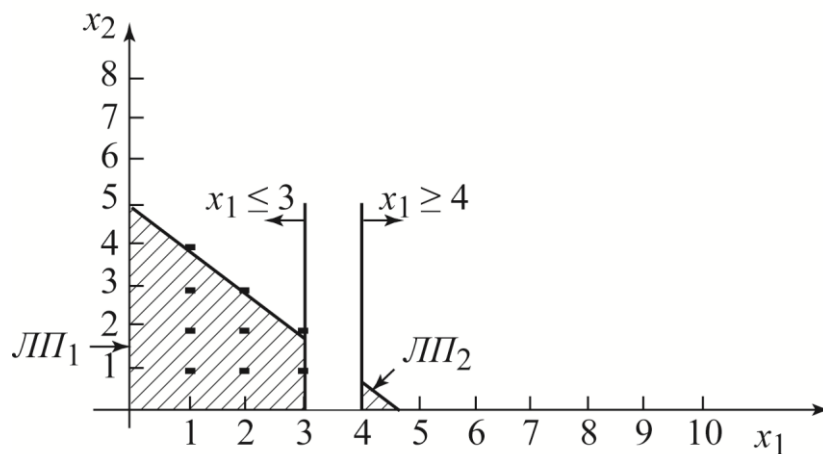


Рис. 11.4.

Далі будемо розв'язувати задачу цілочислового програмування шляхом розв'язання послідовності безперервних задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_1 \leq 3$ і $x_1 \geq 4$ взаємовиключні, оскільки ЛП1 і ЛП2 необхідно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування (рис. 11.5).

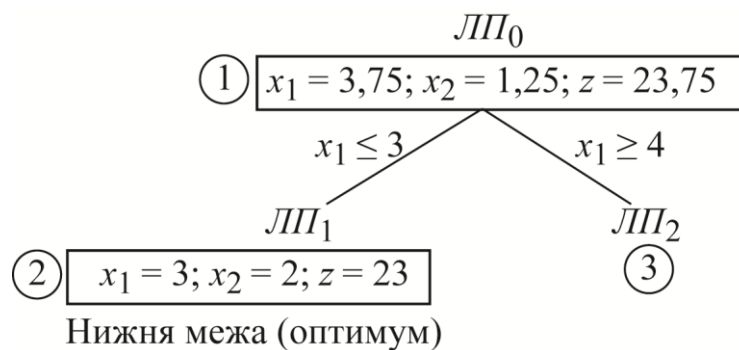


Рис. 11.5.

Діхотомізація задач ЛП – основа концепції розгалуження в методі гілок і меж. У цьому випадку x_1 називається змінною розгалуження.

Оптимальний розв'язок задачі ЦЛП знаходиться в просторі допустимих розв'язків або задачі ЛП1, або ЛП2. Отже, обидві підзадачі повинні бути розв'язані. Потрібно вибирати спочатку задачу ЛП1 (вибір довільний), що має додаткове обмеження $x_1 \leq 3$, тобто:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ цілі числа.} \end{cases}$$

Оптимальним розв'язком задачі ЛП1 є $x_1 = 3, x_2 = 2, z = 23$. Оптимальний розв'язок задачі ЛП1 задовольняє вимогу цілочисловості змінних, у цьому випадку говорять, що задача ЛП1 прозондована і можна сказати, що значення $z = 23$ є нижньою межею оптимального (максимального) значення цільової функції вихідної задачі ЦЛП. При значенні нижньої межі $z = 23$ варто дослідити задачу ЛП2. Так як у задачі ЛП0 оптимальне значення цільової функції дорівнює 23,75 і всі її коефіцієнти є цілими числами, то неможливо отримати цілочисловий розв'язок задачі ЛП2 (простір розв'язків якої більш вузький, ніж у задачі ЛП0), який буде краще наявного. У результаті потрібно відкинути підзадачу ЛП2 і вважати її прозондовою.

Необхідно розглянути два моменти: 1) під час вибору підзадачі можна для зондування розв'язати спочатку задачу ЛП2 замість ЛП1; 2) в задачі ЛП0 спочатку вибрати змінну x_2 змінну розгалуження замість x_1 .

Ситуація, коли першою розв'язується задача ЛП2, ілюструється схемою обчислень (рис. 11.6). Оскільки значення змінної $x_2 = 0,83$ не є цілим числом, то задача ЛП2 досліджується далі. Варто розглянути задачі ЛП3 і ЛП4, використовуючи гілки $x_2 \leq 0$ і $x_2 \geq 0$ відповідно. Це означає, що:

1) простір розв'язків ЛП3 = простір розв'язків ЛП2 + $(x_2 \leq 0)$ = простір розв'язків ЛП0 + $(x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0)$;

2) простір розв'язків ЛП4 = простір розв'язків ЛП2 + $(x_2 \geq 1)$ = простір розв'язків ЛП0 + $(x_1 \geq 4) + (x_2 \geq 1)$.

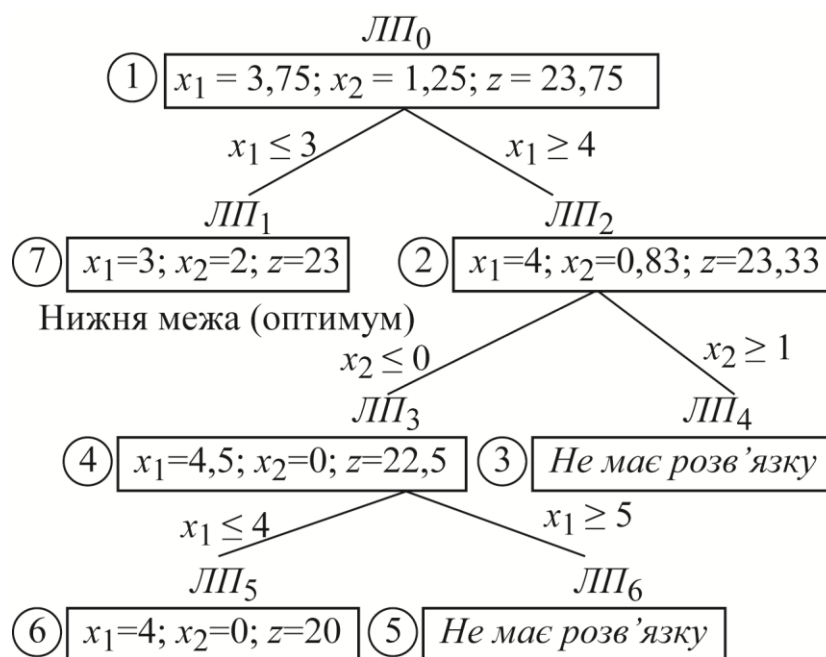


Рис. 11.6.

Є ще три нерозглянуті задачі, які повинні бути розв'язані – ЛП1, ЛП3 і ЛП4. Нехай довільно обрана першою задача ЛП4. Ця задача не має розв'язку, і отже, є прозондованою. Наступною задачею обрана підзадача ЛП3. Її оптимальним розв'язком є $x_1 = 4,5, x_2 = 0, z = 22,5$. Нецілочислове значення змінної $x_1 = 4,5$ породжує дві гілки розв'язку при $x_2 \leq 4$ і $x_2 \geq 5$ і відповідні їм підзадачі ЛП5 і ЛП6. При цьому:

1) простір розв'язків

$$\text{ЛП5} = \text{простір розв'язків ЛП0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \geq 4).$$

2) простір розв'язків

$$\text{ЛП6} = \text{простір розв'язків ЛП0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) (x_2 \geq 5).$$

Тепер не розглянуті лише підзадачі ЛП1, ЛП5 і ЛП6. Підзадача ЛП6 прозондована, так як не має допустимих розв'язків. Підзадача ЛП5 має цілочисловий розв'язок $x_1 = 4, x_2 = 0, z = 20$ і отже, породжує нижню межу $z = 20$ оптимального значення цільової функції задачі ЦЛП. Розв'язок підзадачі ЛП1 цілочисловий $x_1 = 3, x_2 = 2, z = 23$. Отже нижню межу значень цільової функції вважаємо рівною 23. Так як усі підзадачі прозондовані, оптимальним розв'язком задачі ЦЛП є розв'язок, що відповідає останній нижній межі, тобто $x_1 = 3, x_2 = 2, z = 23$.

Послідовність розв'язання підзадачі, показана на рис. 11.6 (ЛП0, ЛП2, ЛП4, ЛП3, ЛП6, ЛП5, ЛП1) є найгіршою, тим не менш, вона зустрічається на

практиці. Даний приклад вказує на основну слабкість методу гілок і меж: як обрати наступну підзадачу для дослідження і як вибрати для неї змінну розгалуження? Існують евристичні міркування, що дозволяють «вгадати», яка з гілок може призвести до погіршення розв'язання задачі ЦЛП, при цьому не існує строгої теорії, яка завжди забезпечувала б надійні результати.

Розглянута процедура застосована для розв'язання задач максимізації. Для розв'язання задач мінімізації в алгоритмі необхідно замінити нижню межу на верхньою (початкове значення якої дорівнює $z = +\infty$). Алгоритм методу гілок і меж безпосередньо поширюється на задачі частково-цілочислового ЛП, в яких лише деякі із змінних повинні приймати цілочисловий розв'язок.

Запитання для самоперевірки

1. Які задачі в економіці потребують цілочислового розв'язку?
2. Запишіть в загальному вигляді математичну модель цілочислового програмування.
3. Як розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом?
4. Яка геометрична інтерпретація розв'язків цілочислової задачі на площині?
5. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
6. У чому суть процедури формування правильного відсікання?
7. Розкажіть загальну ідею реалізації методу гілок і меж.

12. Методи нелінійного програмування

12.1. Загальна постановка задачі опуклого програмування.

12.2. Графічний метод.

12.3. Метод множників Лагранжа.

12.4. Теорема Куна-Таккера.

12.1. Загальна постановка задачі опуклого програмування

Нелінійне програмування застосовується під час оптимізації промислового виробництва, управління товарними ресурсами, планування обслуговування та ремонту обладнання і т. д.

Для задачі нелінійного програмування на відміну від лінійних задач немає єдиного методу розв'язання. Залежно від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи розв'язання, до яких відносяться методи множників Лагранжа, квадратичне і опукле програмування, градієнтні методи, наближені методи розв'язання, графічний метод.

Задача математичного програмування:

$$\begin{aligned} \max(\min) Z &= f(x), \\ \varphi_i(x) &\{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ x &\geq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

у якій або цільова функція, або обмеження, або і те й інше нелінійні, називається нелінійною.

Нелінійні задачі складають широкий клас настільки складних задач, що досі не розроблені досконалі загальні методи, такі як симплекс-метод у лінійному програмуванні, які дозволяли б розв'язувати будь-які нелінійні задачі. Але, незважаючи на відсутність універсальних методів, розроблені способи розв'язання окремих спеціальних класів задач, і насамперед задач з опуклими (увігнутими) функціями $f(x)$ і $\varphi_i(x)$.

Визначення. Функція $f(x)$, визначена на опуклій множині X , називається опуклою, якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 з цієї множини і будь-якого $0 \leq \lambda \leq 1$ справедлива нерівність:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Якщо в даному співвідношенні при $0 < \lambda < 1$ і будь-яких $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) має місце строга нерівність, то $f(x)$ називається строго опуклою.

Визначення. Функція $f(x)$, визначена на опуклій множині X , називається увігнутою, якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 з цієї множини і будь-якого $0 \leq \lambda \leq 1$ справедлива нерівність:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Якщо в даному співвідношенні при $0 < \lambda < 1$ і будь-яких $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) має місце строга нерівність, то $f(x)$ називається строго увігнутою.

Для розв'язання задач нелінійного програмування важливе значення мають такі теореми.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x)$ – опукла функція при всіх $x \geq 0$, то буде опуклою і множина розв'язків системи $\varphi(x) \leq b, x \geq 0$.

Аналогічна теорема доводиться і для увігнутих функцій. Доводиться, що опукла функція $f(x)$, визначена на опуклій множині X , неперервна в будь-якій внутрішній точці цієї множини.

Теорема 2. Опукла функція $f(x)$, визначена на опуклій множині X , досягає свого глобального мінімуму в кожній точці x , в якій градієнт функції обертається в нуль.

Теорема 3. Локальний мінімум опуклої функції $f(x)$, визначеної на опуклій множині X , збігається з її глобальним мінімумом на цій множині.

У теорії опуклого програмування як основна зазвичай розглядається задача мінімізації опуклої функції n змінних $Z = f(x)$ за обмежень $\varphi_i(x) \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$), $x \geq 0$, де функції $\varphi_i(x)$ передбачаються опуклими. Якщо $f(x)$ і $\varphi_i(x)$ є увігнутими функціями, то маємо задачу максимізації $f(x)$ за обмежень $\varphi_i(x) \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), $x \geq 0$.

12.2. Графічний метод

В задачах лінійного програмування точки екстремума є вершинами многокутників розв'язків, а в задачах нелінійного програмування вони можуть лежати в середині області, на ребрі, грані або у вершині многокутника.

Задачі нелінійного програмування з двома змінними, в яких їх цільові функції і системи обмежень можуть бути задані в лінійному і нелінійному вигляді, можуть бути розв'язані графічно.

Задача з лінійною цільовою функцією та нелінійною системою обмежень

Приклад. Знайти глобальні екстремуми функції $F = 2x_1 + x_2$ за обмежень:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Область допустимих розв'язків – частина кола з радіусом 4, яка розташована в першій чверті. Лініями рівня цільової функції є паралельні прямі з кутовим коефіцієнтом, рівним -2 .

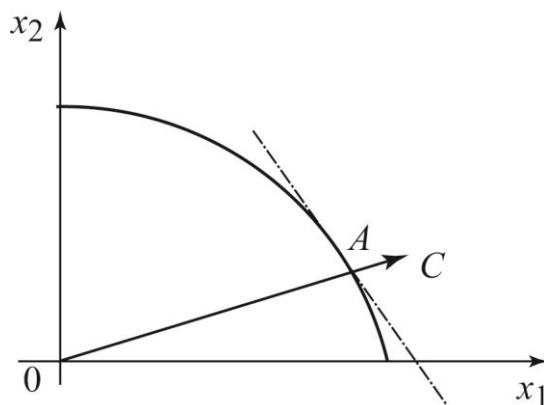


Рис. 12.1.

Необхідно розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 8\sqrt{5}/5, x_2 = 4\sqrt{5}/5, F = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}.$$

Глобальний мінімум, рівний нулю, досягається в точці $O(0, 0)$ (рис. 12.1), глобальний максимум, рівний $4\sqrt{5}$ – в точці $A(8\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5)$.

Задача з нелінійною цільовою функцією та лінійною системою обмежень

Приклад. Знайти глобальні екстремуми функції $F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ за обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Область допустимих розв'язків – $OABD$ (рис. 12.2). Лініями рівня будуть кола з центром у точці O_1 . Максимальне значення цільової функції в точці $D(9, 0)$, мінімальне – в точці $O_1(2, 3)$. Тому $F(D) = (9 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 58$.

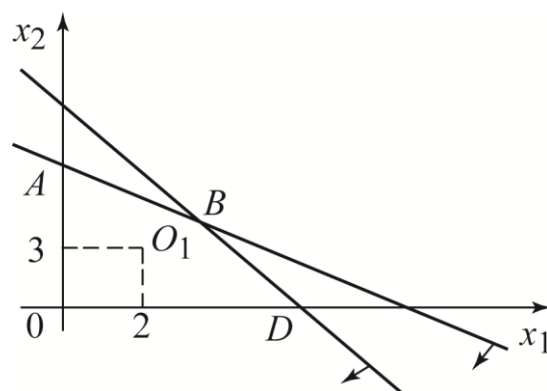


Рис. 12.2.

Отже, глобальний максимум дорівнює 58 і досягається в точці $D(9, 0)$, глобальний мінімум дорівнює нулю і досягається в точці $O_1(2, 3)$.

12.3. Метод множників Лагранжа

Вважається, що метод множників Лагранжа є класичним методом розв'язування задач математичного програмування, але в практичному застосуванні його можуть виникнути значні обчислювальні труднощі.

Нехай дана задача нелінійного програмування $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$ за обмежень: $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m}$.

Припустимо, що функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервні разом зі своїми першими частинними похідними. Обмеження задані у вигляді рівнянь, тому для розв'язання задачі використовується метод відшукування умовного екстремуму функції кількох змінних.

Для розв'язання задачі складають функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де λ_i – множники Лагранжа.

Потім визначаються часткові похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні, одержимо систему:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Розв'язуючи систему, виходить безліч точок, в яких цільова функція L може мати екстремальні значення. Слід зазначити, що умови розглянутої системи є необхідними, але недостатніми. Тому не будь-який отриманий розв'язок визначає точку екстремуму цільової функції. Застосування методу буває виправданим, коли заздалегідь передбачається існування глобального екстремуму, що збігається з єдиним локальним максимумом або мінімумом цільової функції.

Отже, логіка розв'язування задач методом множників Лагранжа така.

1. Скласти функцію Лагранжа.
2. Знайти частинні похідні функції Лагранжа за всіма змінними $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ та прирівняти до нуля. Отримаємо систему з $n + m$ рівнянь. Розв'язати отриману систему та знайти всі стаціонарні точки функції Лагранжа.
3. Зі стаціонарних точок, що взяті без $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, вибрати точки, в яких функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має умовні локальні екстремуми за наявності обмежень $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m}$. Цей вибір здійснюється з використанням достатніх умов локального екстремума.

Якщо функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ інтерпретується як дохід або вартість, а вільні члени в обмеженнях – як обсяги деяких ресурсів, то множники Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ показують, як зміниться максимальний дохід або мінімальна вартість, коли обсяг ресурсу i -го виду збільшиться на одиницю.

Приклад. Борошномельний комбінат реалізує борошно двома способами: в роздріб через магазин і оптом через торгових агентів. При продажу x_1 кг борошна через магазин витрати на реалізацію складають x_1^2 грош. од., а при продажу x_2 кг борошна за допомогою торгових агентів – x_2^2 грош. од. Визначити, скільки кілограмів борошна слід продавати кожним способом, щоб

витрати на реалізацію були мінімальними, якщо за добу виділяється для продажу 5 000 кг борошна.

Необхідно скласти математичну модель задачі.

Слід знайти мінімум сумарних витрат $L = x_1^2 + x_2^2$ за обмежень $x_1 + x_2 = 5\,000$, $x_{1,2} \geq 0$. Для розрахунку моделі використовувати метод множників Лагранжа. Потрібно скласти функцію Лагранжа $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5\,000)$.

Варто знайти частинні похідні функції F по x_1, x_2, λ , прирівняти їх до нуля, вийде система рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 5\,000 = 0, \end{cases}$$

Звідки $\lambda = -5\,000$, $x_1 = 2\,500$, $x_2 = 2\,500$, $L = 12\,500\,000$ грош. од. Надаючи x_1 значення більше і менше 2 500, знаходимо L і з визначення екстремуму функції отримуємо, що L при $x_1 = x_2 = 2\,500$ досягає мінімуму. Таким чином, для одержання мінімальних витрат необхідно витратити на добу через магазин і торгових агентів по 2 500 кг борошна, при цьому витрати на реалізацію складуть 12 500 000 грош. од.

12.4. Теорема Куна-Таккера

У теорії нелінійного програмування центральне місце займає теорема Куна-Таккера, що узагальнює класичний метод множників Лагранжа на випадок, коли в нелінійній задачі, крім обмежень-рівностей, містяться також і нерівності. Зокрема, для задачі опуклого програмування: мінімізувати $Z = f(x)$ за обмежень $\varphi_i(x) \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$), $x \geq 0$, де усі функції $f(x)$ і $\varphi_i(x)$ опуклі, теорема Куна-Таккера встановлює зв'язок між оптимальним розв'язком задачі і сідловою точкою функції Лагранжа для цієї задачі:

$$L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x).$$

Точка $(x^*, \bar{\lambda}^*)$ називається сідловою точкою функції $L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x)$, якщо n -вимірна точка x^* є точкою мінімуму функції $L(x, \bar{\lambda}^*)$, а m -вимірна $\bar{\lambda}^*$

– точкою максимуму функції $L(x^*, \bar{\lambda})$, так що для всіх x і $\bar{\lambda}$ виконується нерівність $L(x^*, \bar{\lambda}) \leq L(x^*, \bar{\lambda}^*) \leq L(x, \bar{\lambda}^*)$.

Теорема Куна-Таккера. Припустимо, що існує вектор $x \geq 0$, такий що $\varphi_i(x) < 0$ ($i = \overline{1, m}$). Тоді необхідною і достатньою умовою оптимальності вектора x^* , що належить допустимій області, є існування такого вектора $\bar{\lambda}^*$, що для всіх $x \geq 0$ і $\bar{\lambda} \geq 0$ має місце нерівність:

$$L(x^*, \bar{\lambda}) \leq L(x^*, \bar{\lambda}^*) \leq L(x, \bar{\lambda}^*).$$

Спочатку ця теорема доведена тільки для випадку диференційованих функцій $f(x)$ і $\varphi_i(x)$. Існують узагальнення на випадок опуклих функцій.

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi_i(x)$ є диференційованими, то нерівність $L(x^*, \bar{\lambda}) \leq L(x^*, \bar{\lambda}^*) \leq L(x, \bar{\lambda}^*)$, де $x^* \geq 0$, $\bar{\lambda}^* \geq 0$, еквівалентна наступним «локальним» умовам Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x} &\geq 0, \\ \frac{x^* \partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x} &= 0, \\ x^* &\geq 0, \\ \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial \bar{\lambda}} &\leq 0, \\ \frac{\bar{\lambda}^* \partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial \bar{\lambda}} &= 0 \\ \bar{\lambda}^* &\geq 0. \end{aligned}$$

При фіксованому $\bar{\lambda}^*$ функція Лагранжа $L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x)$ є опуклою по x , тому відповідно до $f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$ має місце нерівність

$$L(x, \bar{\lambda}^*) - L(x^*, \bar{\lambda}^*) \geq \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x} (x - x^*) \quad \text{та} \quad \text{враховуючи} \quad \frac{x^* \partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x} = 0,$$

отримаємо $L(x, \bar{\lambda}^*) \geq L(x^*, \bar{\lambda}^*) + x \cdot \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x}$. Оскільки $x \geq 0$, то опускаючи

невід'ємний другий доданок у правій частині, отримаємо нерівність $L(x, \bar{\lambda}^*) \geq L(x^*, \bar{\lambda}^*)$. Отже, доведено виконання однієї частини нерівності

$$L(x^*, \bar{\lambda}) \leq L(x^*, \bar{\lambda}^*) \leq L(x, \bar{\lambda}^*).$$

Аналогічно доводиться виконання для $\bar{\lambda} \geq 0$ другої частини вказаної нерівності.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає відмінність задач нелінійного програмування від лінійного?
2. Наведіть загальну постановку задачі опуклого програмування.
3. Як задача нелінійного програмування розв'язується графічно?
4. У чому полягає ідея методу множників Лагранжа?
5. У чому суть теореми Куна-Таккера?

13. Квадратичне програмування

13.1. Основні поняття квадратичного програмування.

13.2. Алгоритм розв'язання задачі квадратичного програмування.

13.1. Основні поняття квадратичного програмування

До задач квадратичного програмування відносять спеціальний клас задач нелінійного програмування, у яких цільова функція $f(x)$ – увігнута (опукла), а всі обмеження лінійні. Прикладом задачі квадратичного програмування є задача максимізації обсягу випуску продукції у випадку квадратичної виробничої функції.

Як основна задач в квадратичному програмуванні приймається задача:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j \rightarrow \max(\min), \quad (13.1)$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \\ (i = \overline{1, n}), \\ x_j \geq 0, \\ (j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (13.2)$$

Для розв'язання задачі необхідно привести визначення.

Квадратичною формою щодо змінних $x_1, \dots, x_n$ називається числова функція від цих змінних, що має вигляд:

$$F = d_{11}x_1x_1 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_1x_3 + \dots + d_{21}x_2x_1 + d_{22}x_2x_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j.$$

Матриця $D = (d_{ij})$ є від'ємно визначеною в задачі максимізації і додатньо визначеною – в задачі мінімізації. Це означає, що функція $f(x)$ є строго опуклою по змінним x у разі задачі мінімізації та строго увігнутою – в задачі максимізації. Обмеження в цій задачі передбачаються лінійними, що гарантує опуклість області допустимих розв'язків.

Квадратична форма F називається додатньо (від'ємно)-напіввизначеною, якщо $(F(X) \geq 0)$ $(F(X) \leq 0)$ для будь-якого набору значень змінних $X = (x_1, \dots, x_n)$ і існує такий набір змінних $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$, де не всі значення змінних одночасно дорівнюють нулю $F(X') = 0$.

Теорема 1. Квадратична форма є опуклою функцією, якщо вона додатньо-напіввизначена, а також увігнутою функцією, якщо вона від'ємно-напіввизначена.

У разі, якщо цільова функція не мінімізується, а максимізується або якщо в деяких обмеженнях є знак $\geq$, то такі задачі завжди можна привести до основної форми (13.1), (13.2). Відмінністю задачі квадратичного програмування від задачі лінійного програмування є те, що в останній оптимальний розв'язок знаходиться в вершині багатогранника, а в задачі (13.1), (13.2) оптимальний розв'язок може бути як на межі, так і всередині багатогранника розв'язків.

Для розв'язання задачі (13.1), (13.2) потрібно скласти локальні умови Куна-Таккера, які є необхідними і достатніми умовами оптимальності розв'язання:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x} &\geq 0, \\ x^* \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x} &= 0, \\ x^* &\geq 0, \\ \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial \bar{\lambda}} &\leq 0, \\ \bar{\lambda}^* \frac{\partial L(x^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial \bar{\lambda}} &= 0 \\ \bar{\lambda}^* &\geq 0.\end{aligned}$$

Функція Лагранжа в даному випадку має вигляд:

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right).$$

Необхідно знайти частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + 2 \sum_{i=1}^n d_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Позначимо

$$c_j + 2 \sum_{i=1}^n d_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = v_j,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = -y_i.$$

З урахуванням цих позначень локальні умови Куна-Таккера наберуть вигляд:

$$c_j + 2 \sum_{i=1}^n d_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = v_j \geq 0,$$

$$x_j v_j = 0, \quad x_j \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = -y_i \leq 0,$$

$$\lambda_i (-y_i) = 0, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Об'єднуючи ці співвідношення, отримуємо:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad (13.3)$$

$$2 \sum_{i=1}^n d_{ij} x_i - v_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = -c_j, \quad (13.4)$$

$$x_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{i=1}^m y_i \lambda_i = 0 \quad (13.5)$$

Отримуємо систему $n + m$ лінійних рівнянь з $2(n + m)$ невідомими $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, y_1, \dots, y_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Оскільки функція $f(x)$ строго увігнута, а область допустимих розв'язків становить опуклу множину, допустимий розв'язок, який задовольняє всі ці умови, має бути єдиним і оптимальним.

Отже, в квадратичному програмуванні за допомогою теореми Куна-Таккера нелінійну задачу можна зводити до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь при дотриманні додаткової умови $\sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{i=1}^m y_i \lambda_i = 0$, згідно з якою: з кожних двох обмежених за знаком змінних x_j і v_j (відповідно y_i і λ_i) хоча б одна дорівнювала нулю. Іншими словами, не всі розв'язки $X = (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, y_1, \dots, y_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ системи (13.3), (13.4) задовольняють умову (13.5), а тільки ті, в яких принаймні $n + m$ компонент дорівнюють нулю, тобто стільки, скільки рівнянь в системі і шукати розв'язок слід з базисних розв'язків. Оскільки для знаходження допустимого базисного розв'язку можна застосувати симплекс-метод, то його можна застосовувати також для розв'язування задачі квадратичного програмування.

Використавши метод штучного базису, сформулюємо задачу:

$$Z = M \sum_{j=1}^n \psi_j + M \sum_{i=1}^m \varphi_i \rightarrow \min,$$

$$2Dx + \lambda A - v + \psi = -c,$$

$$Ax + y + \varphi = b,$$

$$x \geq 0, \lambda \geq 0, v \geq 0, y \geq 0, \psi \geq 0, \varphi \geq 0.$$

Якщо в результаті її розв'язування вдалось вивести з базису всі штучні змінні й виконати умови доповняльної нежорсткості, то знайдений базисний розв'язок буде розв'язком задачі квадратичного програмування.

Розв'язання завершується прирівнянням до нуля всіх штучних змінних тільки в тому випадку, коли вихідна задача має непорожню множину допустимих розв'язків.

Крім загальних методів опуклого програмування, спеціально для задачі лінійного квадратичного програмування розроблено велику кількість різних чисельних методів, у тому числі і кінцевих. Найбільш поширеними кінцевими методами є симплексний метод Біла, метод сполучених градієнтів, симплексний метод Вульфа. Проте ефективність того чи іншого методу досить істотно залежить від специфіки розв'язуваної задачі і наявних у розпорядженні обчислювальних засобів.

Розглянемо метод Франка-Вульфа. Переформулюємо задачу: серед довільних базисних розв'язків системи умов (13.3) і (13.4) знайти такий, що перетворює в нуль $v'x + y'\lambda$. Розглянемо вектори:

$$Y = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, v_1, \dots, v_n, y_1, \dots, y_m),$$

$$\bar{Y} = (v_1, \dots, v_n, y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Тоді:

$$v'x + y'\lambda = \frac{1}{2} Y' \bar{Y} \rightarrow \min ,$$

$$BY = d ,$$

$$Y \geq 0 ,$$

$$\text{де } B = \begin{vmatrix} D & A' - E & 0 \\ A & 0 & 0 & E \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} -c \\ b \end{vmatrix}.$$

Виконавши ряд ітерацій так, що опукла функція $T(Y) = Y' \bar{Y}$ мінімізувалась за таким рекурентним правилом: в результаті k -го кроку маємо довільний розв'язок Y_k , що відповідає системі обмежень задачі, а також довільний розв'язок y_k , який задовольняє тим самим обмеженням, але не обов'язково є базисним. Йому відповідає додатне значення $T(Y)$ (на першому кроці $y_0 = Y_0$).

Починаючи з базисного розв'язку Y_k , мінімізуємо лінійну відносно Y форму $Y' \bar{y}_k$. Маємо послідовність базисних розв'язків:

$$Y^0 = Y_k, Y_1, Y_2, \dots,$$

причому $(Y_0)' \bar{y}_k > (Y_1)' \bar{y}_k, \dots$. Обчислювання закінчується, якщо $(Y_h)' \bar{y}_h = 0$;

$2(Y_h)' \bar{y}_k \leq (y_k)' \bar{y}_k$. Якщо $(Y_h)' \bar{y}_h = 0$, то Y_h є розв'язком задачі квадратичного програмування, у випадку $2(Y_h)' \bar{y}_k \leq (y_k)' \bar{y}_k$ знаходимо $Y_{k+1} = Y_k$,

$$y_{k+1} = y_k + \mu(Y_{k+1} - y_k), \text{ де } \mu = \min \left\{ 1, \frac{(y_k - Y_{k+1})' \bar{y}_k}{(Y_{k+1} - y_k)' (Y_{k+1} - \bar{y}_k)} \right\}.$$

На кожному кроці маємо або $(Y_h)' \bar{y}_h = 0$, або $2(Y_h)' \bar{y}_k \leq (y_k)' \bar{y}_k$, але через певну кількість кроків тільки $(Y_h)' \bar{y}_h = 0$.

Існують й інші методи розв'язування задачі (13.1) – (13.2), але вони також мають недоліки.

13.2. Алгоритм розв'язання задачі квадратичного програмування

Алгоритм розв'язання задачі квадратичного програмування складається з таких етапів:

- 1) складають функцію Лагранжа;
- 2) записують у вигляді виразів (13.3) – (13.5) необхідні і достатні умови існування сідлової точки для функції Лагранжа;
- 3) використовуючи метод штучного базису, або встановлюють відсутність сідлової точки для функції Лагранжа, або знаходять її координати;
- 4) записують оптимальний розв'язок вихідної задачі і знаходять значення цільової функції.

Приклад. Знайти максимальне значення функції $f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ за умов:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Функція f є увігнутою, оскільки становить суму лінійної функції $f_1 = 2x_1 + 4x_2$, яку можна розглядати як увігнуту, і квадратичної форми

$f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$, яка є від'ємно-визначеною і, отже, також увігнутою. Система обмежень задачі включає тільки лінійні нерівності. Отже, можна скористатися теоремою Куна-Таккера.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2).$$

Запишемо необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \geq 0,$$

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0,$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Таким чином, маємо систему нерівностей:

$$2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$

$$4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 4,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 12.$$

Необхідно перетворити систему нерівностей в рівності, ввівши балансові змінні:

$$2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2,$$

$$4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 = 4, \quad (13.6)$$

$$x_1 + 2x_2 + w_1 = 8,$$

$$2x_1 - x_2 + w_2 = 12.$$

Враховуючи рівності (13.5), варто записати:

$$v_1 x_1 = 0, v_2 x_2 = 0, w_1 \lambda_1 = 0, w_2 \lambda_2 = 0.$$

Для знаходження базисного розв'язку системи лінійних рівнянь (13.6) слід застосувати метод штучного базису. У перше і в друге рівняння системи (13.6) додамо штучні невід'ємні змінні z_1, z_2 . Отримаємо розширену задачу:

$$F = -M z_1 - M z_2$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12, \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу симплекс-методом.

				0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M
N	Базис	C_b	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_2}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{w_2}	A_{z_1}	A_{z_2}
1	A_{z_1}	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	A_{z_2}	-M	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	A_{w_1}	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	A_{w_2}	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
		Δ_1	-6M	-2M	-4M	-3M	-M	M	M	0	0	0	0
5	A_{z_1}	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
6	A_{x_2}	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
7	A_{w_1}	0	6	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
8	A_{w_2}	0	13	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$
		Δ_2	-2M	-2M	0	-M	-2M	M	0	0	0	0	M

9	A_{x_1}	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
10	A_{x_2}	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
11	A_{w_1}	0	5	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
12	A_{w_2}	0	11	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	1	-1	$\frac{1}{4}$
	Δ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<i>M</i>	<i>M</i>

Допустимий базисний розв'язок:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, v_1 = 0, v_2 = 0, w_1 = 5, w_2 = 11, z_1 = 0, z_2 = 0.$$

Оскільки виконуються умови $v_1 x_1 = 0, v_2 x_2 = 0, w_1 \lambda_1 = 0, w_2 \lambda_2 = 0$, то

$X^* = (1, 1)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для вихідної задачі. Отже,

$X^* = (1, 1)$ – оптимальний план вихідної задачі, $f(X^*) = 3$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть математичну модель основної задачі в квадратичному програмуванні.
2. У чому відмінність задачі квадратичного програмування від задачі лінійного програмування?
3. У яких цілях в квадратичному програмуванні використовується теорема Куна-Таккера?
4. Назвіть етапи алгоритму розв'язання задачі квадратичного програмування.

14. Теорія ігор. Основні методи їх розв'язання та аналізу

14.1. Основні поняття теорії ігор.

14.2. Розв'язання матричної гри в чистих стратегіях.

14.3. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях.

14.4. Розв'язання матричної гри графічним методом.

14.5. Розв'язання матричної гри зведенням до задачі лінійного програмування

14.1. Основні поняття теорії ігор

У практичній діяльності часто необхідно узгодити дії фірм, підприємств, об'єднань, міністерств та інших учасників проектів у випадках, коли їх інтереси не збігаються. У цих ситуаціях теорія ігор дозволяє знайти кращий розв'язок у

поведінці всіх учасників, зобов'язаних погоджувати дії у разі зіткнення інтересів. Теорія ігор широко проникла в практику економічних рішень і досліджень. Так, можна визначити науково обгрунтовані рівні зниження роздрібних цін і оптимальний рівень товарних запасів, розв'язати задачу планування порядку організації джерел корисних ресурсів у країні і т. д.

Теорію ігор визначають як розділ математики, що вивчає конфліктні ситуації. Це означає, що можна сформулювати оптимальні правила поведінки кожної сторони, яка бере участь у вирішенні конфліктної ситуації. В економіці виявилось недостатньо апарату математичного аналізу, пов'язаного з визначенням екстремумів функції. Теорію ігор слід розглядати як окремий розділ оптимізаційного підходу, що дозволяє розв'язувати нові задачі у прийнятті рішення.

Гра – це спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації, відмінна від реального конфлікту тим, що ведеться за певними правилами. Іншими словами, гра – це сукупність правил, що визначають можливі дії (чисті стратегії) учасників гри.

Суть гри полягає в тому, що кожен з учасників приймає рішення в конфліктній ситуації, що розвивається, які як він розуміє, можуть забезпечити йому найкращий результат. Результат гри – це значення деякої функції, так званої функції виграшу (платіжної функції). Ця функція задається або таблицею, або аналітичним виразом. Якщо сума виграшів гравців дорівнює нулю, то гру називають грою з нульовою сумою. Якщо в грі беруть участь два гравці, то її називають парною.

Величина виграшу залежить від стратегії, яку використовує гравець. Стратегія – це сукупність правил, що однозначно визначає послідовність дій гравця в кожній конкретній ситуації, що реалізується в процесі гри. Оптимальною називається стратегія, яка під час багаторазового повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш. Будь-яка гра складається з партій. Партією називають кожен варіант гри певним чином. У свою чергу, в партії гравці здійснюють конкретні ходи. Хід – це вибір і реалізація гравцем одного з допустимих варіантів поведінки.

Залежно від кількості стратегій ігри поділяються на скінченні і нескінченні. Залежно від взаємовідносин учасників розрізняють ігри безкоаліційні (учасники не мають права укладати угоди) або некооперативні, і

коаліційні або кооперативні. За характером виграшів ігри поділяють на ігри з нульовою сумою і ігри з ненульовою сумою. У перших – загальний капітал гравців не міняється, а лише перерозподіляється в ході гри, у зв'язку з чим сума виграшів дорівнює нулю (програш приймається як від'ємний виграш). У грі з нульовою сумою сума виграшів відмінна від нуля.

За видом функцій виграшів ігри поділяються на матричні, біматричні, неперервні, опуклі, сепарабельні. У матричній грі (за участю двох учасників) виграші першого учасника задаються матрицею, в біматричних – виграші кожного гравця задаються своєю матрицею. Інші типи такої гри розрізняються виглядом аналітичного виразу платіжної функції. За кількістю ходів ігри діляться на одноходові (виграші розподіляються після одного ходу кожного гравця) і багатходові (виграш розподіляється після декількох ходів). Багатходові ігри у свою чергу діляться на позиційні, стохастичні, диференціальні та ін. Залежно від обсягу наявної інформації розрізняють гру з повною і неповною інформацією. Надалі автор буде розглядати тільки парну матричну гру з нульовою сумою.

Гра, в якій учасники прагнуть досягти для себе найкращого результату, свідомо вибираючи допустимими правилами гри способи дій, називають стратегічною. Однак в економіці часто доводиться моделювати (формалізувати) ситуації, в якій один з учасників байдужий до результату гри. Така гра називається грою з природою, розуміючи під природою всю сукупність зовнішніх обставин, в яких свідомому гравцеві доводиться приймати рішення. Наприклад, визначення обсягу виробництва випуску сезонної продукції в надії найбільш вигідного дня її реалізації для рівня попиту; формування пакета цінних паперів у розрахунку на високі дивіденди і т. д. Тут в ролі гравця виступає в першому випадку рівень попиту, в другому – розмір очікуваного прибутку. У грі з природою міра невизначеності свідомого гравця зростає.

Розглянемо гру, в якій у кожного з двох гравців A і B є кінцеве число можливих дій, тобто чистих стратегій. Припустимо, що гравець A має у своєму розпорядженні m чистих стратегій, які позначимо $A_1, \dots, A_m$, а гравець B має n чистих стратегій $B_1, \dots, B_n$. Для того, щоб гра була повністю визначена, необхідно вказати правило, за яким кожній парі чистих стратегій $(A_i; B_j)$ ставиться у відповідність число a_{ij} – виграш гравця A за рахунок гравця B або

програш гравця B . Розглядається гра з нульовою сумою. При $a_{ij} < 0$ гравець A виплачує гравцю B суму $|a_{ij}|$. Якщо гра складається тільки з точних ходів, то вибір пари чистих стратегій $(A_i; B_j)$ єдиним способом визначає результат гри. Якщо ж протягом гри використовуються випадкові ходи, то результат гри визначається середнім значенням виграшу (його математичним очікуванням).

Нехай відомі значення a_{ij} для кожної пари $(A_i; B_j)$ чистих стратегій, отже, можна скласти матрицю гри, тобто платіжну матрицю, яка є табличним записом функції виграшу (табл. 14.1).

Таблиця 14.1

A_i	B_j				α_i
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

У теорії матричних ігор завжди передбачається, що в платіжній матриці записані виграші гравця A . Вони можуть виражатися і від'ємними числами, що фактично означає виграш гравця B . Описані ігри називають матричними, або прямокутними. Окрема партія в цих іграх реалізовується таким чином. Гравець A вибирає один із рядків платіжної матриці (одну зі своїх чистих стратегій). Не знаючи результату його вибору, гравець B вибирає один із стовпців (свою чисту стратегію). Елемент матриці, що стоїть на перетині вибраних рядка і стовпця, визначає виграш гравця A (програш гравця B).

14.2. Розв'язання матричної гри в чистих стратегіях

Метою учасників всякої матричної гри є вибір найбільш вигідних стратегій, що забезпечують гравцеві A максимальний виграш, а гравцеві B – мінімальний програш. Стратегію гравця A називають оптимальною, якщо у процесі її застосування виграш гравця A не меншас, якими б стратегіями не користувався б гравець B . Оптимальною для гравця B називають стратегію, у

процесі використання якої програш цього гравця не збільшується, які б стратегії не використав гравець A .

Під час пошуку оптимальних стратегій гравці спираються на основоположний принцип теорії ігор – принцип обережності, згідно з яким кожен гравець, вважаючи противника по грі дуже розумним, обирає свої дії в припущенні, що противник ні в якому разі не пропустить жодної можливості використовувати будь-яку його помилку, будь-який прорахунок у своїх інтересах. Тому гравці повинні бути дуже уважні під час вибору кожної своєї чистої стратегії.

Нехай гравцеві A слід зробити свій вибір. Аналізуючи платіжну матрицю (табл. 14.1), він для кожної чистої стратегії A_i ($i = \overline{1, m}$) знайде мінімальне значення α_i можливого виграшу: $\alpha_i = \min_j \{a_{ij}\}$ ($i = \overline{1, m}$), а потім з усіх α_i обере найбільше $\alpha = \max_i \{\alpha_i\}$, і прийме відповідну йому чисту стратегію A_i^0 . Це і буде переважаюча (яка гарантує) у даних умовах стратегія гравця A . Її називають максимінною, оскільки вона відповідає величині:

$$\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\}. \quad (14.1)$$

Число α називається нижньою чистою ціною гри (максимінною). Воно показує, який мінімальний виграш може отримати гравець A при будь-яких діях гравця B , якщо правильно використовує свої чисті стратегії. У свою чергу гравець B , прагнучи мінімізувати програш, при виборі переважаючої стратегії використовує принцип обережності таким чином: спочатку для кожної чистої стратегії B_j ($j = \overline{1, n}$) він визначає максимально можливий програш $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$, де $j = \overline{1, n}$ (табл. 14.1), а потім серед β_j обере мінімальне значення $\beta = \min_j \{\beta_j\}$, якому і буде відповідати бажана чиста стратегія B_j^0 . Її називають мінімаксною, оскільки вона відповідає величині:

$$\beta = \min_j \max_i \{a_{ij}\}. \quad (14.2)$$

Число β називається верхньою чистою ціною гри (мінімаксною). Воно показує, який максимальний програш може бути у B гравця під час правильного вибору ним своїх чистих стратегій не залежно від дій гравця A .

Отже, правильно використовуючи чисті стратегії, гравець A забезпечує собі виграш не менше α , а гравець B , правильно використовуючи свої чисті стратегії, не дозволить гравцеві A виграти більше, ніж β .

Теорема. У матричній грі нижня чиста ціна гри не перевищує верхньої чистої ціни гри, тобто $\alpha \leq \beta$.

Теорема без доведення.

Якщо в матричній грі нижня і верхня чисті ціни збігаються, тобто $\alpha = \beta$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $v = \alpha = \beta$.

Позначимо через i_* та j_* номери чистих стратегій, при яких має місце рівність $\alpha = \beta$. Пара чистих стратегій $(A_{i_*}; B_{j_*})$ гравців A і B , при яких досягається ця рівність, називається сідловою точкою матричної гри, а елемент $a_{i_*j_*}$ матриці, який стоїть на перетині i_* -го рядка і j_* -го стовпця, є сідловим елементом платіжної матриці:

$$\max_i \min_j \{a_{ij}\} = \min_j \max_i \{a_{ij}\} = a_{i_*j_*}.$$

Сідловій точці відповідають оптимальні стратегії гравців. Їх сукупність – це розв'язок гри, який має наступну властивість: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад. Є три можливих стратегії виробництва продукції:

$S_1 = 986\,200,50$ тис. грн., $S_2 = 1\,488\,973$ тис. грн., $S_3 = 1\,967\,962,1$ тис. грн.

Залежно від змін ринкової кон'юнктури у зв'язку з наявними можливостями реалізації розраховані варіанти середньорічного прибутку (табл. 14.2).

Таблиця 14.2

Матриця платоспроможного попиту

Обсяг виробництва (оптові закупівлі)	Розмір прибутку (a_{ij}) залежно від можливих коливань попиту				$\alpha_i = \min \{a_{ij}\}$
	489 876,17	986 200,50	1 488 973	1 967 962,1	
$S_1=986\,200,50$	49 310,03	197 240,1	197 240,1	197 240,1	49 310,03
$S_2=1\,488\,973$	-60	148 897,3	297 794,6	297 794,6	-60
$S_3=1\,967\,962,1$	-1 140	98 398,11	196 796,24	393 592,42	-1 140

$\beta_j = \max \{a_{ij}\}$	49 310,03	197 240,1	297 794,6	393 592,42	
-----------------------------	-----------	-----------	-----------	------------	--

Аналіз гри почнемо з позиції максимуму:

$$\alpha_1 = \min_j \{a_{1j}\} = \min \{49\,310,01; 197\,240,10; 197\,240,10\} = 49\,310,33 \text{ тис.грн.}$$

$$\max_i \{\alpha_i\} = \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \{49\,310,01; -60; -1\,140\} = 49\,310,33 \text{ тис.грн.}$$

Стратегія S_1 називається максимінною – це і є нижня ціна гри.

Аналогічно необхідно міркувати з боку «природи»:

$$\beta_1 = \max_i \{49\,310,03; -60; -1\,140\} = 49\,310,03 \text{ тис.грн.}$$

$$\beta = \min_j \{\beta_j\} = \min \{49\,310,03; 197\,240,1; 297\,794,6; 393\,592,42\} = 49\,310,03 \text{ тис.грн.}$$

Ця величина називається верхньою ціною гри. Сідлова точка дорівнює $v = \alpha_1 = \beta_1 = 49\,310,03$ (табл. 14.2). Таким чином, необхідно вибрати першу стратегію з обсягами виробництва 986 200,50 тис. грн.

14.3. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Якщо гра не має сідлової точки, то її розв'язання ускладнюється. Гравцям потрібно так вибирати свої чисті стратегії в черговій партії, щоб партнер не здогадався про них. Це можливо тільки тоді, коли сам не знаєш, яку стратегію використовуватимеш при черговому ході. Тут на допомогу приходить механізм випадкового вибору чистих стратегій. Аналіз гри без сідлової точки показує, що гравець A може виграти більше за максимум α , який він отримав би при максимінній стратегії, якщо в ході гри використовуватиме не одну, а кілька чистих стратегій, випадковим чином змішуючи їх, тобто застосовуючи змішану стратегію. Гравець B теж може програти менше за мінімакс β , який він сплачує гравцеві A при мінімаксній стратегії, якщо використає свою змішану стратегію.

Звернемося до загального випадку матричної гри (табл. 14.3). Позначимо через $p_1, \dots, p_m$ ймовірності, з якими гравець A використовує у ході гри свої чисті стратегії $A_1, \dots, A_m$. Оскільки в табл. 14.3 наведено повний набір чистих стратегій гравця A , то для ймовірностей p_i виконуються умови:

$$p_i \geq 0, (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1. \quad (14.3)$$

Упорядкована множина $\vec{p} = (p_1; \dots; p_m)$, елементи якої задовольняють умовам (14.3), повністю визначає характер гри гравця A і називається його змішаною стратегією. Таким чином, змішаною стратегією гравця A є повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій.

Таблиця 14.3

Матриця статистичної парної гри

A_i	B_j				p_i
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	p_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	p_m
q_j	q_1	q_2	$\dots$	q_n	

Випадковість вибору чистих стратегій, якою користується гравець A , забезпечує йому нескінченну множину змішаних стратегій. Будь-яка його чиста стратегія A_i може розглядатися як окремий випадок змішаної стратегії, i -ий компонент якої є 1, а всі інші – 0, тобто $\vec{p} = (0; \dots; 1; \dots; 0)$.

Аналогічно впорядкована множина $\vec{q} = (q_1; \dots; q_n)$, елементи якої задовольняють співвідношенням:

$$q_j \geq 0, (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1,$$

є змішаною стратегією гравця B . Як і гравець A , гравець B має у своєму розпорядженні нескінченну множину змішаних стратегій.

Нехай гравці A і B застосовують змішані стратегії $\vec{p}$ і $\vec{q}$. Це означає, що гравець A використовує стратегію A_i з ймовірністю p_i , а гравець B – стратегію B_j з ймовірністю q_j . Оскільки вони обирають свої чисті стратегії випадково і незалежно один від одного, то ймовірність вибору пари $(A_i; B_j)$ дорівнює добутку ймовірностей p_i і q_j , тобто $p_i \cdot q_j$. У процесі використання змішаних стратегій гра набуває випадкового характеру, випадковою стає і

величина виграшу гравця A (програшу гравця B). У зв'язку з цим можна вести мову лише про середню величину (математичне сподівання) виграшу (програшу). Зрозуміло, що ця величина є функцією від змішаних стратегій $\bar{p}$ і $\bar{q}$. Вона визначається за формулою:

$$f(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j. \quad (14.4)$$

Функція $f(\bar{p}, \bar{q})$ називається **платіжною функцією** гри за матрицею, що задана табл. 14.3.

Аналогічно з раніше введеними поняттями нижньої чистої ціни і верхньої чистої ціни вводяться поняття нижньої і верхньої ціни стосовно змішаних стратегій, зберігаючи для них ті ж позначення α і β . Замість виграшу a_{ij} тепер мають на увазі середній виграш $f(\bar{p}, \bar{q})$, а замість чистих стратегій гравців з номерами i та j – їх змішані стратегії $\bar{p}$ та $\bar{q}$:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} f(\bar{p}, \bar{q}); \quad \beta = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} f(\bar{p}, \bar{q}).$$

Як і в грі, що має сідлову точку в чистих стратегіях, **оптимальними змішаними стратегіями** називають такі стратегії $\bar{p}^*$ і $\bar{q}^*$ гравців A і B , за яких має місце рівність:

$$\max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} f(\bar{p}^*, \bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} f(\bar{p}, \bar{q}^*) = f(\bar{p}^*, \bar{q}^*). \quad (14.5)$$

Величина $f(\bar{p}^*, \bar{q}^*)$, що відповідає оптимальним стратегіям $\bar{p}^*$ і $\bar{q}^*$ і отримана за формулою (14.5), називається ціною гри:

$$v = f(\bar{p}^*, \bar{q}^*).$$

Існує еквівалентне даному означення оптимальних змішаних стратегій. Стратегії $\bar{p}^*$ і $\bar{q}^*$ називають оптимальними змішаними стратегіями відповідно гравців A і B , якщо ці стратегії утворюють сідлову точку для платіжної функції $f(\bar{p}, \bar{q})$, тобто задовольняють нерівність:

$$f(\bar{p}, \bar{q}^*) \leq f(\bar{p}^*, \bar{q}^*) \leq f(\bar{p}^*, \bar{q}). \quad (14.6)$$

Якщо використати змішані стратегії, то для будь-якої матричної гри можна знайти оптимальні стратегії і ціну гри. В цьому полягає значення основної теореми в теорії ігор — теореми Неймана.

Теорема. В змішаних стратегіях будь-яка скінчена матрична гра має сідлову точку. Теорема без доведення.

Критеріями розв'язання матричної гри є наступна теорема.

Теорема. Для того, щоб змішані стратегії $\bar{p}^* = (p_1^*; \dots; p_m^*)$ та $\bar{q}^* = (q_1^*; \dots; q_n^*)$ були оптимальними для гравців A і B у грі за матрицею $[a_{ij}]_{m \times n}$ з ціною v , необхідно і достатньо виконання нерівностей:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* \geq v, \quad i = \overline{1, m}, \quad (14.7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq v, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14.8)$$

Доведення. Нехай $\bar{p}^*$ і $\bar{q}^*$ — оптимальні змішані стратегії. Доведемо, що тоді виконуються нерівності (14.7) і (14.8). Нерівність (14.7) виходить із справедливого для оптимальних стратегій співвідношення (14.6), яке записане в розгорненій формі:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j^* \leq v \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j, \quad (14.9)$$

де в праву частину (14.9) замість довільного вектора $\bar{q} = (q_1; \dots; q_n)$ підстановлено одиничний вектор $(0; \dots; 1; \dots; 0)$, у якому i -ий компонент дорівнює 1, а всі інші — 0. Тим самим доведена умова необхідності. Доведемо тепер достатність. Нехай нерівності (14.7) і (14.8) виконуються. Покажемо, що тоді $\bar{p}^*$ і $\bar{q}^*$ є оптимальними змішаними стратегіями, тобто має місце співвідношення (14.9). Покажемо спочатку, що з (14.7) витікає права частина нерівності (14.9). Нехай $\bar{q} = (q_1; \dots; q_n)$ — довільний вектор. Перетворимо суму в правій частині з урахуванням (14.7):

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^n q_j v = v \cdot \sum_{j=1}^n q_j = v \cdot 1 = v.$$

Отже,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* q_j \geq v,$$

а це і є права частина (14.9). Аналогічно можна довести, що з (14.8) витікає ліва частина нерівності (14.9). Тобто доведено, що виконання нерівностей (14.7) і (14.8) обумовлює виконання (14.9), а це і свідчить про оптимальність змішаних стратегій $\bar{p}^*$ і $\bar{q}^*$. ■

З теореми маємо такий наслідок: щоб розв'язати матричну гру, необхідно знайти невід'ємні розв'язки $(p_1; \dots; p_m; q_1; \dots; q_n; v)$ системи $n + m$ лінійних нерівностей (14.7) і (14.8) і лінійних рівнянь (14.9).

Чисті стратегії гравця, що входять до його оптимальної змішаної стратегії з ймовірностями, відмінними від нуля, називаються **активними стратегіями** гравця. Число активних стратегій не перевищує $\min \{m; n\}$.

Теорема. Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри незалежно від того, яку стратегію застосовує другий гравець, якщо тільки той не вийде за межі своїх активних стратегій. Теорема без доведення.

Розв'язання гри можна істотно спростити, якщо своєчасно виявити домінування одних стратегій, які присутні в платіжній матриці, над іншими, оскільки це дозволить скоротити вимірність матриці. Якщо в платіжній матриці всі елементи k -ого рядка не менші за відповідні елементи s -ого рядка, тобто $a_{kj} \geq a_{sj}$ ($j = \overline{1, n}$), то виграш гравця A за стратегією A_k не буде меншим, ніж за стратегією A_s , якою б стратегією не користувався гравець B . Отже, стратегія A_k домінує над стратегією A_s , відповідно стратегію A_k називають **домінуючою**, а стратегію A_s — **домінуємою**.

Аналогічно, якщо всі елементи l -ого стовпця не перевершують відповідних елементів r -ого стовпця, тобто $a_{il} \geq a_{ir}$ ($i = \overline{1, m}$), то гравцеві B за будь-яких умов не вигідно застосовувати стратегію B_r , оскільки в цьому випадку він програватиме більше (не менше), ніж під час використання

стратегії B_l . Тому кажуть, що стратегія B_l домінує над стратегією B_r , і називають їх відповідно домінуючою і домінуємою. Окремим випадком домінування є дублювання стратегій, коли $a_{kj} = a_{sj}$ ($j = \overline{1, n}$), або $a_{il} = a_{ir}$ ($i = \overline{1, m}$).

Спрощення платіжних матриць шляхом виключення явно не вигідних гравцям чистих стратегій можливо завдяки наступній теоремі.

Теорема. Нехай I – гра, в матриці якої k -а стратегія гравця A домінує над s -ою, а I' – гра, матриця якої отримана з матриці гри I шляхом виключення s -го рядка. Тоді: а) ціна гри I' дорівнює ціні гри I ; б) для гравця B оптимальна змішана стратегія $\bar{q}^* = (q_1^*; \dots; q_n^*)$ в грі I' є також його оптимальною змішаною стратегією в грі I ; в) якщо вектор $\bar{p}'^* = (p_1^*; \dots; p_{s-1}^*; p_{s+1}^*; \dots; p_m^*)$ є оптимальною змішаною стратегією гравця A в грі I' , то в грі I для нього оптимальною є змішана стратегія $\bar{p}^* = (p_1^*; \dots; p_{s-1}^*; 0; p_{s+1}^*; \dots; p_m^*)$. Теорема без доведення.

Отже, якщо стратегія A_k домінує над стратегією A_s , то ймовірність застосування останньої в оптимальній змішаній стратегії $\bar{p}^*$ гравця A дорівнює нулю, тому s -й рядок з платіжної матриці можна виключити.

Аналогічна теорема існує у випадку домінування стратегій гравця B .

Приклад. Виконати можливі спрощення платіжної матриці:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відповідні елементи першого і третього рядка є рівними, тому один з них (наприклад третій) можна виключити. Елементи другого рядка не перевищують відповідних елементів першого, тому другий рядок теж виключаємо і приходимо до матриці:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Елементи першого стовпця даної матриці перевищують відповідні елементи другого стовпця, елементи третього — елементи четвертого, а елементи п'ятого — елементи другого. Домінуємо перший, третій і п'ятий стовпці опускаємо. У результаті отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Якщо цю матрицю проаналізувати з позицій гравця A , то ніяких подальших спрощень виконати неможливо. Отже, замість розв'язання гри з матрицею вимірності 4×5 досить вирішити гру вимірності 2×2 : ймовірності активних стратегій гравців в обох іграх будуть одними і тими ж, що випливає з теореми.

14.4. Розв'язання матричної гри графічним методом

Найбільш проста матрична гра — це гра, в якій кожен з гравців має дві стратегії. Матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо сідлової точки немає, то розв'язок гри знаходиться в змішаних стратегіях, а саме $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$. Це є ймовірності, з якими застосовують гравці свої стратегії.

Необхідно записати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \end{cases}.$$

З урахуванням $x_1 + x_2 = 1$, знаходимо

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (14.10)$$

Ціна гри:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (14.11)$$

Складаючи аналогічну систему рівнянь, знаходимо оптимальну стратегію для гравця B :

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (14.12)$$

Приклад. Розв'язати гру, задану платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо, що $\alpha = 1$, $\beta = 2$, матриця не має сідлової точки. За формулами знаходимо оптимальні стратегії та ціну гри:

$$X = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right), \quad Y = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right), \quad v = \frac{5}{3}.$$

Гру з матрицею 2×2 можна розв'язати графічно за допомогою таких побудов (рис. 14.1 – 14.2).

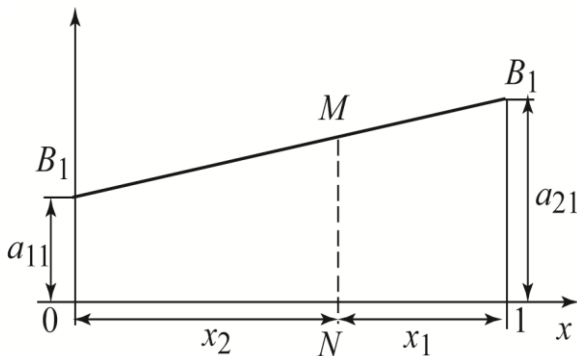


Рис. 14.1.

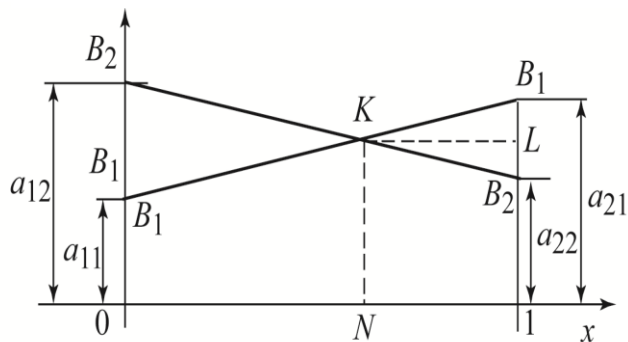


Рис. 14.2.

За віссю абсцис відкладаємо відрізок, довжина якого дорівнює одиниці. Лівий кінець відрізка (точка $x = 0$) відповідає стратегії A_1 , правий – стратегії A_2 . Проміжні точки x відповідають змішаним стратегіям (x_1, x_2) , де $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. На кінцях цього відрізка перпендикулярно до осі абсцис проводять прямі і відкладають виграш при відповідних чистих стратегіях. Якщо гравець B використовує стратегію B_1 , то виграш під час використання чистих стратегій A_1 і A_2 складе відповідно a_{11} і a_{21} . Відкладемо ці точки і з'єднаємо їх прямою B_1B_1 . Якщо гравець A використовує змішану стратегію, то його виграшу відповідає деяка точка M , яка лежить на цій прямій. Аналогічно можна побудувати пряму B_2B_2 , відповідну стратегії B_2 гравця B . Ламана B_1KB_2 – нижня межа виграшу, який отримає гравець A . Точка K , в якій виграш максимальний, визначає ціну гри і її розв'язок. Для знаходження оптимальної стратегії гравця B використовуються формули:

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}, \quad y_2 = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}.$$

Справедливість цих співвідношень доводиться, якщо у формули, що виражають y_1 і y_2 , підставити замість LB_2 і LB_1 їх значення, маємо:

$$LB_2 = v - a_{22}; \quad LB_1 = a_{21} - v.$$

Тут же можна розглянути задачу мінімізації верхньої межі виграшу для гравця B , помінявши місцями у розв'язанні гравців A і B .

Використовуючи геометричну інтерпретацію, можна знайти розв'язання ігор, заданих матрицею $2 \times n$. Кожній із n стратегій гравця B відповідає пряма. Побудувавши ці прямі, знаходять нижню межу виграшу. Точка K , що на нижній межі і для якої величина виграшу найбільша, визначає ціну гри і її розв'язок. При цьому визначаються активні стратегії гравця B (відповідні їм прямі перетинаються в точці K): з геометричних міркувань можна знайти значення y_j , що відповідають активним стратегіям гравця B .

Аналогічно може бути розв'язана гра з матрицею $m \times 2$, тільки при цьому будують верхню межу виграшу і на ній визначають мінімум.

Геометричні побудови доцільно використовувати для визначення активних стратегій гравців. Потім розв'язання знаходять за аналітичними формулами (14.10) – (14.12), або відповідні значення X , Y і v знаходять з геометричних міркувань.

Приклад. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямі на рис. 14.3 відповідають стратегіям гравця B . Ламана B_3KB_4 відповідає нижній межі виграшу.

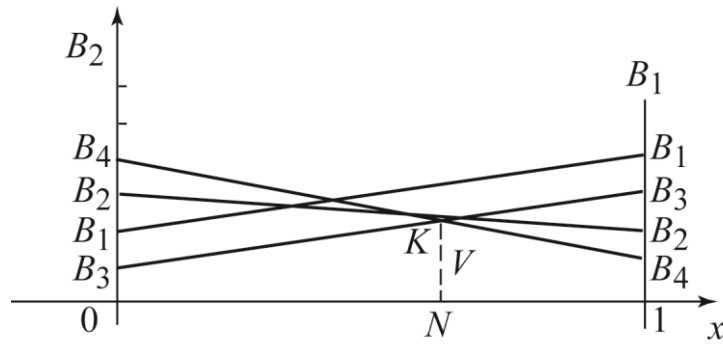


Рис. 14.3. Графічний розв'язок гри, матриця якої має розміри 2×4

Оптимальні стратегії гравця B – третя і четверта. За формулами (1) – (3) можна знайти розв'язання гри: $X = (0,4; 0,6)$; $Y = (0; 0; 0,6; 0,4)$, $v = 2,2$. Отже, гравець A використовує стратегію A_1 з імовірністю 0,4, а стратегію A_2 – з імовірністю 0,6. При цьому його виграш в середньому складе 2,2 одиниць.

14.5. Розв'язання матричної гри зведенням до задачі лінійного програмування

Розглянемо випадок, коли в платіжній матриці $[a_{ij}]_{m \times n}$, $\alpha \neq \beta$ і всі елементи $a_{ij} \geq 0$. Ясно, що тоді і ціна гри $v > 0$. Знайдемо спочатку оптимальну змішану стратегію $\bar{q} = (q_1; \dots; q_n)$ гравця B . Використовуючи її, він програє не більше v при будь-якій чистій стратегії A_i гравця A , тобто:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq v \quad (i = \overline{1, m}).$$

Розділимо обидві частини нерівності на v :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{q_j}{v} \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Позначивши

$$\frac{q_j}{v} = y_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (14.13)$$

отримаємо систему обмежень для нових змінних:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (14.14)$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14.15)$$

Крім того, y_j задовольняє умову:

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{v} = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^n q_j = \frac{1}{v} \cdot 1 = \frac{1}{v}.$$

Гравець B прагне зробити свій гарантований програш v можливо меншим, а значить, можливо більшою величиною:

$$\frac{1}{v} = \sum_{j=1}^n y_j = \varphi. \quad (14.16)$$

Враховуючи співвідношення (14.13)–(14.15), приходимо до наступної математичної моделі задачі:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max \quad (14.17)$$

за лінійних обмежень основної системи:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (14.18)$$

та обмежень на знак:

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14.19)$$

Це типова задача лінійного програмування, що записана в симетричній формі. Вирішивши її, знайдемо оптимальний вектор $\mathbf{Y}^* = (y_1^*; \dots; y_n^*)$ і відповідне йому максимальне значення цільової функції $\varphi^* = \varphi_{\max}$, а потім, використовуючи вирази (14.13) і (14.15), визначимо ціну гри і компоненти оптимальної змішаної стратегії:

$$v = \frac{1}{\varphi_{\max}}, \quad q_j^* = v y_j^* \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14.20)$$

Міркуючи аналогічно, приходимо до задачі лінійного програмування:

$$f = \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min, \quad (14.21)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14.22)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (14.23)$$

розв'язуючи яку, знайдемо оптимальний вектор $\mathbf{X}^* = (x_1^*; \dots; x_m^*)$ і $f = f_{\min}$, а потім визначимо:

$$v = \frac{1}{f_{\min}}, \quad p_i^* = v x_i^* \quad (i = \overline{1, m}), \quad (14.24)$$

тобто оптимальну змішану стратегію $\bar{p}^* = (p_1^*; \dots; p_m^*)$ гравця A .

Задачі (14.17) – (14.19) і (14.21) – (14.23) утворюють симетричну пару двоїстих спряжених задач лінійного програмування, а тому немає необхідності вирішувати обидві задачі. Знайшовши розв’язок однієї з них, скористаємося відповідністю між двоїстими змінними, що встановлюється стосовно канонічних форм задач

$$\begin{array}{cc} \overbrace{x_1 \dots x_m}^{\text{Вільні}} & \overbrace{x_{m+1} \dots x_{m+n}}^{\text{Базисні}} \\ \underbrace{y_{n+1} \dots y_{n+m}}_{\text{Базисні}} & \underbrace{y_1 \dots y_n}_{\text{Вільні}} \end{array} .$$

Потім з рядка цільової функції останньої симплекс-таблиці, що містить компоненти оптимального вектора двоїстої задачі, випишемо їх.

Приклад. Торгівельна фірма розробила декілька варіантів плану продажу товарів на майбутній ярмарці з урахуванням мінливої кон’юнктури ринка та попиту покупців. Рівні доходу від можливих сполучень представлені в табл. 14.4. Визначити оптимальний план продажу товарів.

Позначимо ймовірність застосування торговельною фірмою стратегії $\Pi_1 - x_1$, стратегії $\Pi_2 - x_2$, $\Pi_3 - x_3$, ймовірність використання стратегії $K_1 - y_1$, стратегії $K_2 - y_2$, $K_3 - y_3$.

Таблиця 14.4

План продажу	Величина доходу, грош. од.		
	K_1	K_2	K_3
Π_1	8	4	2
Π_2	2	8	4
Π_3	1	2	8

Для першого гравця (торгівельної фірми) математична модель задачі має вигляд:

$$f = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow \min ,$$

за обмежень:

$$\begin{aligned} 8X_1 + 2X_2 + X_3 &\geq 1, \\ 4X_1 + 8X_2 + 2X_3 &\geq 1, \\ 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 &\geq 1, \\ X_i &\geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

де $x_i = X_i v$.

Для другого гравця (кон'юнктури ринку та попиту покупців) математична модель задачі має вигляд:

$$z = Y_1 + Y_2 + Y_3 \rightarrow \max,$$

за обмежень:

$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1,$$

$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1,$$

$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1,$$

$$Y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Знайдемо оптимальний розв'язок задачі для другого гравця симплексним методом. Остання таблиця має вигляд (табл. 14.5).

Таблиця 14.5

Базис	C_b	C	1	1	1	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Y_1	1	$\frac{1}{14}$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$	0
Y_2	1	$\frac{11}{196}$	0	1	0	$-\frac{3}{98}$	$\frac{31}{1996}$	$-\frac{1}{14}$
Y_3	1	$\frac{5}{49}$	0	0	1	$-\frac{1}{98}$	$-\frac{3}{98}$	$\frac{1}{7}$
Δ		$\frac{45}{196}$	0	0	0	$\frac{5}{49}$	$\frac{11}{196}$	$\frac{1}{14}$

З табл. 14.5 слідує, що $Y^* = \left(\frac{1}{14}, \frac{11}{196}, \frac{5}{49}\right)$, $z(Y^*) = \frac{45}{196}$.

Ціна гри $v = \frac{1}{z(Y^*)} = \frac{196}{45}$. Оскільки $y_i = Y_i v$, то $y_1 = \frac{14}{45}$, $y_2 = \frac{11}{45}$, $y_3 = \frac{20}{45}$.

Оптимальна стратегія другого гравця: $y^* = \left(\frac{14}{45}, \frac{11}{45}, \frac{20}{45}\right)$.

Стратегії першого гравця знайдемо з останньої симплекс-таблиці, використовуючи метод відповідності змінних висхідної і двоїстої задач. Отримаємо:

$$x^* = \left(\frac{20}{45}, \frac{11}{45}, \frac{14}{45}\right).$$

Таким чином, торгівельна фірма на ярмарці повинна дотримуватись стратегії

$x^* = \left(\frac{20}{45}, \frac{11}{45}, \frac{14}{45}\right)$, при цьому вона одержить дохід не менше $v = \frac{196}{45}$ грош. од.

Запитання для самоперевірки

1. Які задачі в економіці можна розв'язувати методами теорії ігор?
2. Наведіть основні поняття теорії ігор.
3. Як розв'язати матричну гру в чистих стратегіях?
4. Як розв'язати матричну гру в змішаних стратегіях?
5. Наведіть основну теорему теорії ігор.
6. Як розв'язати матричну гру графічним методом?

15. Аналіз та управління ризиком в економіці на базі концепції теорії ігор

15.1. Суть ризиків та управління ними в економіці.

15.2. Аналітичні методи оцінки ризиків в економіці.

15.3. Ігри з природою.

15.4. Критерії для прийняття рішень.

15.1. Суть ризиків та управління ними в економіці

Згідно економіко-математичним енциклопедичним словником ризик (економічний, господарський) визначається як небезпека виникнення непередбачуваних збитків, утрат прибутку, що очікується, доходу або майна, коштів у зв'язку з випадковою зміною умов економічної діяльності, несприятливими обставинами [36, с. 457- 458]. Виникає ризик, коли комерційна, виробнича діяльність здійснюється в умовах невизначеності через нестачу інформації й через це досягнення позитивного результату не гарантується. Ризик вважається невід'ємною компонентою ринкової економіки та вимірюється частотою, ймовірністю виникнення збитків і їх рівнем. Ухвалюючи те чи інше рішення в економіці управлінці завжди оцінюють ймовірність збитків та вибирають надійний варіант з альтернативних на основі допустимого рівня ризику. Кількісна оцінка рівня господарського ризику є обов'язковою складовою техніко-економічного обґрунтування будь-якого проекту або пропозиції.

Управління ризиком передбачає: 1) визначення найбільш важливих наслідків критичних ситуацій; 2) розробку схеми поведінки суб'єкту господарювання в різних варіантах розвитку критичної ситуації для зменшення збитків від непередбачених факторів; 3) формування умов подолання негативних наслідків ухваленого управлінського рішення або проекту для продовження виробничо-господарської діяльності фірми чи підприємства. Управляти ризиком означає не тільки впливати на результат з метою зменшення негативних наслідків ризикових ситуацій, але й активно впливати на кожну функцію управління. Відомо, що найпоширенішим методом управління є диверсифікація ризику, що передбачає розділення його. Прикладом цього є збалансований портрет інвесторів. Іншим відомими методами є вивчення ринку та його тенденцій, клієнтів та партнерів, маркетингове дослідження, страхування ризику, зазвичай створюється резервний фонд для покриття збитків.

В економіці виокремлюють розумні ризики, за яких рівень матеріальних збитків не призведе до кризової ситуації, та катастрофічні ризики. У свою чергу розумні ризики мають зони допустимого та критичного ризику. Катастрофічний ризик призводить до руйнування всієї діяльності та до її кінця. В зоні допустимого ризику діяльність суб'єкта господарювання зберігає свою доцільність й очікувані збитки менше очікуваного прибутку й існують загрози недоотримання наміченого прибутку. Зона критичного ризику характеризується випадковими збитками, розміри яких перевищують величину очікуваного прибутку, величину всіх засобів, вкладених у справу, при цьому не тільки недоотримується прибуток, але наявні збитки в сумі, що дорівнює всім витратам. У зоні катастрофічного ризику випадкові збитки досягають величини, що дорівнює всьому капіталу підприємця, що призводить до банкрутства, закриття підприємства, припинення діяльності.

Фахівці з проблем ризику в економіці класифікують ризики за такими ознаками: місцем виникнення (зовнішні і внутрішні), ступенем розповсюдженості (загальні інформаційні, особливі банківські та виробничі), рівнем прийняття рішення (макроекономічні та мікроекономічні), тривалістю дії (короткострокові та постійні), рівнем збитків (мінімальні, середні, оптимальні, максимальні, допустимі, критичні, катастрофічні), ступенем правомірності (оправдані та неоправдані), можливістю страхування (ті, що можна

застрахувати та ті, що не можна застрахувати), рівнем сталості збитків (статичні та динамічні), відносно аспектів ризику (психологічні, соціальні, економічні, юридичні, політичні, медико-біологічні, комбіновані), об'єктивністю (з об'єктивною ймовірністю, зі суб'єктивною ймовірністю та суб'єктивно-об'єктивною ймовірністю), часом ухвалення рішення (випереджувані, своєчасні, запізнілі), типами (обґрунтовані, необґрунтовані, азартні), кількістю осіб, що ухвалюють рішення (індивідуальні, групові), видами (пов'язані з природними лихами та соціально-економічні).

15.2. Аналітичні методи оцінки ризиків в економіці

До складу аналітичних методів оцінки ризиків в економіці входять: статистичні методи, метод з використанням інструментів теорії ігор, метод експертних оцінок, метод побудови дерева рішень, метод аналогій та ін. Ризики оцінюють ймовірністю настання несприятливих негативних наслідків: $W = p$ або $W = px$, де x – величина негативних наслідків, величина збитків. Ризики обчислюють і як $W = M(x) = m_x$ – математичне сподівання несприятливих наслідків та дисперсію $W = D(x) = \sigma_x^2$. Саме дисперсію найчастіше використовують як показник ризику, велике значення якого говорить про великі коливання значень показників, що досліджуються. Ризики оцінюються за допомогою коефіцієнта варіації: $W = V(x) = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$.

15.3. Ігри з природою

З метою зменшення несприятливих наслідків у кожному конкретному випадку управлінського рішення слід враховувати ступінь ризику і наявну інформацію. Тут особа, яка приймає рішення (ОПР), вступає в ігрові відносини з деякою абстрактною особою, яку умовно називають «природою». При цьому маються деякі імовірнісні характеристики стану природи. Таку ситуацію прийнято називати іграми з природою.

Будь-яку господарську діяльність людини можна розглядати як гру з природою. У широкому сенсі під «природою» розуміють сукупність невизначених чинників, що впливають на ефективність прийнятих рішень.

Задачею особи, що приймає рішення (ОПР), є прийняття найкращого управлінського рішення в кожній конкретній ситуації. Якість прийнятого рішення залежить від інформованості ОПР про ситуацію, в якій приймається рішення. Байдужість природи до результату гри (виграшу) і можливість отримання ОПР додаткової інформації про її стан відрізняють гру з природою від звичайної матричної гри.

Ігри з природою становлять основну модель теорії прийняття рішень в умовах часткової невизначеності.

Велику кількість станів природи необхідно позначити через Π , окремий стан – Π_j , $\Pi_j \in \Pi (j = \overline{1, n})$. Безліч рішень (стратегій) ОПР слід позначити через A_i , $A_i \in A (i = \overline{1, m})$.

У взаємовідносинах з природою ОПР може використовувати будь-які з стратегій $A_1, \dots, A_m$ залежно від станів Π_j природи. ОПР відшукує оптимальну поведінку, яка і буде її оптимальною стратегією. При цьому вона може користуватися як чистими, так і змішаними стратегіями.

На підставі платіжної матриці гри з природою:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – виграш ОПР, якщо вона використовує стратегію A_i під час стану природи Π_j .

Відмінність гри з природою від звичайної матричної гри полягає насамперед у спрощенні гри. Виявлення дублюючих і домінуючих стратегій проводиться тільки для стратегій ОПР.

Іноді у разі розв'язання гри з природою використовується матриця ризиків. Елементи r_{ij} матриці ризиків рівні різниці між максимально можливим виграшем і тим виграшем, який статистик отримає в тих же умовах Π_j , застосовуючи стратегію A_i , тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

15.4. Критерії для прийняття рішень

Оптимальну стратегію ОПР можна визначити, використовуючи ряд критеріїв. Розглянемо дві групи критеріїв, що використовують і не використовують апріорні ймовірності q_j станів природи. До першої групи належать критерії Байєса і Лапласа. У цьому випадку користуються середнім значенням $\bar{a}_i$ виграшу.

Так, при відомому розподілі ймовірностей різних станів Π_j природи використовується критерій Байєса. Показником у цьому критерії служить або величина середнього виграшу, або величина середнього ризику.

Платіжна матриця $(a_{ij})_{m \times n}$ представлена у вигляді табл. 15.1.

Таблиця 15.1

Платіжна матриця $(a_{ij})_{m \times n}$

Стратегія ОПР A_i	Стан природи Π_j				Середній виграш $\bar{a}_i$
	Π_1	Π_2	...	Π_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\bar{a}_1$
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\bar{a}_m$
q_j	q_1	q_2	...	q_n	

За критерієм Байєса за оптимальну приймається та чиста стратегія A_i , за якої максимізується середній виграш $\bar{a}_i$ ОПР, тобто позначається $\bar{a} = \max_i \bar{a}_i$, де

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j.$$

Матриця ризиків представлена у вигляді табл. 15.2.

Таблиця 15.2

Матриця ризиків (r_{ij})

Стратегія ОПР A_i	Стан природи Π_j				Середній ризик $\bar{r}_i$
	Π_1	Π_2	...	Π_n	
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}	$\bar{r}_1$
...	...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}	$\bar{r}_m$
q_j	q_1	q_2	...	q_n	

За оптимальну стратегію ОПР приймається чиста стратегія A_i , за якої мінімізується середній ризик, тобто забезпечується $\bar{r} = \min_i \bar{r}_i$, де $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j$.

У разі, коли ймовірності станів природи правдоподібні, для їх оцінки використовується принцип Лапласа, згідно з яким всі стани природи вважаються рівноймовірними, тобто $q_1 = \dots = q_n = \frac{1}{n}$. Оптимальною вважається стратегія, що забезпечує максимум середнього виграшу.

До другої групи критеріїв вибору оптимальної стратегії ОПР, що використовуються при невідомих апіорних ймовірностях станів природи, відносяться критерії Вальда, Севіджа і Гурвіца.

Максимальний критерій Вальда збігається з критерієм вибору максимальної стратегії, що дозволяє отримувати нижню чисту ціну α в парній грі з нульовою сумою. При критерії Вальда за оптимальну приймається чиста стратегія, яка в найгірших умовах гарантує максимальний виграш, тобто $\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\}$.

Критерій мінімального ризику Севіджа рекомендує вибирати оптимальну стратегію ту, за якої величина максимального ризику мінімізується в найгірших умовах, тобто забезпечується $\min_i \max_j \{r_{ij}\}$. Суть критерію Севіджа полягає у виборі такої стратегії, щоб не допустити надмірно великих збитків, до яких вона може призвести. Спочатку знаходять матрицю ризиків, елементи якої показують, який збиток матиме підприємство, якщо для кожного стану природи не буде вибрана найкраща стратегія. Елементи матриці ризиків знаходять за формулою $r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}$, де $\max a_{ij}$ – максимальний елемент у стовпці висхідної матриці. Далі оптимальна стратегія за даним критерієм знаходиться за формулою: $\min(\max(\max a_{ij} - a_{ij}))$.

Критерії Вальда і Севіджа орієнтують ОНР на найбільш несприятливі стани природи, тобто ці критерії висловлюють песимістичну оцінку ситуації.

Критерій Гурвіца є критерієм песимізму – оптимізму. За оптимальну приймається та стратегія, для якої виконується співвідношення:

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j \{a_{ij}\} + (1 - \lambda) \max_j \{a_{ij}\} \right\}, \text{ де } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

При $\lambda = 0$ маємо критерій крайнього оптимізму, а при $\lambda = 1$ – критерій песимізму Вальда. Якщо $0 < \lambda < 1$, то маємо середнє. При бажанні підстрахуватися в даній ситуації λ приймають близьким до одиниці. У загальному випадку число λ вибирають виходячи з досвіду чи суб'єктивних міркувань.

Приклад. Продовжимо розв'язання прикладу теми 14 в табл. 15.3.

Таблиця 15.3

Матриця платоспроможного попиту

Обсяг виробництва (оптові закупівлі)	Розмір прибутку (a_{ij}) залежно від можливих коливань попиту				$\alpha_i = \min \{a_{ij}\}$
	489 876,17	986 200,50	1 488 973	1 967 962,1	
$S_1 = 986 200,50$	49 310,03	197 240,1	197 240,1	197 240,1	49 310,03
$S_2 = 1 488 973$	-60	148 897,3	297 794,6	297 794,6	-60
$S_3 = 1 967 962,1$	-1 140	98 398,11	196 796,24	393 592,42	-1 140
$\beta_j = \max \{a_{ij}\}$	49 310,03	197 240,1	297 794,6	393 92,42	

Побудуємо матрицю ризиків (табл. 15.4).

Таблиця 15.4

Матриця ризиків

r_{ij}	489 876,17	986 200,50	1 488 973	1 967 962,1	$\max \{r_i\}$	$S_{\text{опт}}$
S_1	0	0	100 554,5	196 352,32	196 352,32	
S_2	49 370,03	48 342,80	0	95 797,82	95 797,82	95 797,82
S_3	50 450,03	98 841,99	100 998,36	0	100 998,36	

Значення критерію Севіджа полягає в прагненні уникнути більшого ризику під час вибору рішень. Отже, відповідно до критерію, необхідно виробляти продукцію в обсязі $S_2 = 1488973$ тис. грн.

Нехай дотримується песимістична оцінка (критерій Гурвіца) і вважається, що $\lambda = 0,8$, тоді для кожної стратегії відповідно маємо:

$$y_1 = 0,8 \cdot 49\,310,03 + (1 - 0,8) \cdot 197\,240,1 = 78\,896,04 \text{ тис. грн,}$$

$$y_2 = 0,8 \cdot (-60) + (1 - 0,8) \cdot 297\,794,6 = 59\,510,92 \text{ тис. грн,}$$

$$y_3 = 0,8 \cdot (-1140) + (1 - 0,8) \cdot 393\,592,42 = 77\,806,48 \text{ тис. грн.}$$

За критерієм Гурвіца раціональним є такий варіант обсягу виробництва:

$$Y = \max_i \{y_i\} = \max\{78\,896,04; 59\,510,92; 77\,806,48\} = 78\,896,04 \text{ тис. грн} \rightarrow S_1.$$

Приклад. Фірма «Фармацевт» виробляє ліки та біомедичну продукцію. Пік попиту на деякі лікарські препарати (сердечно-судинні, анальгетики) приходить на літній період, інші (антиінфекційні, від кашлю) – на осінній та весняний періоди. Затрати на 1 умовну одиницю продукції за вересень – жовтень склали: в першій групі лікарських препаратів – 20 грош. од.; у другій групі – 15 грош. од. За даними спостережень протягом декількох останніх років відділом маркетингу фірми встановлено, що вона може реалізувати протягом вересня – жовтня в умовах теплової погоди 3 050 умовних одиниць першої групи препаратів і 1 100 умовних одиниць другої групи препаратів; в умовах прохолодної погоди – 1 525 умовних одиниць першої групи препаратів і 3 690 умовних одиниць другої групи препаратів. У зв'язку з можливими змінами погоди виникає задача – визначити стратегію фірми з випуску продукції, яка забезпечує максимальний дохід від реалізації за ціною продажу 40 грош. од. за 1 умовну одиницю продукції першої групи і 30 грош. од. за 1 умовну одиницю продукції другої групи.

Визначимо виробничу програму підприємства в умовах ризику з використанням матричних ігор. Відомо, що фірма володіє двома стратегіями: A_1 – якщо в цьому році буде тепла погода, і A_2 – якщо в цьому році буде холодна погода. Якщо фірма прийме стратегію A_1 і в дійсності буде тепла погода (стратегія природи B_1), то випущена продукція (3 050 умовних одиниць першої групи препаратів і 1 100 умовних одиниць другої групи препаратів) буде повністю реалізована і дохід складе $3\,050(40 - 20) + 1\,100(30 - 15) = 77\,500$ грош. од. У випадку прохолодної погоди (стратегія природи B_2) препарати другої групи будуть продані повністю, а першої групи тільки в кількості 1 525 умовних одиниць і частина препаратів залишиться нереалізованою. Дохід

складе $1525(40 - 20) + 1100(30 - 15) - 20(3050 - 1525) = 16\,500$ грош. од.
 Аналогічно, якщо фірма прийме стратегію A_2 і в дійсності буде холодна
 погода, то дохід складе $1525(40 - 20) + 3\,690(30 - 15) = 85\,850$ грош. од. За
 теплої погоди дохід складе:
 $1525(40 - 20) + 1100(30 - 15) - (3\,690 - 1100)15 = 8\,150$ грош. од.

Розглядаючи фірму і погоду як два гравця, отримаємо платіжну матрицю:

	B_1	B_2
A_1	77 500	16 500
A_2	8 150	85 850

$$\alpha = \max(16\,500, 8\,150) = 16\,500 \text{ грош. од.},$$

$$\beta = \min(77\,500, 85\,850) = 77\,500 \text{ грош. од.}$$

Ціна гри лежить в діапазоні $16\,500 \leq v \leq 77\,500$ грош. од.

З платіжної матриці видно, що за всіма умовами дохід фірми буде не менший 16 500 грн. одн., але якщо погодні умови співпадуть з обраною стратегією, то дохід фірми може скласти 77 500 грош. од.

Позначимо ймовірність застосування фірмою стратегії A_1 через x_1 , а стратегії A_2 – через x_2 , причому $x_1 = 1 - x_2$. Розв'язавши гру графічним методом, отримаємо $x_{opt} = (0,56; 0,44)$ при цьому ціна гри $v = 46\,986$ грош. од. Оптимальний план виробництва лікарських препаратів складе:

$$0,56(3\,050; 1\,100) + 0,44(1\,525; 3\,690) = (2\,379; 2\,239,6).$$

Таким чином, фірмі доцільно випускати протягом вересня і жовтня 2 379 грош. од. препаратів першої групи і 2 239,6 грош. од. препаратів другої групи, тоді за будь-якої погоди вона отримає дохід не менше 46 986 грош. од.

В умовах невизначеності, якщо немає можливості фірмі використовувати змішані стратегії, застосовують критерії природи.

1. *Критерій Вальда:*

$$\max(\min a_{ij}) = \max(16\,500, 8\,150) = 16\,500 \text{ грош. од.}$$

фірмі доцільно використовувати стратегію A_1 .

2. *Критерій Гурвіца:* для визначеності приймемо $\lambda = 0,4$, тоді для стратегії фірми A_1

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j \{a_{ij}\} + (1 - \lambda) \max_j \{a_{ij}\} \right\}, \quad \text{де } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$0,4 \cdot 16\,500 + (1 - 0,4) \cdot 77\,500 = 53\,100 \text{ грош. од.}$$

для стратегії A_2

$$0,4 \cdot 8\,150 + (1 - 0,4) \cdot 85\,850 = 54\,770 \text{ грош. од.,}$$

Отже $\max(53\,100, 54\,770) = 54\,770$ грош. од. і фірмі доцільно використовувати стратегію A_2 .

3. *Критерій Севіджа*. Максимальний елемент в першому стовпці 77 500, а в другому – 85 850. Елементи матриці ризиків будуть мати вигляд:

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 69\,350 \\ 69\,350 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\min(\max(\max a_{ij} - a_{ij})) = \min(69\,350, 69\,350) = 69\,350 \text{ грош. од.}$$

За даним критерієм фірмі доцільно використовувати стратегію A_1 або A_2 .

Слід відмітити, що кожний з даних критеріїв не може бути визнаним задовільним для кінцевого вибору рішення, проте їх сумісний аналіз дозволяє наочно представити наслідки прийняття тих чи інших управлінських рішень.

За умови відомого розподілу ймовірностей різних станів природи критерієм рішення є максимум максимального сподівання. Якщо відомо, що ймовірності теплої й холодної погоди рівні і складають 0,5, тоді оптимальна стратегія фірми визначається так:

$$\max((0,5 \cdot 77\,500 + 0,5 \cdot 16\,500); (0,5 \cdot 8\,150 + 0,5 \cdot 85\,850)) = \max(47\,000; 47\,000) = 47\,000.$$

Фірмі доцільно використати стратегію A_1 або A_2 .

Запитання для самоперевірки

1. Для яких задач в економіці застосовуються ігри з природою?
2. Наведіть основні критерії для прийняття рішень в задачах ігор з природою.
3. У чому суть критерію Байєса?
4. У чому суть критерію Вальда, Севіджа і Гурвіца?

16. Динамічне програмування

16.1. Загальні теоретичні викладки.

16.2. Розв'язання задачі динамічного програмування в аналітичній формі.

16.3. Розв'язання задачі про заміну обладнання.

16.1. Загальні теоретичні викладки

Основним методом динамічного програмування є розроблений американським математиком Р. Беллманом метод рекурентних співвідношень, в основі якого лежить принцип оптимальності: якщо управління процесу оптимальне то воно буде оптимальним і для процесу, що залишається після виконання першого кроку. Цей принцип дозволяє встановити співвідношення між екстремальними значеннями цільової функції в задачах з різною тривалістю процесу з різними початковими станами [1, с. 125].

Математичне формулювання принципу оптимальності частіше наводиться для задач з адитивним критерієм оптимальності (сепарабельна функція мети).

Нехай необхідно знайти максимум функції:

$$Z = z_1(x_1) + z_2(x_2) + z_3(x_3)$$

за обмежень

$$\begin{cases} u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3) \leq a_0, \\ v_1(x_1) + v_2(x_2) + v_3(x_3) \leq b_0 \end{cases}$$

і будь-якими двосторонніми обмеженнями на невідомі.

Зручно інтерпретувати x_j як обсяг виробництва певного товару, $z_j(x_j)$ – прибуток від реалізації цієї продукції, $u_j(x_j)$, $v_j(x_j)$ – витрати двох видів ресурсів на виробництво, a_0, b_0 – наявні запаси ресурсів.

Необхідно звести цю багатовимірну задачу до послідовності одновимірних задач, у кожній з яких враховується тільки одна невідома. Слід позначити через $f_1(a_1, b_1)$, $f_2(a_2, b_2)$, $f_3(a_3, b_3)$ – максимальний прибуток, отриманий від випуску тільки одного виду товару, тільки перших двох видів і всіх трьох найменувань при заданих ресурсах в обсягах $a_j \leq a_0, b_j \leq b_0$. За таких позначень оптимальний розв'язок можна записати як $Z_{\max} = f_3(a_0, b_0)$, де

a_0, b_0 – конкретні числові значення обсягів ресурсів, а a_j, b_j – ще невідомі параметри.

Перший (початковий) етап. Нехай задані всі невідомі, крім першої, і необхідно знайти оптимальний план випуску продукції одного першого найменування при наявних залишках ресурсів a_1, b_1 . Іншими словами, необхідно знайти $f_1(a_1, b_1) = \max \{z_1(x_1)\}$ за обмежень $u_1(x_1) \leq a_1, v_1(x_1) \leq b_1$ і двосторонніх обмежень на x_1 .

Другий етап. Визначимо оптимальний план виробництва двох видів продукції при наявних залишках ресурсів a_2, b_2 .

Необхідно знайти $f_2(a_2, b_2) = \max \{z_1(x_1), z_2(x_2)\}$
за обмежень

$$\begin{cases} u_1(x_1) + u_2(x_2) \leq a_2, \\ v_1(x_1) + v_2(x_2) \leq b_2 \end{cases}$$

і двосторонніх обмежень на невідомі.

Зведемо цю двовимірну задачу до одновимірної. Нехай невідома x_2 – задана, тоді запаси ресурсів на виробництво видів продукції, що залишилися, скорочуються на $u_2(x_2), v_2(x_2)$ і максимум прибутку (при заданій x_2) буде дорівнювати:

$$z_2(x_2) + f_1(a_2 - u_2(x_2), b_2 - v_2(x_2)),$$

де $f_1(a_2 - u_2(x_2), b_2 - v_2(x_2)) = f_1(a_1, b_1)$ знайдений на попередньому етапі найбільший прибуток від випуску першого виду товару при залишках ресурсів, які зараз залежать від заданого значення x_2 .

Загальний прибуток від випуску двох видів товару виявився вираженим через одну невідому x_2 . Перебираючи її можливі значення, знаходимо максимум прибутку у процесі виробництва двох видів продукції в такій формі:

$$f_2(a_2, b_2) = \max_{x_2} \{z_2(x_2) + f_1(a_2 - u_2(x_2), b_2 - v_2(x_2))\}.$$

Отримали відоме функціональне (рекурентне) рівняння Беллмана. Невідома x_2 – задається, далі додається оптимальний розв'язок попереднього етапу $f_1(a_1, b_1)$ для залишків ресурсів:

$$a_1 = a_2 - u_2(x_2), b_1 = b_2 - v_2(x_2), b_1 = b_2 - v(x_2).$$

Шукається максимум отриманої суми за всіма можливими x_2 .

Третій етап. Повторюючи міркування попереднього етапу, отримуємо аналогічне функціональне рівняння:

$$f_3(a_3, b_3) = \max_{x_3} \{ z_3(x_3) + f_2(a_3 - u_3(x_3), b_3 - v_3(x_3)) \}.$$

Оскільки третій етап – заключний, то можна не розв'язувати задачу із змінними запасами ресурсів, а відразу покласти їх конкретним числовим значенням заданих запасів ресурсів $a_3 = a_0, b_3 = b_0$. На заключному етапі визначається остання компонента оптимального плану x_3^0 .

Зворотним ходом процедури визначаємо інші компоненти оптимального плану. Оскільки вже відомо значення x_3^0 , знаходимо залишки ресурсів $a_2 = a_3 - u(x_3^0), b_2 = b_3 - v(x_3^0)$ та із загального розв'язку другого етапу знаходимо значення другої компоненти оптимального плану x_2^0 . Далі обчислюємо $a_1 = a_2 - u(x_2^0), b_1 = b_2 - v(x_2^0)$ і із загального розв'язку першого етапу знаходимо першу компоненту x_1^0 .

16.2. Розв'язання задачі динамічного програмування в аналітичній формі

Знайти максимум сепарабельної функції цілі:

$$z = z(x_1) + z(x_2) = x_1 + (2x_2 - x_2^2)$$

за обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Перший (початковий) етап. На 1-му етапі необхідно знайти максимум одновимірної функції:

$$f_1(a_1, b_1) = \max z_1(x_1) = \max x_1$$

за обмежень

$$\begin{cases} 0 \leq 3x_1 \leq a_1, \\ 0 \leq x_1 \leq b_1. \end{cases}$$

Задача проста і її легко розв'язати аналітично для всіх a_1, b_1 . Змінна x_1 приймає максимальне значення на правій межі інтервалу варіювання в точці $x_1 = \min \left\{ \frac{a_1}{3}, b_1 \right\}$. Значення $f_1(a_1, b_1)$ дорівнює цьому ж виразу.

Другий (заключний) етап. Необхідно виписати рекурентне співвідношення:

$$\begin{aligned} f_2(a_2, b_2) &= \max_{x_2} \{ z_2(x_2) + f_1(a_2 - 2x_2, b_2 - 2x_2) \} = \\ &= \max_{x_2} \left\{ (2x_2 - x_2^2) + f_1(6 - 2x_2, 4 - 2x_2) \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки цей етап – заключний, то слід підставити відразу відомі значення параметрів $a_2 = 6, b_2 = 4$.

$$\text{Знаходимо } x_1 = \min \left\{ \frac{a_1}{3}, b_1 \right\} = \min \left\{ \left(\frac{6 - 2x_2}{3}, 4 - 2x_2 \right) \right\} \text{ для } 0 \leq x_2 \leq 2.$$

На інтервалі $0 \leq x_2 \leq 1,5$ справедлива нерівність $\frac{6 - 2x_2}{3} \leq (4 - 2x_2)$, звідки $x_1 = \frac{6 - 2x_2}{3}$.

На інтервалі $1,5 \leq x_2 \leq 2$ справедлива протилежна нерівність $\frac{6 - 2x_2}{3} \geq (4 - 2x_2)$, звідки $x_1 = (4 - 2x_2)$, $f_1(6 - 2x_2, 4 - 2x_2) = \max x_1$:

$$f_1(6 - 2x_2, 4 - 2x_2) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{3}x_2, & (0 \leq x_2 \leq 1,5) \\ 4 - 2x_2, & (1,5 \leq x_2 \leq 2) \end{cases}.$$

З урахуванням виразу для f_1 отримуємо:

$$\begin{aligned}
z_{\max} = f_2(6, 4) &= \max \begin{cases} (2x_2 - x_2^2) + (2 - \frac{2}{3}x_2), & (0 \leq x_2 \leq 1,5) \\ (2x_2 - x_2^2) + (4 - 2x_2), & (1,5 \leq x_2 \leq 2) \end{cases} = \\
&= \max \begin{cases} (2 + \frac{4}{3}x_2 - x_2^2), & (0 \leq x_2 \leq 1,5) \\ (4 - x_2^2), & (1,5 \leq x_2 \leq 2) \end{cases} = \\
&= \max \begin{cases} 2,444, & (x_2 = 0,667) \\ 1,750, & (x_2 = 1,5) \end{cases} = \\
&= 2,444 \quad (x_2 = 0,667)
\end{aligned}$$

При $x_2 \leq 1,5$: $z_{\max} = 2 + \frac{4}{3}x_2 - x_2^2$. Максимум квадратичного тричлена

досягається при $x_2 = \frac{2}{3} = 0,667$ і дорівнює $z_{\max} = \frac{22}{9} = 2,444$. При $x_2 \leq 1,5$:

$z = 4 - x_2^2$. Максимум цього виразу досягається при $x_2 = 1,5$ і дорівнює

$z = \frac{7}{4} = 1,75$. Більше з отриманих значень дорівнює 2,444, при цьому $x_2^0 =$

$= \frac{2}{3} = 0,667$. Зворотним ходом отримуємо $x_1^0 = 2 - \frac{2}{3}x_2^0 = \frac{14}{9}$.

16.3. Розв'язання задачі про заміну обладнання

Однією з основних задач, які вирішуються на підприємстві за допомогою оптимізаційних методів, є задача про заміну обладнання. Старіння обладнання включає фізичний і моральний знос, у результаті чого збільшуються виробничі витрати, витрати на ремонт і обслуговування, знижується продуктивність праці і ліквідна вартість обладнання. Необхідно розробити оптимальну стратегію використання і своєчасної заміни застарілого обладнання з метою знизити до мінімуму сумарні витрати на придбання обладнання і його експлуатацію, що еквівалентно, щоб отримати максимальний прибуток. Залежності, що описують зростання експлуатаційних витрат, зниження продуктивності та ліквідної вартості обладнання, можуть бути задані аналітично або в табличній формі.

У цій задачі послідовність етапів не може бути довільною. Час є визначальним чинником, тому допустимі тільки дві можливі послідовності етапів - від початку до кінця (алгоритм «прямої прогонки»), або від кінця до початку (алгоритм «зворотної прогонки»). Розв'язок при цьому підрозділяється на ряд етапів, кожен з яких відповідає черговому року експлуатації.

Нехай обладнання експлуатується $n = 5$ років, після чого продається. На початку кожного року необхідно прийняти рішення – зберегти старе обладнання, або ж замінити його новим (можливі також й інші рішення, наприклад, провести ремонтні роботи різного ступеня складності). Вартість нового обладнання p , ліквідна вартість знижується з кожним пропрацьованим роком удвічі і після t років експлуатації становить $s(t) = p \cdot 2^{-t}$. Витрати на експлуатацію протягом року залежать від віку устаткування і збільшуються з кожним пропрацьованим роком на одну і ту ж величину. Знайдемо оптимальну політику своєчасної заміни обладнання за таких умов завдання.

Алгоритм прямої прогонки

У цьому методі потрібно знайти величину експлуатаційних витрат за весь термін служби обладнання, для чого доведеться знаходити суму членів арифметичної прогресії:

$$v(t) = u(1) + u(2) + \dots + u(t) = 0,15p(1 + 2 + \dots + t) = 0,075pt(t + 1).$$

Перевіримо вираз: за перший рік роботи нового обладнання ці витрати складуть $0,75p \cdot 1 \cdot 2 = 0,15p$ – так і було задано за умовою задачі. Таким чином, сумарні експлуатаційні витрати тут є квадратичною функцією віку обладнання (t – кількість відпрацьованих років).

Тепер введемо позначення і виведемо основне рекурентне співвідношення. Позначимо через f_k мінімальні витрати на експлуатацію та оновлення обладнання протягом строку k років, після чого обладнання продається. У цих позначеннях метою є визначення $f_n = f_5$.

У принципі обладнання можна експлуатувати необмежено довго, так що до кінця k -го року вік устаткування може бути будь-яким у межах $1 \leq t \leq k$. Якщо припустити, що відомий цей вік, то легко визначаються загальні витрати за весь час роботи обладнання $w(t) = p - s(t) + v(t)$, а витрати за попередні роки виражаються функцією f_{k-t} . Оскільки вік t нам заздалегідь невідомий, перебираємо всі його можливі значення з інтервалу $1 \leq t \leq k$ і знаходимо мінімум наступного виразу:

$$f_k = \min \{w(t) + f_{k-t}\}.$$

Це є шукане рекурентне співвідношення (функціональне рівняння Беллмана). Для початку обчислювального процесу вважаємо $f_0 = 0$.

Значення витрат (з точністю до множника p) беремо з табл. 16.1 залежно від віку $1 \leq t \leq 5$:

Таблиця 16.1

Дані

t	$s(t)$	$v(t)$	$w(t)$
1	$1/2 = 0,500$	$0,075 \cdot 1 \cdot 2 = 0,150$	$1 - 0,500 + 0,150 = 0,650$
2	$1/4 = 0,250$	$0,075 \cdot 2 \cdot 3 = 0,450$	$1 - 0,250 + 0,450 = 1,200$
3	$1/8 = 0,125$	$0,075 \cdot 3 \cdot 4 = 0,900$	$1 - 0,125 + 0,900 = 1,775$
4	$1/16 = 0,062$	$0,075 \cdot 4 \cdot 5 = 1,500$	$1 - 0,062 + 1,500 = 2,438$
5	$1/32 = 0,031$	$0,075 \cdot 5 \cdot 6 = 2,250$	$1 - 0,031 + 2,250 = 3,218$

Послідовно обчислюємо значення $f_k = \min \{w(t) + f_{k-t}\}$:

$$f_1 = \min \{w(1) + f_0\} = 0,650 + 0 = 0,650; \quad t = 1.$$

$$f_2 = \min \begin{Bmatrix} w(1) + f_1 \\ w(2) + f_0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 0,650 + 0,650 \\ 1,200 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 1,300 \\ 1,200 \end{Bmatrix} = 1,200; \quad t = 2.$$

$$f_3 = \min \begin{Bmatrix} w(1) + f_2 \\ w(2) + f_1 \\ w(3) + f_0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 0,650 + 1,200 \\ 1,200 + 0,650 \\ 1,775 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 1,850 \\ 1,850 \\ 1,775 \end{Bmatrix} = 1,775; \quad t = 3.$$

$$f_5 = \min \begin{Bmatrix} w(1) + f_4 \\ w(2) + f_3 \\ w(3) + f_2 \\ w(4) + f_1 \\ w(5) + f_0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 0,650 + 2,400 \\ 1,200 + 1,775 \\ 1,775 + 1,200 \\ 2,438 + 0,650 \\ 3,218 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 3,050 \\ 2,975 \\ 2,975 \\ 3,050 \\ 3,218 \end{Bmatrix} = 2,975; \quad \begin{matrix} t = 2, \\ t = 3. \end{matrix}$$

Задача розв'язана. Оптимальна стратегія при такому співвідношенні витрат полягає в заміні устаткування після кожних двох років роботи. Оскільки нормативний термін $n = 5$ років виявився непарним, запропоновано два рівноцінних розв'язки – перший раз обладнання працює три роки, нове обладнання працює два роки, або навпаки, два роки і три роки після оновлення. Мінімальні витрати на експлуатацію та оновлення за такої стратегії становлять $2,975p$.

Алгоритм зворотної прогонки

Необхідно позначити через $\varphi_k(\tau)$ – мінімальні витрати за останні k -років за умови, що на початку цього періоду є обладнання віку τ . Тоді $\varphi_1(\tau)$ – мінімальні витрати за останній рік, де $1 \leq \tau \leq n-1$; $\varphi_2(\tau)$ – мінімальні витрати за останні два роки, де $1 \leq \tau \leq n-2$; і так далі до $\varphi_n(0)$ – шукані мінімальні витрати за всі n років (на самому початку обладнання нове). На кожному етапі треба розглядати дві альтернативи – зберегти старе обладнання або замінити його.

Нехай $k = 1$. Якщо обладнання віку τ зберегти, річні експлуатаційні витрати будуть дорівнювати $u(\tau+1)$. Устаткування після цього зноситься на рік і його ліквідна вартість буде дорівнювати $s(\tau+1)$. Останній рік роботи дещо відрізняється від інших, оскільки за умовами задачі після $n=5$ років обладнання продається за залишковою вартістю незалежно від його віку, тому при збереженні обладнання в останній рік роботи загальні витрати складуть $u(\tau+1) - s(\tau+1)$. Якщо ж в останній рік обладнання замінити, загальні витрати будуть дорівнювати $p - s(\tau) + u(1) - s(1)$ – вартість нового обладнання за вирахуванням ліквідної вартості старого, плюс експлуатаційні витрати за 1 рік роботи нового обладнання, нарешті, повернення грошей від продажу щойно придбаного устаткування. Остаточно отримуємо:

$$\varphi_1(\tau) = \min \begin{cases} u(\tau+1) - s(\tau+1) & \text{– зберегти,} \\ p - s(\tau) + u(1) - s(1) & \text{– замінити.} \end{cases}$$

Усі обчислення зведені в табл. 16.2, де для кожного значення віку обладнання τ обчислені ліквідна вартість обладнання $s(\tau)$, експлуатаційні витрати за попередній рік роботи $u(\tau)$, загальні витрати, якщо це обладнання зберегти, загальні витрати, якщо обладнання замінити, і мінімальні витрати в цих двох альтернативних варіантах.

Таблиця 16.2

Обчислення

τ	$s(\tau)$	$u(\tau)$	$u(\tau+1) - s(\tau+1)$	$(1 + u(1) - s(1)) - s(\tau)$	$\varphi_1(\tau)$
1	0,500	0,15	0,30–0,250=0,050	0,65–0,500=0,150	0,050 (зберегти)
2	0,250	0,30	0,45–0,125=0,325	0,65–0,250=0,400	0,325 (зберегти)
3	0,125	0,45	0,60–0,062=0,538	0,65–0,125=0,525	0,525 (замінити)

4	0,062	0,60	0,75–0,031=0,719	0,65–0,062=0,588	0,588 (замінити)
5	0,031	0,75			

До останнього 5-го року роботи вік обладнання може бути будь-яким – від 1-го до 4-х років. У табл. 16.2 є 5-ий напівпорожній рядок для обчислення $u(\tau+1)$ і $s(\tau+1)$ при $\tau=4$. Обчислені мінімальні витрати у процесі вибору найкращого варіанта заміни обладнання, звідки випливає, що навіть на початку останнього року роботи обладнання доцільно замінити, якщо його вік більше 2-х років.

Нехай тепер $k=2$, тобто розглядаються останні два роки роботи. Цей етап найважливіший для розуміння, інші етапи будуть однотипними. Отже, зазвичай, на початку цього періоду обладнання можна зберегти або замінити. Якщо обладнання віку τ зберегти, то експлуатаційні витрати в 1-й рік роботи будуть дорівнювати $u(\tau+1)$, далі обладнання постарішає на рік і подальші витрати в останній рік (при оптимальній політиці заміни зношеного обладнання) складуть $\varphi_1(\tau+1)$. Якщо ж обладнання на початку періоду замінити, то загальні витрати будуть дорівнювати $p - s(\tau) + u(1) + \varphi_1(1)$ – вартість нового обладнання за вирахуванням ліквідної вартості старого плюс експлуатаційні витрати за 1 рік роботи нового обладнання, нарешті, мінімальні витрати за наступний рік. Остаточного отримуємо:

$$\varphi_2(\tau) = \min \begin{cases} u(\tau+1) + \varphi_1(\tau+1) & \text{– зберегти,} \\ p - s(\tau) + u(1) + \varphi_1(1) & \text{– замінити.} \end{cases}$$

З точністю до множника p ці обчислення зведені в табл. 16.3.

Таблиця 16.3.

Обчислення

τ	$s(\tau)$	$u(\tau)$	$u(\tau+1) - \varphi_1(\tau+1)$	$(1 + u(1) + \varphi_1(1)) - s(\tau)$	$\varphi_2(\tau)$
1	0,500	0,15	0,30+0,325=0,625	1,20–0,500=0,700	0,625 (зберегти)
2	0,250	0,30	0,45+0,525=0,975	1,20–0,250=0,950	0,950 (замінити)
3	0,125	0,45	0,60+0,588=1,188	1,20–0,125=1,075	1,075 (замінити)
4	0,062	0,60			

Аналогічно при $k=3$ отримуємо рекурентне співвідношення:

$$\varphi_3(\tau) = \min \begin{cases} u(\tau+1) + \varphi_2(\tau+1) & - \text{зберегти,} \\ p - s(\tau) + u(1) + \varphi_2(1) & - \text{замінити.} \end{cases}$$

У табл. 16.4 обчислені значення цих витрат (без множника p).

Таблиця 16.4

Обчислення витрат без множника

τ	$s(\tau)$	$u(\tau)$	$u(\tau+1) - \varphi_2(\tau+1)$	$(1 + u(1) + \varphi_2(1)) - s(\tau)$	$\varphi_3(\tau)$
1	0,500	0,15	0,30+0,950=1,250	1,775-0,500=1,275	1,250 (зберегти)
2	0,250	0,30	0,45+1,075=1,525	1,775-0,250=1,525	1,525 (зберег/замін)
3	0,125	0,45			

При $k = 4$ маємо рекурентне співвідношення:

$$\varphi_4(\tau) = \min \begin{cases} u(\tau+1) + \varphi_3(\tau+1) & - \text{зберегти,} \\ p - s(\tau) + u(1) + \varphi_3(1) & - \text{замінити,} \end{cases}$$

Обчислюємо $\varphi_4(\tau)$ – мінімальні витрати за чотири останні роки роботи (табл. 16.5)

Таблиця 16.5

Витрати

τ	$s(\tau)$	$u(\tau)$	$u(\tau+1) + \varphi_3(\tau+1)$	$(1 + u(1) + \varphi_3(1)) - s(\tau)$	$\varphi_4(\tau)$
1	0,500	0,15	0,30+1,525=1,825	2,400-0,500=1,900	1,825 (зберегти)
2	0,250	0,30			

Обчислюємо мінімальні витрати за 5 років роботи – це тільки один варіант:

$$\varphi_5(0) = p \cdot (1 + u(1) + \varphi_4(1)) = (1 + 0,15 + 1,825)p = 2,975p.$$

Устаткування слід замінювати після кожних двох років роботи.

Мінімальні витрати на експлуатацію і заміну обладнання дорівнюють $\varphi_5(0) = 2,975p$.

Алгоритми прямої і зворотної прогонки настільки відрізняються один від одного, що свідчить, що методика динамічного програмування ще далека від формального завершення, в ній багато що залежить від мистецтва, від уміння побачити найпростіший шлях вирішення.

Запитання для самоперевірки

1. Які загальні теоретичні викладки методів динамічного програмування?
2. Наведіть етапи реалізації методів динамічного програмування.
3. Наведіть сутність етапів розв'язання задачі про заміну обладнання.

4. У чому ідея алгоритму прямої прогонки?
5. У чому ідея алгоритму зворотної прогонки?