МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Кафедра вищої математики та
економіко-математичних методів

Матеріали лекцій
з навчальної дисципліни «ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

Харків, 2017 р.

Зміст

Зміст 2

Лекція 1. Елементи лінійної алгебри. 4

1.1. Матриці, основні означення. 4

1.2. Дії над матрицями 5

1.3. Ранг матриці 7

1.4. Визначники другого порядку. 8

1.5. Визначники n -го порядку 9

1.6. Властивості визначників та методи їх обчислювання 10

1.7. Дослідження систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі 15

1.8. Загальний та частинні розв'язки системи. Базисні та опорні розв'язки 16

1.9. Розв'язання системи методом Гаусса та Жордана – Гаусса 16

1.10. Розв'язання ситеми методом Крамера 20

Лекція 2. Елементи математичного аналізу. 22

2.1. Функція. Способи завдання функції 22

2.2. Класифікація функцій за їх властивостями. 23

2.3. Основні елементарні функції 26

2.4. Границя функції. Геометричний зміст. Односторонні границі функції 27

2.5. Розкриття невизначеностей 32

2.6. Неперервність функції в точці. 34

2.7. Похідна функції 38

2.8. Таблиця похідних та правила обчислювання 40

2.9. Похідна складеної функції 43

2.10. Похідна вищих порядків 45

Лекція 3. Диференційованість функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференційні рівняння. 46

3.1. Основні поняття. Область визначення функції. 46

3.2. Частинні похідні 48

3.3. Похідна за напрямом. 51

3.4. Градієнт функції та лінії рівня 52

3.5. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. 54

3.6. Властивості невизначеного інтеграла 56

3.7. Таблиця основних інтегралів 58

3.8. Безпосереднє інтегрування 59
3.9. Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі 61
3.10. Метод інтегрування частинами 64
3.11. Диференціальні рівняння першого порядку 67
3.12. Рівняння з відокремлюваними змінними 68
3.13. Однорідні диференціальні рівняння 69
3.14. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. 71
Лекція 4. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. 74
4.1. Ймовірність події та її обчислення 74
4.2. Формула Бернуллі 81
4.3. Закон розподілу дискретної випадкової величини 82
4.4. Числові характеристики дискретної випадкової величини 83
4.5. Неперервні випадкові величини 86
4.6. Елементи математичної статистики 89
Лекція 5. Елементи математичного програмування. 93
5.1. Графічний метод розв’язання задачі лінійного програмування 93
5.2. Симплексний метод розв’язання задачі лінійного програмування 98
5.3. Транспортна задача 103

Лекція 1. Елементи лінійної алгебри.

1.1. Матриці, основні означення.

Прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців, називається **матрицею**, а самі числа – її елементами. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту A, B, C ... , а їх елементи – a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ... , де і номер рядка матриці $(i=\overline{1,m})$, j – номер стовпця матриці $(j=\overline{1,n})$. Наприклад, $A=(a_{ij})$, $\underset{[m\times n]}{A} = [a_{ij}]$, $\underset{[m\times n]}{A} = \left\| a_{ij} \right\|$,

$$\underset{[m\times n]}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці число стовпців і число рядків однакове і дорівнює n, матриця називається **квадратною матрицею** n-го порядку. Матрицю, яка має один рядок (стовпець), називають матрицею-рядком (матрицею стовпцем). Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають **нульовою**: $A+0=A$.

Множина елементів квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ називається головною **діагоналлю матриці**, а множина елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots a_{(n-1)2}, a_{n1}$ **– побічною діагоналлю**.

Квадратна матриця називається **діагональною матрицею**, якщо всіa її елементи, які знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця – це діагональна матриця з елементами, які дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}$$

Розглянемо матрицю $\underset{[m\times n]}{A} = (a_{ij})$. Якщо в цій матриці переставити місцями відповідні рядки і стовпці, то отримаємо транспоновану матрицю A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

1.2. Дії над матрицями

Матриця $A=(a_{ij})$ називається **нульовою**, якщо всі її елементи дорівнють нулю. Дві матриці *A* і *B* називаються **рівними**, якщо вони обидві одного розміру та $a_{ij}=b_{ij}$ відповідно. Визначені такі дії над матрицями:

1. Сума матриць однакового розміру $A+B=C$, де елементи матриці $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.
2. Добуток матриці на скалярний множник $k\cdot A=B$,де $B=\lfloor ka_{ij} \rfloor$.
3. Добуток матриць $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ згідно з правилом «Рядок на стовпець», тобто

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\square+a_{ip}b_{pj}.$$

При цьому необхідно, щоб число стовпців першої матриці дорівнювало числу рядків другої.

Операції з матрицями мають такі властивості,як і операції над числами

1) $A+B=B+A$	5) $(A+B)C=AC+BC$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$	6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$	7) $(AB)C=A(BC)$
4) $A(B+C)=AB+AC$	8) $AE=EA=A$

Слід зазначити, що операція добутку матриць має свої властивості. Так у загальному випадку $AB \neq BA$ (з означення добутку). Якщо така рівність виконується, то матриці називають комутативними.

Приклад. У звіті (табл. 1.2) приведені дані про виробництво трьох видів продукції чотирма підприємствами за два роки.

Таблиця 1.2

Продукція	2008р.				2009р.			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	35	20	27	15	40	35	38	27
2	100	112	135	148	150	170	145	160
3	125	180	110	95	135	175	115	105

Знайти сумарне виробництво за два роки кожного виду продукції по кожному підприємству.

Розв'язок. Приведену таблицю запишемо як матриці розміру (3×4.)

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 20 & 27 & 15 \\ 100 & 112 & 135 & 148 \\ 125 & 180 & 110 & 95 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 40 & 35 & 38 & 27 \\ 150 & 170 & 145 & 160 \\ 135 & 175 & 115 & 105 \end{pmatrix}.$$

Дані матриці – це матриці одного розміру. Їх можна додати

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 75 & 55 & 65 & 42 \\ 250 & 282 & 280 & 380 \\ 260 & 355 & 225 & 200 \end{pmatrix}.$$

Матриця C характеризує сумарне виробництво за два роки кожного виду продукції по кожному підприємству.

За даними задачі визначити зміну обсягу виробництва продукції по кожному підприємству за рік. Для цього треба знайти різницю матриць D

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 11 & 12 \\ 50 & 58 & 10 & 12 \\ 10 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Виробництво продукції у порівнянні з попереднім роком в основному збільшилось.

Приклад. Знайти добуток двох матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\2&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&4\\9&14&6\end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}8&=1\cdot1+2\cdot1+1\cdot3\\5&=1\cdot4+2\cdot0+1\cdot1.\\4&=1\cdot2+2\cdot1+1\cdot0\end{aligned}$$

Добуток матриць $B\cdot A$ не існує (число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A).

1.3. Ранг матриці

Розглянемо матрицю $\underset{[m\times n]}{A}=[a_{ij}]$. Мінором k-го порядку матриці A називають визначник матриці, усі елементи якого знаходяться на перетині вибраних k рядків і k стовпців матриці A, і позначається M_k. Порядок мінору матриці не може бути більшим, ніж найменше з чисел m, n, тобто $k\le\min(m,n)$.

Ранг матриці A – це число r яке дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля її мінору: $0\le r\le\min(m,n)$. Для знаходження рангу матриці використовують еквівалентні перетворення матриць. Можна довести, що ранги еквівалентних матриць однакові.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&4&-1\\3&12&-3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо мінор 3-го порядку

$$M_3=\begin{vmatrix}2&0&3\\1&4&-1\\3&12&-3\end{vmatrix}=0.$$

Але маємо мінор другого порядку, який відмінний від нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Таким чином, ранг матриці дорівнює 2.

Для обчислення рангу матриці важливе значення мають елементерні перетворювання матриці, при яких її ранг не змінюється. Елементарними перетворюваннями матриці називають:

а) множення всіх елементів рядка на одне і те саме число, відмінне від нуля;

б) додавання до елементів ряда матриці відповідних елементів іншого ряда, помножених на одне і те саме число;

в) переміщення місцями рядів в матриці;

г) викреслення рядів матриці, всі елементи яких дорівнюють нулю.

Матриці, що одержуються елементарними перетворюваннями, називаються еквівалентними .

Приклад: Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 22 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 22 \neq 0,$$

тобто ранг матриці дорівнює 2.

1.4. Визначники другого порядку.

Розглянемо найпростішу систему рівнянь, що складається з двох лінійних рівнянь з двома невідомими, тобто систему другого порядку. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

методом послідовного виключення невідомих. З цією метою виключемо з початку невідоме x_2. Для цього знайдемо добуток першого рівняння на a_{22}, а другого – на $-a_{12}$. Після додавання першого та другого рівнянь змінна

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Виключивши аналогічно змінну x_1, будемо мати

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

якщо $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Число

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}$$

– це визначник другого порядку таблиці (матриці) чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Введемо ще такі визначники

$$\Delta_{x_1} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Числа $a_{11,} a_{12,} a_{21,} a_{22,}$ -елементи визначника. Таким чином, розв'язок систем двох лінійних рівнянь можна записати так:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Визначник, що утворює знаменник дробу, називається визначником системи, а визначники, що є чисельниками дробів, утворені із визначника системи зміною коефіцієнтів при невідомих відповідно на вільні члени цієї системи. Останні формули називаються формулами Крамера, або правилом Крамера для розв'язання двох рівнянь з двома змінними.

1.5. Визначники n -го порядку

Визначником n-го порядку для квадратичної матриці A є число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

де a_{ij}- елементи визначника; A_{ij}алгебричні доповнення відповідних елементів, які визначаються так. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} - це мінорa_{ij}- го елементу визначника, який є визначником n-1 порядку, здобутий з даного визначника викреслюванням йогоі-того рядка та j -го стовпця.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 19.$$

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = .$$

$$= -5 - 100 + 40 = -65.$$

Визначник n-го порядку можна розвинути за будь-яким рядком, або за будь-яким стовпцем. Обчислювання визначників за цим способом пов’язано з великим обсягом арифметичних дій. Обчислення буде значно легшим, якщо застосувати методи, пов’язані з властивостями визначників.

1.6. Властивості визначників та методи їх обчислювання

1.Властивості рівноправності рядків та стовпців. Якщо замінити рядки визначника відповідними стовпцями, величина визначника не зміниться, тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

Справедливість цієї властивості легко перевірити, обчислюючи обидва визначники за правилом трикутника.

2.Властивість антисиметрії при перестановці двох рядків (двох стовпців). При перестановці двох рядків (стовпців) визначник зберігає свою абсолютну величину, але змінює знак на протилежний, тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Цю властивість можна перевірити безпосереднім обчислюванням. Отже, визначник з двома однаковими стовпцями (рядками) дорівнює нулю. Дійсно, з одного боку, при перестановці однакових стовпців визначник не змінюється, а за другою властивістю він змінює знак, тобто $\Delta=\Delta, \Delta=-\Delta$, звідки $\Delta=0$.

Для встановлення інших властивостей визначників введемо поняття мінору a_{ij} елемента визначника.

Мінор M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку є визначник другого порядку, одержаний із даного викреслюванням і-го рядка та j-го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij}-елемента a_{ij} визначника є: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Розвиваючи визначник третього порядку за елементами першого рядка, будемо мати:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Аналогічна формула має місце по відношенню до будь-якого рядка (стовпця). Таким чином, визначник можна подати у вигляді

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3};\ i=1,2,3,$$

або

$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j};\ j=1,2,3.$$

Зазначимо, якщо у визначнику замінити елементи першого рядка на відповідні елементи другого рядка , то при цьому $A_{11,}A_{12,}A_{13}$ не зміняться, тому що вони не містять елементів першого рядка. Отже, якщо у визначнику замість першого рядка поставити другий, $a_{1j} = a_{2j}$, Отже перший та другий рядки визначника однакові. Цей визначник дорівнює нулю. Таким чином,

$$\begin{gathered}
a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0 \\
a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} = 0 \\
i,\ j, k = 1, 2, 3;\ i \neq j;\ \ j \neq k
\end{gathered}.$$

На основі зазначених формул можна довести такі властивості визначника:

3.Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебричні доповнення цих елементів дорівнює величині визначника, а сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебричні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю.

4. Якщо елементи будь-якого ряду мають загальний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Визначник дорівнює нулю, якщо він має рядок(стовпець) з усіма рівними нулю елементами.

Четверта та п’ята властивості виходять із третьої.

6. Якщо елементи будь-якого ряду є сума двох доданків, то визначник можна подати у вигляді додатку двох визначників, у яких елементи даного ряду дорівнюють відповідним доданкам.

Цю властивість легко довести, якщо використати третю властивість. Нехай

$a_{11} = c_1 + b_1;\ a_{12} = c_2 + b_2;\ a_{13} = c_3 + b_3$,

тоді

$$\begin{aligned}
\Delta &= (c_1 + b_1)\cdot A_{11} + (c_2 + b_2)\cdot A_{12} + (c_3 + b_3)\cdot A_{13} = \\
&= \left(c_1 \cdot A_{11} + c_2 \cdot A_{12} + c_3 \cdot A_{13}\right) + \left(b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{12} + b_3 \cdot A_{13}\right) = \\
&= \Delta_1 + \Delta_2
\end{aligned}.$$

7. Визначник за своєю величиною не зміниться, якщо до елементів будь-якого ряду додати елементи паралельного ряду, які помножені на одне і те саме число λ. Замінимо, наприклад, елементи першого рядка елементами $a_{11} + \lambda a_{21}, a_{12} + \lambda a_{22}, a_{13} + \lambda a_{23}$. Тоді відповідно до шостої властивості одержаний визначник дорівнює сумі двох визначників, перший з них – початковий, а у другого перший рядок буде $\lambda a_{21}, \lambda a_{22}, \lambda a_{23}$. Якщо внести λ за знак визначника, одержимо визначник з однаковими рядками, який дорівнює нулю (друга властивість).

Зауважимо, що усі властивості визначників, що наведені для визначника третього порядку,залишаються вірними для визначників будь-якого порядку.

Таким чином,якщо мати на увазі означення визначника та його властивості, можна вказати три основних засоба обчислення визначників будь-якого порядку,а саме:

1.Розвинення за елементами будь-якого ряду(за означенням)

2.Зниження порядку(на основі сьомої властивості визначник перетворюється так,що елементами будь-якого ряду є тільки одна одиниця,а остані елементи дорівнюють нулю)

3.Приведення визначника до трикутного вигляду(на основі сьомої властивості)

Приклад . Обчислити визначник.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

.

При цьому третій рядок визначника помножено на (-3) та додано до другого рядка, далі третій рядок помножено на (-4) та додано до першого рядка. .

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

З цією метою використаємо третю та сьому властивості. Перший рядок залишимо без зміни, а до другого треба додати перший, який помножимо на (-2). Четвертий рядок треба додати до першого, який помножимо на 2, будемо мати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -14 & 0 & -5 & -7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & -5 & -19 \end{vmatrix}$$

.

Розвинемо визначник за другим стовпцем, маємо:

$$\Delta = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -14 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Аналогічно понижуємо порядок здобутого визначника. Другий рядок залишимо без зміни; перший додамо до другого, помноженого на (-7); третій додамо до другого, помноженого на 19. Будемо мати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -14 & -9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = -60$$

.

За допомогою аналогічних перетворень визначникn го порядку можна привести до трикутного вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У здобутому визначникові усі елементи , що стоять під головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а його величина дорівнює добутку елементів, що стоять на головній діагоналі.

1.7. Дослідження систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$$ – матриця системи,

$$\mathbf{X} = \left[x_j\right] \ \left(j = \overline{1,n}\right)\ ; \quad \mathbf{B} = \left[b_i\right] \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

стовпці невідомих та вільних членів відповідно. Зазначимо, що систему рівнянь можна записати у матричному вигляді: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Матрицю $\mathbf{A}$, доповнену вільним стовпцем $\mathbf{B}$, будемо називати розширеною матрицею системи. Набір чисел x_j – є розв’язок системи, якщо при підстановці його у систему будемо одержувати тотожності.

Система рівнянь, що має хоча б один розв’язок, називається сумісною, у протилежному випадку система несумісна. Якщо система має тільки один розв’язок, вона – означена, а якщо система має безліч розв’язків, то – неозначена. Дослідити систему – це розв’язати питання про її сумісність та означеність.

Для дослідження системи використовується **теорема Кронекера-Капеллі**: система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, якщо ранг матриці системи r_A дорівнює рангу розширеної матриці системи r_{AB}.

При цьому, якщо :

$r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} = n -$ система має тільки один розв’язок,

$r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} < n -$ система має безліч розв’язків,

$r_{\mathbf{A}} \neq r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} -$ система несумісна.

(без доведення)

1.8. Загальний та частинні розв’язки системи. Базисні та опорні розв’язки

Особливо важливим випадком при дослідженні системи є випадок, коли $r = r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} < n$, тобто система має безліч розв’язків. Нехай коефіцієнти матриці при перших *r* невідомих утворюють відмінний від нуля визначник. Ці невідомі залишаємо ліворуч, а невідомі $x_j\left(j=\overline{r+1,n}\right)$ перенесемо праворуч. Тоді невідомі $x_j\left(j=\overline{1,r}\right)$ будемо називати базисними, інші невідомі – вільними. Базисні невідомі будь-яким методом знайдемо через вільні. Тоді

$$\begin{cases} x_1 = f_1\left(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\right) \\ x_2 = f_2\left(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n\left(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\right). \end{cases}$$

Одержані формули називають загальним розв’язком системи. Надаючи вільним невідомим довільні значення, будемо одержувати частинні розв’язки системи. Частинні розв’язки при нульових значеннях вільних невідомих – це базисні розв’язки. Якщо у базисних розв’язках усі змінні набувають невід’ємних значень, то такі розв’язки називають опорними.

1.9. Розв'язання системи методом Гаусса та Жордана – Гаусса

Серед відомих методів розв’язку систем лінійних рівнянь слід відзначити метод виключення Гаусса та його модифікації, зокрема метод повного виключення Жордана – Гаусса.

Суть методу Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворювань (перестановка рівнянь, множення рівняння на число, що $\neq 0$, додавання рівнянь системи) від початкової системи переходимо до системи з трикутною або трапецієвидною матрицею.

Нехай у системі рівнянь $a_{11} \neq 0$. Поділимо обидві частини першого рівняння на a_{11}. Далі домножимо перше рівняння послідовно на $-a_{i1}\left(i = \overline{2, n}\right)$ та додамо до усіх наступних рівнянь. Одержимо систему, еквівалентну початковій.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad a'_{r2}x_2 + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases}.$$

За допомогою аналогічних операцій зведемо систему до трикутного або трапецієвидного виду. Якщо внаслідок перетворень система рівнянь має трикутну матрицю, то вона має єдиний розв'язок. У випадку трапецієвидної матриці – система сумісна, але неозначена (рівняння виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ відкинемо). Якщо при виключенні невідомих одержано суперечне рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n \neq 0$, система несумісна. Слід відзначити, що дослідження системи проводиться паралельно з виключенням невідомих.

Приклад. Провести дослідження та знайти розв'язок у випадку сумісності системи рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ \qquad x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 \qquad - x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Запишемо розширену матрицю системи та приведемо її до трикутного або трапецієвидного вигляду:

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, $r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} = 2$. Система рівнянь сумісна та має безлічрозв'язків. У цьому випадку розв'язати систему – це знайти її загальний розв'язок. Внаслідок перетворень одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + x_3 + 0.5x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Нехай базисними невідомими будуть x_1, x_2. Невідомі x_3, x_4 – вільні. Знайдемо x_2 з другого рівняння:

$$x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4.$$

Підставляючи x_2 у перше рівняння системи, визначимо

$$x_1 - 5 - x_3 - 0.5x_4 - 0.5\left(3 - 3x_3 - 2x_4\right) = 3.5 + 0.5x_3 + 0.5x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи буде

$$\begin{cases} x_1 = 3.5 + 0.5x_3 + 0.5x_4 \\ x_2 = \ 3 - 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

Якщо вільні невідомі припустити рівними нулю $\left(x_3 = x_4 = 0\right)$, знайдемо $x_1 = 3.5;\ x_2 = 3$, тобто $x = \left(.35;\ 3;\ 0;\ 0\right)$ – базисний розв'язок. Цей базисний розв'язок буде опорним, тому що всі змінні у ньому невід'ємні.

Необхідно зауважити, що елементарні перетворення системи зручно проводити у таблиці (схема Гаусса) з контролюванням обчислень. Введемо у перетворення ще один стовбець з контрольними сумами. Елементами стовпця є суми елементів відповідних рядків. Над контрольними сумами у кожному рядку виконуються ті ж операції, що над усіма іншими елементами цього рядка. При відсутності помилок при обчислюванні елементи стовпця $\sum$ дорівнюють сумам елементів відповідних перетворених рядків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Гуасса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

Приводимо матрицю системи до трикутного вигляду. Обчислення будемо виконувати у табл. 1.3.

Таблиця 1.3.

N п/п	x_1 x_2 x_3	Вільні члени	$\sum$	Примітки
I II III	4 3 2 3 2 1 1 1 2	33 23 12	42 29 16	
IV V VI	1 1 2 0 –1 –5 0 –1 –6	12 –13 –15	16 –19 –22	III IV $\cdot(-3)+II$ IV $\cdot(-4)+I$
VII VIII IX	1 1 2 0 1 5 0 0 −1	12 13 −2	16 19 −3	IV V$\cdot(-1)+VI$
X XI XII	1 1 2 0 1 5 0 0 1	12 13 2	16 19 3	VII VII IX$\cdot(-1)$

Таким чином, внаслідок перетворень одержали трикутну матрицю системи.

Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ \quad x_2 + 5x_3 = 13. \\ \qquad x_3 = 2 \end{cases}$$

Виконуємо обернений хід методу Гаусса. З останнього рівняння визначимо $x_3 = 2$, з другого $x_2 = 13 - 5x_3 = 3$, з першого $x_1 = 12 - x_{21} - 2x_3 = 5$. Відповідь $x_1 = 5; x_2 = 3; x_3 = 2$. При розв’язанні системи рівнянь методом Гаусса потрібно виконати виключення невідомих (прямий хід) та з одержаної системи знайти ці невідомі (обернений хід).

Виконання «оберненого ходу» фактично еквівалентно зведенню матриці системи до одиничної. У цьому полягає суть методу повного виключення, або методу Жордана – Гаусса.

В наслідок елементарних перетворень система рівнянь зведена до еквівалентної:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 5 \\ \quad x_2 \qquad = 3 \\ \qquad\quad x_2 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, змінні дорівнюють відповідно вільним членам. Якщо в процесі перетворень матриця системи буде приведена до трапецієвидної форми, то невідомі, коефіцієнти при яких утворюють одиничну матрицю, слід вважати базисними, усі інші невідомі будуть вільними і значення базисних змінних через вільні визначаються без додаткових обчислювань. Продовжуючи перетворення матриці системи попереднього прикладу, одержимо у цій матриці одиничну:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 & -0.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Система рівняннь приведена до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - 0.5x_3 - 0.5x_4 = 3.5 \\ x_2 + 3x_3 \; + 2x_4 \;\; = 3 \end{cases}.$$

Нехай $x_1, x_2 -$ базисні змінні, $x_3, x_4 -$ вільні. Тоді загальним розв'язком системи рівнянь є:

$$\begin{cases} x_1 = 3.5 + 0.5x_3 + 0.5x_4 \\ x_2 = \;\; 3 \; - 0.5x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

1.10. Розв'язання ситеми методом Крамера

1. Обчислимо визначник матриці системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, що може бути обчисленим за формулами Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\dots,\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, де визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ є отриманими із визначника системи Δ шляхом заміни першого, другого, n-го стовпця стовпцем вільних елементів.

3. Якщо $\Delta = 0$ та хоча б один із визначників $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ не дорівнює нулю, то вищеозначена система не має розв'язків .

4. Якщо $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему за методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Проведемо обчислення за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 19 \neq 0,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 11 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 38,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 2 & 11 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 57,\qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 11 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 19.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{57}{19} = 3,\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1.$$

Лекція 2. Елементи математичного аналізу.

2.1. Функція. Способи завдання функції

Поняття функції є з одним з основних понять математичного аналізу.

Означення. Якщо кожному значенню змінної x множині $X\left(x\in X\right)$ за деяким правилом або законом f ставиться у відповідність одне значення змінної y з множини $Y\left(y\in Y\right)$, то говорять, що на множині X задано функцію $y=f\left(x\right)$.

Змінну x називають аргументом, або незалежною змінною, а залежну змінну $y-$функцією, множину X називають областю визначення, а множину $Y-$ областю значень функції.

Правило відповідності між значеннями змінних x і y є спосіб завдання функції. Існує три основних способи завдання функції:

1. Аналітичний спосіб. Якщо функція задається у вигляді аналітичного виразу (формули), де зазначено які дії і в якому порядку слід виконати над значенням x, щоб дістати відповідні значення функції. При цьому вказується, для яких значень аргументу ця функція розглядається. Якщо множина X не задається, то маються на увазі всі значення аргументу x, за яких функція кінцева та дійсна.

Приклади. Знайти область визначення функцій

1. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $X=\left(-\infty;+\infty\right)$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; $X=\left(-\infty;-1\right),\left(-1;1\right),\left(1;+\infty\right)$.

3. $y=\arcsin x$; $X=\left[-1;1\right]$.

4. $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}$; $X=\left[1;5\right]$.

2. Табличний спосіб – це спосіб зображення функції таблицею, яка складається з ряду значень незалежної змінної x та відповідних значень

змінної y. Такий спосіб завдання часто встановлюється експериментально або шляхом спостережень.

3. Графічний спосіб. При дослідженнях, пов'язаних з використанням самописних приладів, відповідність між незалежною зміною x та функцією y встановлюється за допомогою деякої лінії, яку побудовано у вибраній системі координат. Абсциса кожної точки лінії зображує деяке значення x, а ордината – відповідне значення y. Множину всіх точок координатної площини (x, y), координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$, називають графіком функції.

Розроблені в математичному аналізі методи дослідження функції найкраще пристосовані до аналітичного способу завдання функції.

2.2. Класифікація функцій за їх властивостями.

Монотонні функції. Функція $f(x)$ є зростаючою на деякій множині X, якщо із нерівності $x_1 < x_2$ маємо нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція – спадаюча, якщо при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Зростаючі та спадаючі функції на множині X називаються монотонними.

Приклад. Функція $y = x^3$ визначена на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, зростає на цьому інтервалі.

Приклад. $y = \ln(-x)$, область визначення: $(-\infty; 0)$.
Функція спадає на цьому інтервалі.

Функція називається кусочно-монотонною на множині X, якщо цю множину можливо розбити на такі множини, на яких ця функція буде монотонною. Наприклад, функція $y = x^2 - x - 6$ є кусочно-монотонна, тому що вона на інтервалі $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ – спадає, а на інтервалі $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ – зростає.

Обмежені та необмежені функції. Функція $y = f(x)$ – обмежена на множині X, якщо є такі числа m і M, що $m \le f(x) \le M$, якщо таких чисел немає, то функція називається необмеженою. Нехай число C

найбільше з чисел m і M , тоді для обмеження функції має виконуватись умова $\left|f\left(x\right)\right| \le C.$

Приклад. Функція $y = \arcsin x$,обмежена на проміжку $\left[-1;1\right]$.

Приклад. Функція $y = \operatorname{tg} x$, обмежена на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ і не обмежена на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.

Парні та непарні функції. Множина X зветься симетричною відносно початку координат, якщо їй належать як значення x, так і значення $-x$. Функція називається парною, якщо виконується рівність:

$$f\left(x\right) = f\left(-x\right), \quad x \in X ,$$

а якщо

$$f\left(-x\right) = -f\left(x\right), \ x \in X ,$$

то функція називається непарною.

Приклади. Дослідити функції на парність та непарність.

1. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ – парна, $f\left(x\right) = f\left(-x\right)$,

2. $y = \dfrac{1}{x^3}$ – непарна, $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$,

3. $y = x^2 - x - 6$, не є парною і не є непарною.

4. $y = \sqrt{x}$ не є парною і не є непарною, тому що значення $-x$ не належать області визначення функції.

Зауважимо, що графік непарної функції – це крива, що симетрична відносно початку координат, а парної функції – відносно осі координат.

Періодична функція. Функція $y = f\left(x\right)$ називається періодичною на множині X , якщо існує таке число $l > 0,$ що для будь-якої точки x, що належить області визначення виконується умова:

$$f\left(x \pm l\right) = f\left(x\right).$$

Число l є період функції $f\left(x\right)$. Отже, маємо також рівність

$$f(x+kl)=f(x),\quad k\in Z\ ,$$

При цьому числа kl теж можна вважати періодами функції, але, говорячи про період функції, маємо на увазі її найменший період. Наприклад. $y=\sin x$ має періодом $l=2\pi$, $y=\operatorname{tg}x$ має періодом $l=\pi$.

Зауважимо, що при побудові графіка періодичної функції достатньо побудувати його у будь-якому сегменті $\left[x_0;x_0+l\right]$, а далі продовжити його на всю числову вісь.

Обернена функція. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $X=\{x\}$, а областю її значень є множина $Y=\{y\}$.

Якщо кожному значенню змінної $y\in Y$ відповідає одне значення змінної $x\in X$, то на множині Y можливо визначити функцію

$$x=\varphi(y).$$

Множини X та Y є будь-які проміжки, або інші числові множини. Якщо $x\in[a;b],\ y\in[c;d]$, то $x=\varphi(y)-$ функція обернена по відношенню до функції $y=f(x)$, яка задовольняє умови на всій множині $Y: y=f(\varphi(y))$. При цьому функції $x=\varphi(y)-$ та $y=f(x)$ – взаємообернені.

Теорема. Якщо функція $y=f(x)$ монотонна на множині X, то на відповідній множині Y існує також монотонна обернена функція $x=\varphi(y)$.

Дійсно, якщо функція $y=f(x)$, наприклад, зростає, то кожному y відповідає тільки одне значення x, тобто існує $x=\varphi(y)$. Обернена функція теж зростаюча $(y_2>y_1, x_2>x_1)$. Дійсно , якби $x_2<x_1$, то $f(x_2)<f(x_1)$, що не задовольняє умову зростання функції $y=f(x)$.

Графіки прямої та оберненої функції симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів (Рис. 2.1).

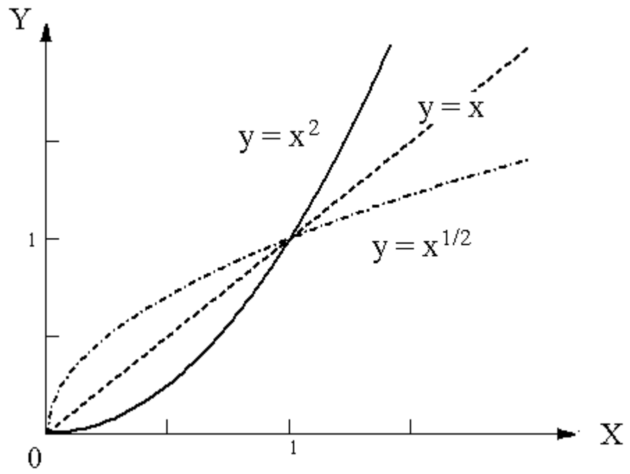

Рис. 2.1.

2.3. Основні елементарні функції

Основними елементарними функціями в математичному аналізі є такі функції:

1. степенева функція $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R,$ а область значень залежить від α.

2. Показникова функція $y = a^x \left(a > 0; a \neq 1\right)$, функція визначена на множині $\left(-\infty; +\infty\right)$, а областю значень є інтервал $\left(0; +\infty\right)$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$, область визначення $\left(0; +\infty\right)$, а область значень $(-\infty; +\infty)$. Функція є оберненою до $y = a^x$.

4. Тригонометричні функції

$$y = \sin x;\ y = \cos x;\ \ x \in R;\ \ |y| \le 1;$$

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\left(k \in Z\right);$$

$$y = \operatorname{ctg} x; \quad x \neq \pi k\left(k \in Z\right).$$

5. Обернені тригонометричні функції

$$y = \arcsin x; \quad x \in \left[-1;1\right]; \qquad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x; \quad x \in \left[-1;1\right]; \quad y \in \left[0; \pi\right];$$

$$y = \operatorname{arctg} x; \quad x \in R; \qquad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arcctg} x; \quad x \in R; \quad y \in (0; \pi).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ визначена на множині X зветься елементарною, якщо вона задається однією формулою, так, що її значення при будь-якому $x \in X$ може бути знайдено за допомогою скінченого числа елементарних дій (додавання, добуток, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій), при цьому кількість операцій не залежить від значення аргументу x. Наприклад, $y = \lg \sin(x+1)$ – це елементарна функція; прикладами неелементарних функцій є

$$y = n!, \text{ або } \quad y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}.$$

У першому випадку число дій над аргументом нескінченне, у другому – функція задається двома формулами.

2.4. Границя функції. Геометричний зміст. Односторонні границі функції

Зафіксуємо певне значення $x = x_0$, в околі якого функція $f(x)$ визначена, в самій точці x_0 функція може і не існувати. Точка $x = x_0$ називаються граничною точкою множини $\tilde{O} = \{x_i\}$, якщо у будь-якому околі точки існують значення $x \in \tilde{O}$ відмінні від x_0.

*Означення.*Функція $y = f(x)$ має границю A при x, що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції збігається до A.

Отже, якщо $\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \to x_0 \quad (x \neq x_0);$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \to A.$$

Границю функції пишуть у такому вигляді: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ або $f(x)=A$ при $x\to x_0$ або $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

В останніх формулах послідовність x_n – нескінченно велика. Якщо $|f(x)|\to\infty$ при $x\to x_0$, то функцію $f(x)$ – називають нескінченно великою при $x\to x_0$.

Якщо $f(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то функцію $f(x)$ називають нескінченно малою при $x\to x_0$.

Наприклад, $y=\dfrac{1}{x}$ є функція нескінченно велика при $x\to \hat{I}$ і нескінченно мала при $x\to\infty$.

Приклад . Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{4x+1}=\dfrac{3}{4}.$

Розглянемо різницю між $f(x)$ і A

$$\frac{3x-1}{4x+1}-\frac{3}{4}=\frac{-7}{4(4x+1)}.$$

В знаменнику величина $4(4x+1)$ – нескінченно велика, а чисельник цього дробу стала величина. Отже, дріб буде нескінченно малою. Таким чином, різниця між $f(x)$ і числом $\dfrac{3}{4}$ – є нескінченно малою, а це означає, що $\lim\limits_{x\to\infty} f(\tilde{o})=\dfrac{3}{4}.$

Приклад . Довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не існує.

Функція визначена для всіх $x\neq 0$. Візьмемо послідовність значень аргументу прямує до нуля;

$\dfrac{1}{\pi},\dfrac{1}{3\pi},\ldots,\dfrac{1}{(2n-1)\pi}\to 0$, а тоді

$\cos\pi,\cos 3\pi,\ldots,\cos(2n-1)\pi\to -1.$

Візьмемо другу послідовність аргументу

$\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{4\pi},\ldots,\dfrac{1}{2n\pi}\to 0.$

Послідовність значень функції

$\cos 2\pi, \cos 4\pi, \ldots, \cos 2n\pi \to 1.$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не існує, тому що для двох різних послідовностей значень x, що збігаються до нуля, одержані різні границі відповідних послідовностей значень функцій.

Наведемо означення границі функції за Коші.

Означення .Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім можливо, самої точки x_0. Число A називають границею функції в точці x_0, тобто $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ виконується для всіх $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x\neq x_0$,

Геометричний зміст границі функції. Якщо число A є границею функції $y=f(x)$ при $x\to x_0$, то який би малий ε-окіл точки A ми не взяли, знайдеться такий $\delta-$окіл точки x_0, що для всіх $x\neq x_0$ відповідні значення функції містяться в смузі $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ шириною 2ε (рис.5.2).

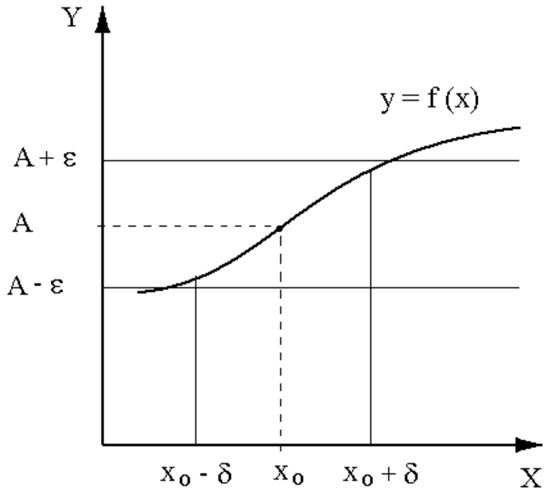

Рис.2.2

Звернемо увагу на поняття односторонніх границь функції.

Згідно з означенням границі функції співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ передбачає, щоб відповідні умови означення виконувались для всіх точок близьких до x_0 як справа так і зліва. Але на практиці існують функції, що поводяться по різному поблизу точки x_0.

Наприклад, $f(x)=\left[\begin{array}{l}0, \quad x<1 \\ x^2, \; x\geq 1.\end{array}\right.$

В зв'язку з цим вводяться поняття правосторонньої та лівосторонньої границі.

*Означення.*Число A називають границею функції $f(x)$ зліва (справа) в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу збіжної до $x_0\left(x_n<x_0\right)\left(x_n>x_0\right)$ відповідна послідовність значень функції збігається до A.

Позначається: ліва границя:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f\left(x_0-0\right),$$

права границя:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f\left(x_0+0\right).$$

Між односторонніми границями та границею функцій в точці x_0 має місце певний зв'язок. Якщо односторонні границі функції існують і рівні , то існує $\lim\limits_{x\to \tilde{o}_0} f(x)$, тобто $f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Для розв'язування прикладів приведемо теорему про знаходження границі суми, добутку та частки.

Теорема. Нехай на множині $\tilde{O}$ з граничною точкою задається функція $f(x)$ та $g(x)$ які в точці x_0 мають скінченні границі

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A; \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=B.$$

Тоді границя суми, добутку, частки цих функцій дорівнюєсумі, добутку, частці границь цих функцій (якщо границя знаменника не дорівнює нулю).

Сформульована теорема в стислому вигляді запишеться так:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B;$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}, B\neq 0.$

Доведемо теорему для першого співвідношення. За визначенням границі функції для будь-якої послідовності значень змінної x, відмінних від x_0, що належать до області $\tilde{O}$,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \to x_0.$$

Відповідні послідовності значень функцій

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \to A;$$

$$g(x_1), g(x_2), g(x_3), \ldots, g(x_n), \ldots \to B.$$

Для функцій натурального аргументу

$$f(x_1)+g(x_1),\ f(x_2)+g(x_2),\ f(x_3)+g(x_3), \ldots, f(x_n)+g(x_n), \ldots \to A+B$$

і теорему доведено.

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Зауважимо, що якщо наведені умови теореми не виконуються, то маємо справу з так званими не визначеннями, границі яких можна знайти відповідними перетвореннями.

Зауважимо, якщо функція визначена в точці x_0, то обчислення границі зведеться до підстановки замість x його граничного значення тобто використовується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)= f(x_0).$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a}\left(x\cdot x \ldots x\right)=\left(\lim_{x\to a} x\right)^n = a^n.$$

В цьому простому прикладі легко використовується теорема про границю добутку.

Приклад. Знайти границю

$\lim\limits_{x\to -3}\left(2x^2-5x+1\right)=\lim\limits_{x\to -3}\left(2x^2\right)-\lim\limits_{x\to 3}\left(5x\right)+\lim\limits_{x\to -3}1=2\cdot(-3)^2-5(-3)+1=34.$ Отже, границя визначення за теоремами та їх наслідками.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x+1}=\dfrac{2}{3}.$

У цьому прикладі також працюють теореми.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}=\dfrac{8}{0}=\infty.$

У точці $x=2$ функція невизначена, знаменник дробу дорівнює нулю і теорема про границю частки не працює. Але із властивостей нескінченно малих ця функція нескінченно велика при $x\to 2.$

Отже, функція наближається до нескінченності.

2.5. Розкриття невизначеностей

При знаходженні границі функцій необхідно мати на увазі теореми, яким задовольняють функції, що мають границю. На практиці досить широко маємо справу з такими функціями, до яких теореми використати неможливо, якщо не перетворити вираз, границю якого треба обчислити. Такі вирази називають невизначеністями. Розглянемо ряд невизначень різного типу.

1. Невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, якщо треба знайти границю відношення двох многочленів, коли аргумент прямує до нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}$$

Для обчислення границі потрібно чисельник та знаменник дробу поділити на найвищу степінь x, а потім обчислити границю.

Приклади. Обчислити границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x-1}{2x^3-x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{2}{x^3}}=\dfrac{5}{2}.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+1}=\sqrt{3}.$

У цьому прикладі перша степінь змінної n є найвища, тому чисельник та знаменник поділили на n і обчислили границю.

2. Невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розглянемо границю частки двох функцій: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, коли $f(x)$ і $\varphi(x)$ прямують до 0 одночасно. Тобто $x=a$ є коренем чисельника та знаменника. У випадку, якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ многочлени, їх можливо за теоремою Безу розкласти на множники, один з яких $x-a$, а потім скоротити дріб на $x-a$.

Приклад. Обчислити границю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+7\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x+7}{x-2}=-11.$$

Щоб виділити в чисельнику і знаменнику множник $x-1$ треба поділили «сходинками» чисельник і знаменник на $x-1$.
Подібним чином, тобто вилученням множника $(x-a)$ розкривають невизначеності $\frac{0}{0}$ і тоді, коли чисельник і знаменник (або) містять кореневі ірраціональності. Найбільше поширена при цьому операція – помноження чисельника і знаменника дробу на вираз, спряжений тому чи іншому (або і тому, і іншому, в залежності від операції), з метою позбутися початкової ірраціональності, щоб одержати множник $(x-a)$.

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{14+x}-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{\left(\sqrt{14+x}-4\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=-\frac{8}{4}=-2.$$

3. Невизначеності типу $[\infty - \infty]$. Невизначеності цього виду за допомогою перетворень потрібно привести до невизначень $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклади. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}.$

б) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)\left(x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}{x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}=\frac{x^2-x^2-2}{x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=\frac{-2}{-\infty}=0.$$

В цьому прикладі, якщо x прямує до $+\infty$ невизначеності не маємо: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\infty+\infty=\infty,$ як сума двох нескінченно великих змінних.

2.6. Неперервність функції в точці.

*Означення.*Нехай функція $y=f(x)$ визначена на деякій множині X, а в точці $x_0\in X$ її значення відповідно $y_0=f(x_0)$. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя цієї функції при $x\to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці. Тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Зауважімо, що при обчисленні границі в точці x_0, функція обов'язково повинна бути в цій точці визначена. Для неперервної функції в точці x_0 необхідно, щоб функція в цій точці існувала. В означенні неперервності функції точка x_0 належить області визначення функції і є внутрішньою точкою, тобто розгладяється двостороння границя функції. При дослідженні неперервності можуть бути випадки, коли функція неперервна у даній точці зліва або справа.

*Означення.*Якщо існує границя

$$f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$$

або

$$f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right),$$

то функцію називають неперервною в точці x_0 справа та зліва відповідно. Якщо ці умови не виконуються, то функція має розрив в точці x_0 справа або зліва.

Отже, якщо функція неперервна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці справа та зліва, тобто

$$f\left(x_0+0\right)=f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0\right)$$

Приклад. Довести, що функція $y=x^3+1$ неперервна в точці $x_0=2$. Знайдемо значення функції в точці $x_0=2$, $f\left(2\right)=9$.

Обчислимо

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3+1\right)=\lim_{x\to 2} x^3+\lim_{x\to 2}1=9.$$

Таким чином, границя функції в точці $x_0=2$, дорівнює значенню функції у цій точці, отже, функція неперервна в точці $x_0=2$.

Приклад. Довести, що функція

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

неперервна в точці $x_0=0$.

За умовою функція $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ (добуток нескінченно малої на обмежену), отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(0)$ і функція в точці x_0 - неперервна.

Приклад. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$$

у точці $x_0=1$ – розривна.

Обчислимо односторонні границі:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2,$$

тобто границя зліва не дорівнює границі справа і в даній точці границі не існує і функція в точці $x_0=1$ – розривна.

Розглянемо ще одне визначення неперервності функції в точці. Введемо такі поняття: приростом аргументу при переході від значення x_0 до x називають різницю $\Delta x=x-x_0$, а відповідну зміну значення функції $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приростом функції в точці x_0.

Нехай функція визначена в точці x_0 і неперервна в ній. Тоді

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

а

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0.$$

Звідси можемо надати таке означення неперервності в точці x_0

Означення. Якщо функція неперервна в точці x_0, то нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Виконується і обернене ствердження, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, то функція неперервна. Дійсно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)=0,$$

або

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right),$$

тобто функція – неперервна. Функція неперервна на множині X, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Приклад. Довести, що функція $y=x^2$ – неперервна на множині $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Для будь-якої точки x, знайдемо

$$\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\left(x+\Delta x\right)^2-x^2=2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2$$

Тоді:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2\right)=0,$$

тобто функція неперервна в довільній точці x.

Приклад. Довести, що функція $y=\sin x$ – неперервна для будь-якого $x\in\left(-\infty;\ +\infty\right)$. Визначимо:

$$\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тоді,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

і неперервність доведено ($\sin\frac{\Delta x}{2}$ – нескінченно мала, $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ обмежений одиницею).

2.7. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = (a;b)$. Задамо значення аргументу $x = x_0$. Надаємо приріст аргументу Δx, такий, що $(x_0 + \Delta x) \in (a;b)$. Тоді відповідний приріст функції буде $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. *Означення.* Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля довільним способом. Тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Процес відшукання похідної функції зветься диференціюванням. Якщо функція має похідну в точці x_0 вона називається диференційована в цій точці. Похідна в данній точці – це число. Якщо похідна існує в кожній точці множини X, то функція – диференційована на множині. При цьому похідна змінюється разом із значенням x, тобто є функцією аргументу x.

Для похідної функції вживають різні позначення. Наприклад: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Аналізуючи означення похідної функції $f(x)$ в деякій точці x. одержуємо загальний порядок відшукання похідної, а саме:

1) надаємо аргументові x приріст Δx і знаходимо відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) ділимо приріст функції на приріст аргументу, тобто знаходимо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

3) шукаємо границю цього відношення, тобто і знаходимо, власне ,похідну:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*Приклади.*Знайти похідні функцій:

а) $y=\sin x$, $x\in R$.

1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$;

3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

б) $y=\ln x$.

1) $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$;

3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$
$$=\ln\ \lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.$$

в) $ó=à^{õ}$.

1) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\ln a$.

Теорема. (про неперервність диференційованої функції). Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0. Тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

За крітерієм існування границі маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x,\Delta x),$$

де $\alpha(x,\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x\to 0$

Отже, $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\alpha(x;\Delta x)$ і, враховуючи арифметичні властивості границьта нескінченно малих, одержуємо: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Це і значить, що $f(x)$ неперервна у точці x_0. Обернене до теореми 1 твердження в загалі може і не виконуватися. Тобто, із неперервності функції не випливає диференційованість $\left(y=|x|\right)$.

2.8. Таблиця похідних та правила обчислювання

Наведемо основні правила диференціювання, або властивості похідних. Нехай функції $u(x)$ та $\upsilon(x)$ мають похідні в певній точці x, тоді в тій же точці:

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$

2) $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u \quad \left((cu)' = cu', c = const\right)$

3) $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2} \quad \left(\upsilon(x) \neq 0\right)$

Доведення приведемо для добутку функцій $y = u\upsilon$, використовуючи загальну схему відшукання похідних. Надамо аргументові x приріст Δx, тоді функції здобудуть, відповідно прирости Δu, $\Delta \upsilon$, Δy.Їхні нові значення $u + \Delta u$, $\upsilon + \Delta \upsilon$, $y + \Delta y$, зв'язанні співвідношенням

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (\upsilon + \Delta \upsilon).$$

Звідки

$$\Delta y = (u + \Delta u)(\upsilon + \Delta \upsilon) - u\upsilon = \upsilon \Delta u + u \Delta \upsilon + \Delta u \Delta \upsilon,$$

а

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \upsilon \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta \upsilon$$

Спрямуємо Δx до нуля, тоді, згідно з теоремою про неперервність диференційованої функції і при $\Delta \upsilon \to 0$; границі відношень $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$, при $\Delta x \to 0$ дають відповідно u' і υ'. Таким чином,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\upsilon \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \upsilon u' + u\upsilon'.$$

Приклади. Знайти похідні функцій

а) $y = \operatorname{tg} x$

$$y=\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$y=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Отже, $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

б) $y=\operatorname{ctg} x$

$$y=\frac{\cos x}{\sin x};\quad y'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Отже, $(\operatorname{ctg} x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$.

в) $y=2^x\ln x$.

$$y'=\left(2^x\right)'\ln x+2^x(\ln x)'=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\frac{1}{x}$$

Отже, $\left(2^x\ln x\right)'=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\frac{1}{x}$.

Таким чином, похідну будь-якої елементарної функції можна знайти, якщо користуватися правилами та таблицею похідних основних елементарних функцій.

Таблиця похідних

1. $y=c$	$y'=0$
2. $y=x^\alpha\ (\alpha\in R)$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
3. $y=a^x\ (a>0; a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$
4. $y=\ln x\,(x>0)$	$y'=\frac{1}{x}$
5. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
6. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$

7. $y=\operatorname{tg} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $y=\operatorname{ctg} x$ $\quad y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $y=\arcsin x$ $\quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y=\arccos x$ $\quad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y=\operatorname{arctg} x$ $\quad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

12. $y=\operatorname{arcctg} x$ $\quad y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2.9. Похідна складеної функції

Теорема 2. Якщо функція $y=f(u)$ при деякому значенні u має похідну $y'_u=f'_u(u)$, а функція $u=\varphi(x)$ має похідну $u'_x=\varphi'_x(x)$ в точці x, якій відповідає значення u, то похідна складеної функції $y=f(\varphi(x))$ визначаєтсья за формулою:

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$$

або

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

Доведення. За умовою теореми функція $y=f(u)$ має похідну в точці u, тобто існує $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$, звідки, згідно з теоремою про границю маємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha(u,\Delta u)$, де $\alpha(u,\Delta u)$ – нескінченно мала при $\Delta u\to 0$. Тоді

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha(u, \Delta u)\Delta u$$

або

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\alpha(u, \Delta u).$$

При $\Delta x \to 0$ і $\Delta u \to 0$ (завдяки неперервності функції, що має похідну). Отже, знайдемо границю $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \alpha(u, \Delta u).$$

Звідки одержуємо правило для знаходження похідної складної функції:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклади.

Знайти похідну:

а) $y = \cos^3 x$.

Якщо $u = \cos x$, тоді $y = u^3$. За таблицею похідних будемо мати:

$$y'_x = \left(u^3\right)'_u \cdot (\cos x)'_x = 3u^2(-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x.$$

б) $y = \cos x^3 \left(u = x^3;\ f(u) = \cos u\ \right)$

Отже, $y' = -\sin x^3 3x^2.$

Випадок складеної функції як суперпозиції декількох вичерпується послідовним застосуванням наведеного правила. Так, для функції

$$y = f(u),\quad u = \varphi(\upsilon),\quad \upsilon = \psi(x)$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = y'_u u'_\upsilon \cdot \upsilon'_x$$

Приклад. Знайти похідну $y=\operatorname{arctg}^4 2x$, $y'=4\operatorname{arct}g^3 2x\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2$.

ення похідної від y не має потреби розв'язувати рівняння $F(x,y)=0$ відносно y (не завжди це можна зробити), достатньо розглянути $F(x,f(x))\equiv 0$ як своєрідну складену функцію від x із врахуванням, що $F'_x\equiv 0$, знайти y' з цієї тотожності. Покажемо це на прикладі залежності ординати у точки кривої другого порядку, яка має рівняння:

$$x^2+2y^2+3xy+5x-4y-10=0$$

Знайдемо похідну обидвох частин рівняння по x, враховуючи, що змінна y – функція x. Отже,

$$2x+4y\cdot y'+3\left(y+xy'\right)+5-4y'=0$$

Розв'язуючи це рівняння відносно y' маємо:

$$y'=\frac{-2x-3y-5}{4y+3x-4}$$

Для обчислення похідної в деякій точці $x=x_0$ треба знати і відповідне значення функції y_0.

швидкість в точці t, а $S''(t)=\upsilon'(t)$ – це прискорення руху в момент часу t.

Друга похідна від виробничої функції $y=f(x)$ по змінній x є швидкість змінювання граничних витрат (зменьшення або збільшення) в залежності від об'єму виробництва x – це економічний зміст другої похідної.

2.10. Похідна вищих порядків

Означення. Якщо функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x)$ на деякій множині X, то похідна від цієї похідної називається похідною другого порядку від функції $y=f(x)$.Тобто,

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

Таким чином, щоб знайти n-у похідну від функції $y=f(x)$ необхідно знайти першу похідну від $(n-1)$ похідної функції, отже,

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Тобто, для знаходження n – тої похідної треба обчислити:

$$f'(x),\ f''(x),...,f^{(n-1)}(x).$$

Фізичний зміст похідної другого порядку. Якщо $S=S(t)$, тоді $S'(t)=\upsilon(t)$ – це швидкість в точці t, а $S''(t)=\upsilon'(t)$ – це прискорення руху в момент часу t.

Друга похідна від виробничої функції $y=f(x)$ по змінній x є швидкість змінювання граничних витрат (зменьшення або збільшення) в залежності від об'єму виробництва x – це економічний зміст другої похідної.

Лекція 3. Диференційованість функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференційні рівняння.

3.1. Основні поняття. Область визначення функції.

Означення. Функцією кількох змінних $x_1, x_2,..., x_n$ будемо називати змінну z, якщо кожному набору значень $(x_1, x_2,..., x_n)$ із множини X за деяким правилом ставиться у відповідність певне значення z, тобто $z=f(x_1, x_2,..., x_n)$.

Змінні $x_1, x_2,..., x_n$ називають незалежними, z - залежною змінною. Кількість незалежних змінних може бути довільною. Для простоти викладення матеріалу обмежимося розгляданням основних понять та положень функції кількох змінних на прикладі функцій двох змінних $z = f(x, y)$.

Функція двох незалежних змінних може бути задана декількома способами: табличним (за допомогою таблиці значень аргументів та функції), аналітичним (за допомогою однієї або кількох формул) або графічним способом. Як і для функції однієї змінної, функція двох змінних не обов'язково мусить існувати для будь-яких значень x та y.

Означення. Сукупність пар (x, y), для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називається *областю визначення* цієї функції (або областю існування). Вона позначається $D(f)$.

Якщо для функції однієї змінної $y = f(x)$ областю визначення є інтервал числової осі (скінчений чи нескінчений), то у випадку двох змінних сукупність пар (x, y), які утворюють область існування функції, визначає множину точок площини. Тобто, областю визначення функції двох змінних може бути деяка обмежена частина площини або вся площина, якщо область визначення необмежена. Лінію, що обмежує цю область, називають *границею області*. Точки області, які не належать границі називають *внутрішніми точками* області. У випадку, коли границя належить області визначення, ми маємо *замкнену область*, якщо границя не належить області, то останню вважають *відкритою* (*незамкненою*).

Якщо функція задана аналітично, то під областю визначення мають на увазі область визначеності математичного виразу.

Наведемо ряд прикладів.

Приклад. Знайти область визначення функцій: $z = 4x - y$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Розв'язання:

а) Для функції $z = 4x - y$ областю визначення є вся площина xOy, тому що вираз має сенс для будь-яких x та y.

б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

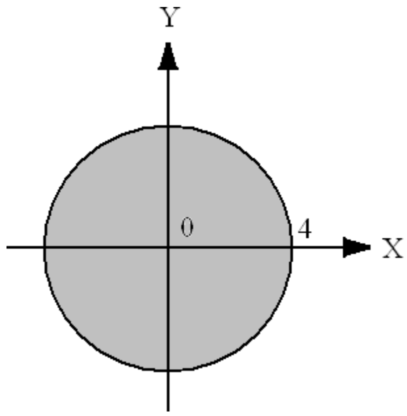

Рис. 3.1.

Функція існує, якщо $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 16$. Цій нерівності задовольняють всі точки, які знаходяться в межах круга радіуса 4, центр якого міститься у початку координат. Точки, що належать колу, також відповідають області визначення, тобто область замкнена (рис. 7.1).

в) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Функція має значення, коли $x^2 + y > 0$ або $y > -x^2$. Остання нерівність визначає частину площини, що розташована поза параболою $y = -x^2$, але точки самої параболи до області визначення не належать.

Це приклад незамкненої області визначення (рис. 7.2).

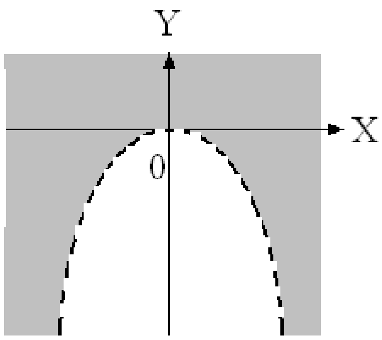

Рис. 3.2.

3.2. Частинні похідні

Означення. Частинною похідною функції $z = f\left(x, y\right)$ *за змінною* x називається границя відношення частинного приросту функції за відповідною змінною $\Delta_x z$ до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу наближається до нуля ($\Delta x \to 0$).

Частинна похідна за змінною x від функції $z = f(x, y)$ має ряд позначень: $z'_x,\ f'_x(x, y), \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Таким чином, згідно означення можна записати

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Ці похідні є аналогами похідних функцій однієї змінної, але істотно відрізняються від них тим, що як сама функція, так і її похідні залежать від *двох* змінних. З того, що частинні прирости були отримані за припущенням, що одна з незалежних змінних залишається сталою, випливає, що правила визначення частинних похідних не відрізняються від правил диференціювання функцій однієї змінної. Зауважимо, що при знаходженні частинних похідних інша незалежна змінна (y при визначенні похідної $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та x при визначенні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$) вважається сталою величиною і диференціювання відбувається з використанням таблиці похідних елементарних функцій.

Розглянемо ряд прикладів на знаходження частинних похідних.

Приклад. Знайти частинні похідні функції $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

Розв'язання. Диференціюємо задану функцію спочатку по x, вважаючи при цьому змінну y сталою, а потім по y, вважаючи сталою змінну x,за правилом диференціювання складної функції. Отримаємо результат:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2 + xy + y^2\right)\right) =$$

$$=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+y^2\right)=\frac{1}{x^2+xy+y^2}(2x+y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}(x+2y).$$

Частинні похідні від функції $z=f(x,y)$ є також функціями незалежних змінних x та y, і може постати потреба в їх повторному диференціюванні. Як відомо, другою похідною є перша похідна від першої похідної. Тому після диференціювання частинних похідних ми отримаємо частинні похідні другого порядку функції $z=f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=z''_{xx} -$$

друга частинна похідна по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y=z''_{yy} -$$

друга частинна похідна по y;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=z''_{xy} -$$

частинна похідна по y від похідної по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=z''_{yx} -$$

частинна похідна по y від похідної по x.

Означення. Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ називають *мішаними похідними*.

Для двох частинних похідних першого порядку можна, відповідно, отримати чотири похідні другого порядку. Для мішаних похідних справедлива наступна теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ визначені та неперервні в деякій області, то мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Таким чином, функція $z = f(x, y)$ двох змінних має тільки три різних частинних похідних другого порядку.

Перевіримо справедливість останньої теореми на прикладі.

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x + 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y^2 e^x + 2xy^3\right)'_y = 2ye^x + 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2ye^x + 3x^2 y^2\right)'_x = 2ye^x + 6xy^2.$$

Таким чином, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3.3. Похідна за напрямом.

Нехай функція $z = f(x, y)$ існує в певному околі точки М(x,y). Розгянемо напрям, який задано вектором $\vec{S}(\cos\alpha, \cos\beta)$, де $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Вектор $\vec{S}$ називається направляючим вектором. Перейдемо вздовж цього напрямку у точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

В цьому випадку функція отримає приріст

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Вектор $\vec{\Delta S}$, координатами якого є прирости аргументів, назвемо вектором приростів: $\vec{\Delta S} = (\Delta x, \Delta y)$.

Модуль вектора приростів дорівнює: $\left|\vec{\Delta S}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Означення. Границя відношення $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ за умови, що $\Delta S \to 0$, називається *похідною* (від) функції $z = f(x, y)$ *за напрямом* $\vec{S}$ та позначається символом $\dfrac{\partial z}{\partial S}$. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S}.$$

Оскільки $\vec{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, то для визначення похідної за напрямом маємо формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

3.4. Градієнт функції та лінії рівня

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, яка визначена на області $D \subset R^2$ і є дифереційовною у точці $M(x, y) \in D$.

Означення. *Градієнтом* функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні першого порядку від функції z у цій точці. Градієнт позначається символом $grad\ z$. Отже, за одиничним базисом можна записати:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Або у координатній формі: $\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$.

Виберемо в точці $M(x, y)$ довільний напрям, який визначається одиничним вектором $\vec{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Утворимо скалярний добуток градієнта функції в даній точці та напрямного вектора $\vec{S}$:

$$\operatorname{grad} z \cdot \vec{S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta .$$

Як бачимо, він дорівнює похідній за напрямом від цієї функції:

$$\operatorname{grad} z \cdot \vec{S} = \frac{\partial z}{\partial S} .$$

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial S} = |\operatorname{grad} z| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi ,$$

де φ - кут між векторами $\operatorname{grad} z$ та $\vec{S}$. З останьої формули випливає, що похідна за напрямом у даній точці сягає найбільшого значення, якщо напрям вектора $\vec{S}$ збігається за напрямом з $\operatorname{grad} z$. Отже, ми довели одну з важливих властивостей градієнта: градієнт функції визначає напрям, в якому функція зростає з максимальною швидкістю. Ще однією властивістю градієнта, яка допомагає у дослідженні фукції на екстремум, є те, що градієнт у обраній точці утворює прямий кут з дотичною до лінії рівня функції, що проходить через цю точку.

***Приклад*.** Дана функція $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$: а) визначити її градієнт у точці M_0(1; 2); б) довести, що градієнт перпендикулярен до лінії рівня, яка проходить через цю точцу; в) побудувати градієнт та лінію рівня функції $z = f(x, y)$, попередньо перетворивши рівняння кривої ІІ-го порядку до канонічного вигляду.

Розв'язання. а) Областю визначення функції $z = f(x, y)$ є $D = R^2$, отже, $M_0 \in D$. Визначимо частинні похідні першого порядку від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6$$

та обчислимо їх у точці $M_0(1; 2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = 2 \cdot 1 - 4 = -2; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = 2 \cdot 2 + 6 = 10.$$

Отже, можемо записати, що $grad\ z = -2\vec{i} + 10\vec{j}$.

3.5. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.

Однією з основних задач диференціального числення є пошук похідної заданої функції. Різноманітні дослідження в багатьох галузях науки, в тому числі економічної, приводять до розв'язання оберненої задачі, а саме за даною функцією $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Відновлення функції за відомою похідною цієї функції складає одну з основних задач інтегрального числення. Отже, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$ та $dF(x) = F'(x)dx$.

Позначимо $F'(x) = f(x)$,тоді диференціал функції: $dF(x) = f(x)dx$, а треба знайти саму функцію $F(x)$.

Означення. ***Функція*** $F(x)$ ***називається первісною функцією для функції*** $f(x)$ ***на множині*** X ***, якщо для будь-якої змінної*** $x \in X$ ***функція*** $F(x)$ ***диференційована і*** $F'(x) = f(x)$***, або*** $dF(x) = f(x)dx$***.***

Приклади:

1. Нехай функція $f(x) = 1/x$, тоді $F(x) = \ln|x|$ – первісна для функції $f(x)$ на $(0; \infty)$, тому що $(\ln|x|)' = 1/x$.

2. Якщо $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$ на інтервалі $(-1;1)$, то $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ –первісна, бо в будь-якій точці x цього інтервалу $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -x/\sqrt{1-x^2}$.

3. Якщо $f(x) = x^3$, то $F(x) = \frac{x^4}{4}$, тому що $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$. Але також $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1$, бо $\left(\frac{x^4}{4} + 1\right)' = x^3$. Отже, $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, де $C -$ довільна стала і $C \in R$. Як бачимо, задача відшуку первісної для функції $f(x)$ розв'язується неоднозначно.

В прикладах, які наведені вище, загальний вигляд усіх первісних для заданих функцій буде:

1. $F(x) + C = \ln|x| + C, \quad f(x) = 1/x$.
2. $F(x) + C = \sqrt{1-x^2} + C, \quad f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$.
3. $F(x) + C = \frac{x^4}{4} + C, \quad f(x) = x^3$.

Теорема. 1. *Якщо* $F(x)$ *– первісна для* $f(x)$ *на* X*, то* $F(x) + C$*,* $\forall C \in R$ *також первісна для* $f(x)$*, де* $C -$*стала величина.*

2. Якщо $F_1(x)$ *та* $F_2(x)$ *– дві первісні для* $f(x)$ *на* X*, то* $F_1(x) - F_2(x) = C$ *на* $(a, b)\ \forall C \in R$*, тобто ці функції відрізняються одна від одної на сталу величину.*

Доведення. Те, що разом з функцією $F(x)$ функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$, очевидно, бо $\left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$. Для доведення другої частини цієї теоремі складемо функцію $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, де $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$, оскільки ці функції первісні для $f(x)$. Тоді $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Звідси, функція $\varphi(x) = C$, тобто $F_1(x) - F_2(x) = C$. Отже, за теоремою Лагранжа (оскільки функція $\varphi(x)$ неперервна та диференційована на (a, b) $\forall x \in (a,b)$ маємо $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a)$, де $a < \xi < x$. Але

$\varphi'(\xi)=0$, тобто $\varphi(x)=\varphi(a).$, $\forall x\in(a,\, b)$, це означає, що функція $\varphi(x)=C$, тобто є сталою для $(a,\, b)$.

Отже, з даної теореми випливає, якщо $F(x)$ - одна з первісних для $f(x)$, то множина всіх первісних має вигляд $F(x)+C$, $\forall C\in R$.

Означення. Якщо функція $F(x)-$ первісна для функції $f(x)$, то множина функцій $F(x)+C$, де $C-$ довільна стала, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається таким чином*:*

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in R.$$

Тут символ $\int$ називається інтегралом, $f(x)dx-$підінтегральним виразом, $f(x)-$ підінтегральною функцією, $x-$змінною інтегрування. Операція відновлення функції за її похідною, або знаходження $F(x)+C$ функції /(x), називається інтегруванням $f(x)$.

З геометричної точки зору первісна – це лінія $y=F(x)$, а невизначений інтеграл – це сім'я ліній $y=F(x)+C,\ C\in R$, яка одержується шляхом зсунення однієї з них паралельно вздовж осі OY. Так за геометричним змістом похідна $F'(x)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої $y=F(x)$ в точці з абсцисою x. Тоді знайти первісну для $f(x)$ означає знайти таку криву $F(x)$, що кутовий коефіцієнт дотичної до неї в довільній точці x дорівнював би значенню $f(x)$ в цій точці.

Зауважимо також, що для того, щоб перевірити чи правильно виконане інтегрування, достатньо продиференціювати результат і отримати при цьому підінтегральну функцію.

3.6. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла за незалежною змінною дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Дійсно, $\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$.

2. Символи диференціала та інтеграла, що стоять поряд, взаємно знищуються, тобто:

а) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

б) $\int dF(x) = F(x) + C$.

Дійсно,

$$d\int f(x)dx = d\left(F(x)+C\right) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx .$$

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx .$$

Знайдемо похідні від обох частин рівності.

Від лівої частини: $\left(\int af(x)dx\right)' = af(x)$ (на основі властивості 1). Від правої частини: $a\left(\int f(x)dx\right)' = a\left(\int (x)dx\right)' = af(x)$.

Отже, похідні від обох частин наведеного вище співвідношення рівні між собою, тобто описують одну й ту ж саму множину первісних.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx .$$

Знову здиференціюємо обидві частини цієї рівності.

Ліва частина: $\left(\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x)$.

Права частина:

$$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x) .$$

Як бачимо, похідні від обох частин рівності співпали, значить правильна й сама рівність.

5. Якщо в підінтегральній функції змінну інтегрування помножити на будь-який сталий множник a, то первісна підінтегральної функції ділиться на цей множник:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C,$$

а також

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Доведення останньої властивості аналогічне доведенню властивостей 3 і 4.

3.7. Таблиця основних інтегралів

Відомо, що невизначений інтеграл це множина усіх первісних даної функції. Отже, скористуємось означенням інтеграла і формулами диференціювання та складемо таблицю основних інтегралів. Доведення всіх формул здійснюємо диференціюванням їх правих частин.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1); \quad \left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad (\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{x}$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (\sin x + C)' = \cos x$.

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad (-\operatorname{ctg} x + C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \quad (-\ln|\cos x| + C)' = \operatorname{tg} x$.

8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad (\ln|\sin x| + C)' = \operatorname{ctg} x$.

14. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0;\ a \neq 1);\quad \left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x.$

10. $\int e^x dx = e^x + C;\quad \left(e^x + C\right)' = e^x.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ \ (-a < x < a);\quad \left(\arcsin\dfrac{x}{a} + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C,\ \ (a \neq 0);\quad \left(\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C\right)' = \dfrac{1}{a^2 + x^2}.$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;\quad \left(\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \dfrac{1}{x^2 - a^2}.$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;\quad \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$

Правильність наведених формул перевіряється безпосередньо їх диференціюванням. Наприклад, формула 14 правильна, бо похідна правої частини

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2 + x}}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

дорівнює підінтегральній функції лівої частини.

3.8. Безпосереднє інтегрування

Знаходження інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла, залучаючи тотожні перетворення підінтегральної функції, називається безпосереднім інтегруванням. Наведемо декілька прикладів безпосереднього інтегрування.

Приклади:

1. $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C.$

2. $\int (3x-1)^5\,dx = \dfrac{(3x-1)^6}{3\cdot 6} + C$.

3. $\int \left(3x^2-1\right)^2 dx = \int \left(9x^4 - 6x^2 + 1\right) dx =$

$$= 9\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + \int dx = \frac{9x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + x + C.$$

4. $\int \left(2\sin x - 4 + 3\sqrt{x} + \dfrac{5}{x^2+4} - \dfrac{1}{x} \right) dx = 2\int \sin x dx - 4\int dx + 3\int \sqrt{x} dx +$

$$+5\int \frac{dx}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x} = -2\cos x - 4x + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \ln|x| + C =$$

$$-2\cos x - 4x + 2x\sqrt{x} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \ln|x| + C.$$

У даному прикладі були використані властивості 3 та 4 і далі, відповідно до формули 3, 1, 12, 2 таблиці інтегралів.

5. $\int \dfrac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C,$$

було використане співвідношення $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, та формули 6 і 5 таблиці інтегралів.

6. $\int \dfrac{dx}{4x^2+9} = \dfrac{1}{2\cdot 3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{3} + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{4x^2-9} = \dfrac{1}{6\cdot 2}\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right| + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x^2 \pm 9}} = \dfrac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 \pm 9}\right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{3} + C$.

Для перевірки знайдених інтегралів треба знайти похідні від одержаних первісних і довести, що $F'(x) = f(x)$.

3.9. Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

Якщо невизначений інтеграл не є табличним, то в багатьох випадках до мети приведе метод інтегрування заміною змінної, що є основним методом обчислення інтегралів. Метод підстановки або заміни змінної відіграє одну з основних ролей в інтегральному обчисленні

Нехай треба знайти інтеграл $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$, який безпосередньо обчислити не можна, де підінтегральна функція – неперервна. Припустимо, що $t=\varphi(x)$, тоді $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$, де $dt=\varphi'(x)dx$.

Нехай $\int f(t)dt = F(t)+C,$ де $dF(t)=F'(t)dt = f(t)dt$, тоді

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C.$$

Дійсно,

$$d(F(\varphi(x)+C) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx.$$

Таким чином, формулу доведено. Корисно запам'ятати випадок інтегралів, де чисельник підінтегрального виразу є диференціалом знаменника, тобто

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}.$$

Якщо тут прийняти $t=f(x)$, то в чисельнику стоїть $f'(x)dx=dt$, тоді

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C.$$

Проілюструємо використання методу підстановки.

Приклади .

1. $\int e^{x^2}xdx.$

В цьому прикладі зручніше взяти заміну $t=x^2$, тоді $2xdx=dt$, а $xdx=\frac{dt}{2}$.

Скориставшись цією заміною, перепишемо інтеграл:

$$\int e^{x^2}xdx=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int e^tdt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

2. $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$.

В чисельнику цього інтеграла бачимо, що $\cos xdx=d\left(\sin x\right)$, тому взявши $\sin x=t,\ \cos xdx=dt$, одержимо:

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{-1}{t}+C=-\frac{1}{\sin x}+C.$$

3. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$.

Взявши $x^2+3x+5=t$, $\left(2x+3\right)dx=dt$, одержимо

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|x^2+3x+5\right|+C.$$

Розглянемо заміну змінної в деяких інтегралах, вигляду $\int f\left(x\right)dx$, який безпосередньо обчислити не можна. Припустимо, що змінна інтегрування $x=\varphi\left(t\right)$, причому $\varphi\left(t\right)$ — неперервна функція, яка має неперервну похідну, а також обернену функцію $t=t\left(x\right)$. Тоді $dx=\varphi'\left(t\right)dt$, і шуканий інтеграл після підстановки нової змінної t буде мати вигляд:
$\int f\left(x\right)dx=\int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

Отже інтеграл в правій частині вже можна взяти безпосередньо, а після інтегрування знову перейти до початкової змінної x. Дійсно, знайдемо похідні від обох частин цього співвідношення.
Права частина:

$$\left(\int f\left(x\right)dx\right)'=f\left(x\right)$$

Ліва частина:

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right)'_t dt =$$
$$= (\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Тут було враховано, що права частина – це складена функція, де t – проміжний аргумент, причому, якщо $x'_t = \varphi'(t)$, то за правилом диференціювання оберненої функції:
$$\frac{dt}{dx} = t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Отже, похідні правої та лівої частин рівні, а значить і сама рівність має місце з точністю до сталої величини, що не суперечить визначенню невизначеного інтеграла.
Приклад .

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx. \qquad (a > 0).$$

Такого інтеграла в таблиці немає. Якщо покласти $x = a\sin t$, то $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t$ і $dx = a\cos t dt$. Отже, маємо

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Тут використано формулу $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$. Оскільки $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$, то повертаючись до змінної x, одержимо:
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^4}{4}\sin 2t + C = = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$
$$= \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Необхідно зауважити, що вдалий вибір підстановки викликає деякі труднощі. Для їх успішного подолання необхідно добре володіти технікою диференціювання і твердо знати таблицю інтегралів.

3.10. Метод інтегрування частинами

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$ — диференційовані функції аргумента x.
Тоді $d(uv)=vdu+udv$, звідки $udv=d(uv)-vdu$. Інтегруючи цю рівність з урахуванням властивостей 2 і 4 невизначеного інтегралу, одержимо:

$$\int udv=uv-\int vdu .$$

Це є формула інтегрування частинами, вона використовується тоді, коли $\int vdu$ не складніший за $\int udv$.
Формула використовується для знаходження інтегралу $\int f(x)dx$, якщо $f(x)$ має вигляд: $P_n(x)a^{bx}$; $P_n(x)\ln x$; $P_n(x)\sin mx$; $P_n(x)\cos mx$; $P_n(x)arc\sin x$; $P_n(x)arc\cos x$; $P_n(x)arc\,\mathrm{tg}\,x$; $P_n(x)arc\,c\mathrm{tg}\,x$, де $P_n(x)$ - многочлен.

$$u=P_n(x),\ du=P_n'(x)dx$$

1. $$\int \mathrm{P_n(x)}\left[\begin{array}{l} \mathrm{a^x} \\ \mathrm{e^x} \\ \sin \mathrm{x} \\ \cos \mathrm{x} \end{array}\right.\mathrm{dx} \to dv=\left[\begin{array}{l} a^x \\ e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right. dx, \qquad \mathrm{v}=\int \left[\begin{array}{l} \mathrm{a^x dx}=\dfrac{\mathrm{a^x}}{\ln \mathrm{a}} \\ \mathrm{e^x dx}=\mathrm{e^x} \\ \sin \mathrm{xdx}=-\cos \mathrm{x} \\ \cos \mathrm{xdx}=\sin \mathrm{x} \end{array}\right.$$

2. $$\int P_n(x)\left[\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x dx \\ arctgx \end{array}\right. \to u=\left[\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{array}\right. \mathrm{du}=\left[\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} \\ \dfrac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}} \\ \dfrac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^2} \end{array}\right.$$

$$dv=P_n(x)dx, \quad v=\int P_n(x)dx$$

Приклади

$$1.\ \int (x+1)\cdot\sin(2x)\,dx = \frac{-1}{2}\cdot\cos(2\cdot x)+\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot x)-\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)+C$$

Покладемо $u = x,$ а $dv = \sin 2xdx$. Тоді $du = dx,$ $v = \int \sin 2xdx = -\frac{\cos 2x}{2}$.

Тепер, застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчислюємо даний інтеграл.

$$3.\ \int \frac{3x-2}{x^2\cdot(x-1)}\,dx = \frac{-2}{x}-\ln(x)+\ln(x-1)$$

Покладемо $u = x^2,$ $dv = e^x dx$. Тоді, $du = 2xdx,$ $v = \int e^x dx = e^x$. Одержимо $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$. Застосовуючи до інтегралу $\int xe^x dx$ формулу інтегрування частинами, обчислюємо даний інтеграл.

$$3.\ \int \arcsin(x)\,dx$$

Позначимо $u = \arcsin x, dv = dx; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$. Отже застосувавши формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Поклавши $t = 1-x^2, dt = -2xdx$, будемо мати $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}$. Тоді

$$.\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x)+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

4. $\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Нехай $x = u$, а $dv = \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$, тоді $du = dx$, щоб знайти v треба спочатку зробити таку заміну $\sin x = t$, тоді $dt = \cos xdx$, а $dv = \frac{dt}{t^3}$, значить $v = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Тепер, застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержуємо:

$$\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x} = -\frac{x}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{\sin^2 x} - c\,\mathrm{tg}\, x + C .$$

Існують цілі класи інтегралів, які беруться лише інтегруванням частинами. Це інтеграли, які містять у підінтегральних функціях або добуток многочлена на тригонометричну, обернену тригонометричну, логарифмічну та показникову функцію, або добуток тригонометричної та показникової функції. Розглянемо один із таких інтегралів на прикладі:

5. $$\int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin xdx \\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx ,$$

$\int e^x \cos xdx$ знову беремо частинами. Отже,

$$\int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos xdx \\ v = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx ,$$

Або

$$\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx ,$$

отже

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C,$$

остаточно

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Зауважимо, що існують лише два основних методи інтегрування: підстановка (заміна змінної) і інтегрування частинами. Решта інших методів в цьому напрямку – це застосування зазначених методів для конкретних класів функцій.

3.11. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \text{ або } y' = f(x, y).$$

Загальний розв’язок цього рівняння має вигляд:

$$y = \varphi(x, c),$$

де C – довільна стала.

Задача знаходження розв’язку диференціального рівняння, яке задовольняє початкову умову: $y_0 = y(x_0)$, має назву задачі Коші. Зауважимо, що розв'язок диференціального рівняння існує не для будь-якої функції $f(x, y)$ і не при будь початковій умові.

Теорема Коші.

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ безупинні в деякій замкненій області X і точка $(x_0; y_0) \in X$, то існує єдиний розв'зок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, яке задовільняє початкову умову при $x = x_0$, $y = y_0$.

Доведення теореми виходить за межі навчальної програми.

Геометричний зміст теореми Коші полягає у тому, що графік функції $y = \varphi(x)$, тобто інтегральна крива, яка проходить через точку $(x_0; y_0) \in X$, є єдина.

Якщо у точці $(x_0; y_0)$ умови теореми Коші виконуються, то початкову умову $x = x_0$, $y = y_0$ будемо називати допустимою.

Приклад. $y' = \cos x$; $y(0) = 1$.

Запишемо рівняння у диференціалах $dy = \cos x dx$ та, інтегруючі його праву та ліву частини, одержимо: $y = \sin x + C$. Використаємо початкову умову: $y(x = 0) = 1$. Отже $1 = \sin x + C, \quad C = 1$.

Таким чином, $y = \sin x + 1$.

Розв’язок диференціального рівняння, який можна одержати із загального розв’язку, якщо надати певні значення довільним сталим, називається частинним розв’язком.

3.12. Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння, яке має вигляд:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dy + f_2(x)\varphi_2(y)dx = 0,$$

носить назву рівняння з відокремлюваними змінними. Цей тип рівняння є самим простим, але разом з тим дуже важливим, оскільки більш складні рівняння за допомогою деяких перетворень зводяться саме до цього типу. Поділивши це рівняння на добуток $f_1(x)\varphi_2(y) \neq 0$, одержимо:

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = 0.$$

Зінтегрувавши ліву та праву частини, одержимо:

$$\int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy + \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = C.$$

Обчисливши інтеграли, одержимо розв’язок у вигляді $y = \varphi(x, C)$ або $\Phi(x, y, C) = 0$.

Приклади.

1. $x\sqrt{y^2 - 1}\,dx + y\sqrt{y^2 - 1}\,dy = 0$.

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{y^2-1}\sqrt{x^2-1}$. Одержимо

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}}=0.$$

Змінні відокремлені. Інтегруючи почленно, знайдемо загальний інтеграл

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}}=\int 0dx,$$

Отже, загальним розв'зком рівняння буде

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=C.$$

2. $y'(1-x)=y+1$.

Переходимо до диференціалів. Одержимо

$$(1+y)dx+(x-1)dy=0 \text{ або } \frac{dx}{x-1}+\frac{dy}{y+1}=0.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dy}{y+1}=C.$$

Звідси $\ln|x-1|+\ln|y+1|=\ln|C|$, Тобто $\ln|(x-1)(y+1)|=\ln|C|$. Звідси

$(x-1)(y+1)=C$.

3.13. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння, яке має вигляд:

$$y'=f(x,y)$$

носить назву однорідного рівняння першого порядку, якщо його права частина, тобто функція $f(x,y)$, може бути зображена як функція відношення своїх аргументів: $f(x,y)=\varphi(x/y)$ або $y'=\varphi(y/x)$. Це рівняння легко перетворити у рівняння з відокремлюваними змінними. З цією метою зробимо заміну змінної:

$$u=y/x.$$

Оскільки $y=ux$ та $y'=u+xu'$, початкове рівняння приймає вигляд:

$$xu'+u=\varphi(u), \quad \text{тобто} \quad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Це означає, що змінні відокремилися. Зінтегрувавши обидві частини рівняння, одержимо:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|\,x\,|+c.$$

З цього співвідношення знайдемо загальний інтеграл рівняння $F(u,C)=0$. Повертаючись до початкової змінної $y=xu$, отримаємо розв’язок однорідного рівняння.

Приклади:

1. Розв’язати рівняння: $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{\operatorname{tg} y}{x}$.

Позначивши $y/x=u$, одержимо, що $y=ux$ та $y'=u+xu'$. Підставляючи одержані співвідношення в початкове рівняння, маємо:

$$u+xu'=u+\operatorname{tg}u, \quad \text{тобто} \quad \operatorname{ctg}u\,du=dx/x.$$

Зінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\ln|\sin u|=\ln|\,x\,|+\ln C; \text{або } \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right|=\ln|Cx|.$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння є

$$\sin\frac{y}{x}=Cx.$$

2. Розв'язати рівняння:

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2xydy = 0\,.$$

Визначивши із співвідношення першу похідну невідомої функції, маємо:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}\,.$$

Одержане рівняння однорідне. Позначивши $y/x = u$, одержимо, що $y = ux$ та $y' = u + xu'$. Таким чином, $xu' = \frac{1+u^2}{2u} - u$ або $\frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$.

Зінтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\ln\left|1-u^2\right| = \ln\left|Cx\right|, \quad \text{або ж} \quad Cx = 1/(1-u^2)\,.$$

Повертаючись до початкової змінної, отримаємо:

$$x^2 - y^2 = Cx\,.$$

3.14. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної першого порядку. Воно має вигляд:

$$y' + p(x)\,y = g(x)\,,$$

де $g(x)$ – вільний член рівняння; $p(x)$ та $g(x)$ - відомі неперервні функції незалежної змінної x (вони також можуть бути сталими). Знайдемо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$y = u(x)\,v(x)\,.$$

Для першої похідної цього співвідношення отримаємо вираз:

$$y' = u'v + uv'.$$

Таким чином, початкове рівняння буде мати вигляд:

$$u'v + (v' + p(x)v)u = g(x).$$

Вибравши за $v(x)$ будь-який частинний розв'язок рівняння:

$$v' + p(x)v = 0,$$

для знаходження невідомої функції $u(x)$ отримаємо рівняння:

$$u'(x)v(x) = g(x).$$

Таким чином, початкове рівняння звелось до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = 0 \\ u'(x)v(x) = g(x). \end{cases}$$

Обидва рівняння являють собой рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши перше рівняння системи, знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} + p(x) = 0, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx, \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

оскільки нас цікавить будь-який частинний розв'язок. Підставляючи знайдений розв'язок $v(x)$ у друге рівняння системи отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = g(x)e^{\int P(x)dx}, \quad du = g(x)e^{\int P(x)dx}\,dx.$$

Звідки

$$u(x) = \int g(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C.$$

Таким чином, загальний розв’язок лінійного рівняння має вигляд:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right).$$

Приклад. Розв’язати рівняння: $y' - \frac{y}{x} = x^2$.

Зробивши підстановку $y = u(x)v(x)$, отримаємо:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Зінтегрувавши обидві частини цього рівняння, одержимо частинний розв’язок

$$\ln|v| = \ln|x|, \quad \text{тобто} \quad v = x.$$

Для другого множника $u(x)$ маємо: $xu'(x) = x^2$

Скоротивши це співвідношення на x та зінтегрувавши обидві його частини, одержимо загальний розв’язок для функції $u(x)$:

$$u = x^2/2 + C.$$

Таким чином, $y(x) = x(x^2/2 + C)$.

Рівняння Бернуллі. Деякі рівняння внаслідок заміни невідомої функції можуть бути зведені до лінійного диференціального рівняння, наприклад, рівняння Бернуллі, яке має вигляд:

$$y' + p(x)y = y^n g(x),$$

де n – дійсне число. У цьому рівнянні $p(x)$ та $g(x)$ – деякі неперервні функції, які можуть бути і сталими. Зауважимо, що рівняння Бернуллі являє собою нелінійне рівняння оскільки невідома функція $y(x)$ присутня у ньому у n-му ступені. Поділивши обидві частини рівняння, на y^n, одержимо:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\,y^{1-n} = g(x).$$

Замінимо невідому функцію $y(x)$ на нову невідому функцію $z(x)$ за допомогою виразу:

$$y^{1-n} = z.$$

Для першої похідної цього співвідношення отримаємо:

$$z' = (1-n)\,y^{-n}\,y'.$$

Підставимо одержані співвідношення у початкове рівняння. Будемо мати лінійне диференціальне рівняння відносно функції z, а саме, $z' + z\,p(x) = g(x)$, розв'зок якого розглянуто вище.

Лекція 4. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.

4.1. Ймовірність події та її обчислення

В теорії ймовірностей можливий наслідок випробування (експерименту) називається подією. Якщо подія може як здійснитися, так і не здійснитися, то вона називається вірогідною, якщо вона здійснюється за будь-яким наслідком випробування і неможливою, якщо за жодним випробуванням здійснитися не зможе.

Події A і $\overline{A}$ називаються протилежними, якщо при даному випробуванні, якщо не поява однієї з них веде до появи іншої.

Події A і B називаються несумісними, якщо поява однієї з них при даному випробуванні виключає можливість появи іншої.

Події A і B називаються рівноможливими, якщо при даному випробуванні немає підстави припустити, що подія ? більш можлива, ніж подія ?, і навпаки.

Події A і B називаються єдиноможливими, якщо при даному випробуванні , окрім них ніякі події здійснитися не зможуть.

Декілька подій утворюють повну групу подій, якщо вони попарно несумісні, і якщо при випробуванні з'явиться принаймні одна з них.

Наслідок випробувань, які утворюють повну групу подій називають елементарними наслідками (подіями).

Ймовірність події – це численна міра об'єктивної можливості її появи.

Позначається ймовірної події A $P(A)$ і визначається за формулою:

$P(A)=\dfrac{m}{n}$,де n – загальна кількість елементарних подій, а m – число подій сприятливих події A. Це класичне означення ймовірності.

Ймовірність вірогідної події дорівнює 1, неможливої – 0. Ймовірність будь-якої події A $0\le P(A)\le 1$.

Приклад1. Яка ймовірність появи парного числа очок при одному киданні кубика?

Розв'язання. Оскільки, кубик має 6 граней, то число можливих випадків $n=6$. Серед них сприятливих буде 3, коли з'являться цифри 2, 3, або 6. Тобто $m=3$, а. $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Приклад 2. Кидають два кубики. Яка ймовірність того, що:

а) сума очок, що випали на обох кубиках, дорівнює 8;

б) сума дорівнює 8, а різниця 2;

в) сума дорівнює 4, а добуток 3;

г) сума менша за 13;

д) сума 8, а різниця 3.

Розв'язання. Для відповіді на ці питання доцільно намалювати таблицю, в якій вказати суми очок , що випали на двох кубиках.

I \ II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Як видно, загальне число рівно можливих подій для двох кубиків $n = 36$. За допомогою таблиці легко відповісти на задані питання.

а) $m = 5$, а $P(A) = \dfrac{5}{36}$;

б) Сума «8» отримається, якщо на кубиках будуть числа 2 і 6, 3 і 5, 4 і 4, 5 і 3, 5 і 3, 6 і 2.

Тільки в двох випадках різні це дорівнює 2, тобто $m = 2$.

А тоді $P(A) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$;

в) сума «14» отримається у випадках випадання чисел на кубиках 1 і 3, 2 і 2, 3 і 1. Добуток цих чисел дорівнює 3 в двох випадках, тому $m = 2$, а $P(A) = \dfrac{5}{36}$;

г) сума на двох кубиках завжди не більша 12. А тому подія «сума менша за 13» вірогідна і її ймовірність $P(A) = 1$.

д) подія «сума 8, а різниця 3» – не можлива, як це видно з розв'язання пункту б). Тому ймовірність цієї події дорівнює $P(A) = 0$.

Приклад 3. Кидають монету два рази. Знайти ймовірність того, що принаймні один раз випаде «герб»?

Розв'язання. При двох киданнях монети можливі чотири елементарні події: герб-герб, герб-цифра, цифра-герб, цифра-цифра. З них сприятливими є три перших, тобто $m = 3$, а $n = 4$.

Шукана ймовірність події A – «принаймні один раз герб» дорівнює :

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Приклад 4. Знайти ймовірність того, що в лютому навмання обраного високосного року будуть п'ять понеділків?

Розв'язання. В лютому будь-якого високосного року, навмання обраного, буде п'ять понеділків, якщо 1 лютого буде понеділок, тоді і 29 лютого буде понеділок. Але понеділок може бути будь-який день тижня, тобто число можливих елементарних подій $n = 7$. З цих подій сприятливою буде тільки одна, тобто $m = 1$. Шукана ймовірність

$$P = \frac{1}{7} \approx 0,143.$$

Приклад 5. Абонент, набираючи номер телефону свого друга забув три перші цифри. Пам'ятуючи, що вони різні, набрав їх навмання. Найти ймовірність того, що абонент правильно набрав номер.

Розв'язання. Оскільки цифри різні і їх розташування не має значення, то набір цих цифр є розміщенням $A_{10}^{3}=10\cdot 9\cdot 8=720$. Але номер телефону за умовою не може починатися з цифри 0. Тому треба з числа розміщень A_{10}^{3} відняти A_{9}^{2} – кількість вибору двох цифр з дев'яти.

Отже, $n=A_{10}^{3}-A_{9}^{2}=720-72=648$. Сприятливою подією буде одна, коли буде набрано правильний номер, тобто $m=1$.

Шукана ймовірність події A – набрати правильний номер дорівнює

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{648}\approx 0,0015.$$

Сумою $A+B$ двох подій A і B є подія C, яка полягає в появі хоча б однієї з даних подій, тобто в появі події A або події B, або обох разом.

Сумою декількох двох подій є подія , яка полягає в появі принаймні однієї з цих подій.

Добутком AB двох подій A і B є подія C, яка полягає в сумісній появі події A і події B.

Добутком декількох подій є подія, яка полягає в сумісній появі усіх цих подій.

Сума ймовірностей протилежний подій дорівнює одиниці

$P(A)+P(\overline{A})=1.$

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $P(A_1)+P(A_2)+...,+P(A_n)=1.$

Теорема множення ймовірностей для незалежних подій. Ймоірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

Теорема множення ймовірностей для залежних подій. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з подій на умовну ймовірність другої події. $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$

Теорема складання ймовірностей сумісних подій. Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ знаходиться за формулою: $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n)$.

Якщо позначити $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ..., P(A_n) = p_n$,

а $P(\overline{A}_1) = 1 - p_1 = q_1, P(\overline{A}_2) = 1 - p_2 = q_2, ..., P(\overline{A}_n) = 1 - p_n = q_n$, то $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 ... q_n$.

Приклад 2.51. В ящику знаходяться 10 білих, 15 червоних і 20 синіх кульок. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута кулька буде кольоровою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що навмання витягли червону кульку, а подія B – що синю. Події A і B несумісні, то за формулою (2.5) маємо

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

В ящику всього 45 кульок, серед яких 15 червоних (сприяють появі події A) і 20 синіх (сприяють появі події B). Таким чином,

$$P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9},$$

тобто $$P(A+B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9} \approx 0,778.$$

Приклад 6. На столі лежать 30 екзаменаційних білетів. Знайти ймовірність того, що номер навмання взятого білета буде кратним числам 3 або 7.

Розв'язання. Нехай подія A – номер білета є кратним числу 3, а подія B – номер кратний числу 7. Події A і B сумісні, бо серед чисел, які кратні числу 3 (це 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30) і числу 7 (це 7, 14, 21, 28), є число, яке кратне числам 3 і 7 – це число 21.

Тому застосуємо формулу

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}, \quad P(B)=\frac{4}{30}, \quad P(AB)=\frac{1}{30}.$$

$$P(A+B)=\frac{1}{3}+\frac{4}{30}-\frac{1}{30}=\frac{13}{30}.$$

Приклад 7. При масовому виготовленні певних виробів брак складає в середньому 2,4% з кількості придатної продукції 92,3% складають вироби першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що навмання узятий виріб буде першого ґатунку.

Розв'язання. Нехай подія A – навмання узятий виріб першого ґатунку. За умовою ймовірністю придатної продукції складає 1 – 0,024 = = 0,976. Оскільки навмання узятий виріб першого ґатунку може бути придатним то за теоремою множення ймовірностей

$$P(A)=0,976\cdot 0,923\approx 0,901.$$

Нехай подія A може здійснюватися лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу, тобто $P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1$.

Тоді ймовірність $P(A)$ події A знаходиться за формулою повної ймовірності $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$.

Якщо подія A здійснилася, то ймовірність кожної гіпотези можна знайти за формулою Бейса $P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i=1,2,...n$.

Приклад 8. Крамниця одержує електролампи, які виготовляються на трьох заводах: 40% – з першого заводу, 35% – з другого і решту – з третього. Відомо, що продукція першого заводу містить 3% бракованих ламп, другого – 2%, третього – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання обрана покупцем лампа буде небракованою.

Розв'язання. Можливі три події (гіпотези): H_1 – обрана продавцем лампа вироблена на першому заводі, H_2 – на другому, H_3 – на третьому. За умовою: $P(H_1)=0,4, \quad P(H_2)=0,35, \quad P(H_3)=0,25$.

Нехай подія A – навмання обрана лампа буде небракованою. Умовні ймовірності події A з умови такі:

$P_{H_1}(A) = 0,97, \quad P_{H_2}(A) = 0,98, \quad P_{H_3}(A) = 0,99.$

За формулою повної ймовірності маємо:

$P(A) = 0,4 \cdot 0,97 + 0,35 \cdot 0,98 + 0,25 \cdot 0,99 = 0,9785.$

Приклад 9. В групі спортсменів 20 лижників, 6 ковзанярів і 4 гірнолижників. Ймовірність виконати норму майстра спорту для лижника дорівнює 0,9, для ковзаняра – 0,8, для гірнолижника – 0,75. Знайти ймовірність того, що навмання викликаний спортсмен виконає норму майстра спорту.

Розв'язання. Можливі три гіпотези:

H_1 – викликали лижника, H_2 – ковзаняра, H_3 – гірнолижника.

Всього спортсменів в групі 30, а тому ймовірності гіпотез

дорівнюють: $P(H_1) = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}; \quad P(H_2) = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}; \quad P(H_1) = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{5}.$

Нехай подія A – навмання викликаний спортсмен виконає норму майстра спорт . Умовні ймовірності цієї події за умови виконання ведених гіпотез дорівнюють за умовою задачі:

$P(H_1) = 0,9; \quad P(H_2) = 0,8; \quad P(H_1) = 0,7$.

За формулою повної ймовірності

$P(A) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,9 + \dfrac{1}{5} \cdot 0,8 + \dfrac{2}{15} \cdot 0,7 \approx 0,853$.

Приклад 10. Три однакові на вигляд коробки містять кольорові олівці: перша – 10 синіх і 2 червоних, друга – 3 синіх і 9 червоних, третя – 4 синіх і 8 червоних. Навмання обирається коробка і витягується з неї олівець. Знайти ймовірність того, що він червоний: Яка ймовірність того, що він витягнутий з другої коробки?

Розв'язання. Можливі три гіпотези: H_1 – обрано першу коробку, H_2 – другу, H_3– третю. Оскільки ці події (гіпотези) рівно можливі, то

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$

Нехай подія A – поява червоного олівця. Умовні ймовірності цієї події знайдемо з умови задачі:

$$P_{H_1}(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};\quad P_{H_2}(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4};\quad P_{H_3}(A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{19}{36}\approx 0,528.$$

Далі за формулою Бейса знайдемо $P_A(H_2)$ – ймовірність того, що червоний олівець був витягнутий з другої коробки:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{19}{36}}=\frac{9}{19}\approx 0,474.$$

4.2. Формула Бернуллі

Якщо ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань постійна і дорівнює P, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія з'явиться рівно m раз, знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ \text{ де }\quad q=1-p.$$

Ймовірність появи події A принаймні один раз при проведенні n незалежних випробувань, які проводяться за схемою Бернуллі, дорівнює

$$P_n(m\geq 1)=1-q^n,\quad q=1-p.$$

Ймовірність того, що подія A при проведенні n незалежних випробувань за схемою Бернуллі, з'явиться не менше m_1 і не більше m_2 разів обчислюється за формулою

$$P_n(m_1\geq m\geq m_2)=\sum_{m_1}^{m_2}P_n(m).$$

Число m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається **найімовірнішим**, якщо ймовірність появи події A при цьому число m_0 є найбільшою. Це число знаходиться з нерівності

$$np-q\leq m_0\leq np+q.$$

Приклад 1. В майстерні стоять 6 моторів. Ймовірність того , що кожний мотор до обідньої перерви перегріється дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що до обідньої перерви перегріються: а) 4 мотори; б) усі мотори; в) жодний мотор не перегріється.

Розв’язання. За умовою $n = 6,\ p = 0,8,\ q = 0,2$.

за формулою Бернуллі знайдемо:

а) $P_6(4) = C_6^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^2 \approx 0,24$,

б) $P_6(6) = 0,8^6 \approx 0,26$,

в) $P_6(0) = 0,2^6 = 0,000064$.

Приклад 2. Схожість насіння деякої рослини дорівнює 70%. Яка ймовірність того, що з 10 посіяних насінин зійдуть: а) вісім; б) хоча б вісім; в) не менше трьох?

Розв’язання. Ймовірність схожості насіння $p = 0,7$, $q = 0,8$. За умовою $n = 10$.

Далі за формулою Бернуллі:

а) $P_{10}(8) = C_{10}^8 p^8 q^2 = C_{10}^2 0,7^8 0,3^2 \approx 0,2334$;

б) $P_{10}(m \geq 8) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) \approx$

$\approx 0,2334 + C_{10}^1 \cdot 0,7^9 \cdot 0,3 + 0,7^{10} \approx 0,3827$;

в) $P_{10}(m \geq 3) = 1 - P_{10}(m < 3) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2)) =$

$= 1 - (q^{10} + C_{10}^1 p^1 q^9 + C_{10}^2 p^2 q^8) =$

$= 1 - (0,3^{10} + 10 \cdot 0,7 \cdot 0,3^9 + 45 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^8) \approx 0,9984$.

4.3. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Законом розподілу (рядом розподілу) дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значення та їх ймовірностями. Його можна задати таблично: в першому рядку знаходяться можливі значення x_i, а в другому – відповідні ймовірності p_i:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

де $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна задати аналітично (у вигляді формули): $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$, а також графічно. Для цього в прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2; p_2), \ldots, M_n(x_n; p_n)$ (x_i – можливі значення X, p_i – відповідні ймовірності) і з'єднують їх відрізками прямих. Одержану фігуру називають **многокутником розподілу**.

Біномним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p, якщо відповідні значення ймовірностей обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q_n^{n-k}, \quad (k = 0,1,2...,n).$$

4.4. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Якщо дискретна випадкова величина X приймає зчисленну множину можливих значень, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

за умови, що ряд збігається абсолютно. Математичне сподівання показує, яке значення випадкової величини слід очікувати в середньому при випробуваннях.

Властивості математичного сподівання:

1) математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій: $M(C) = C$;

2) сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(CX) = CM(X)$;

3) математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n);$$

Наслідок – математичне сподівання різниці двох випадкових величин дорівнює різниці їх математичних сподівань: $M(X-Y)=M(X)-M(Y)$;

4) математичне сподівання добутку кінцевого числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot ... \cdot M(X_n)$;

5) математичне сподівання біномного розподілу дорівнює добутку числа випробувань: $M(X)=np$.

Іншою важливою характеристикою випадкової величини є дисперсія, яка характеризує міру розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Для розрахунку використовують ще і таку формулу:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Властивості дисперсії:

1) дисперсія сталої дорівнює нулю: $D(C)=0$;

2) сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрата: $D(CX)=C^2D(X)$;

3) дисперсія суми попарно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n);$$

4) дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: .$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

Дисперсія біномного розподілу дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи та не появи події в одному випробуванні: $D(X)=npq$.

Дисперсія має розмірність квадратних одиниць вимірюваної величини. Щоб отримати розмірність міри розсіювання в одиницях вимірюваної величини розглядають квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)},$$

який називають середнім квадратичним відхиленням (стандартним відхиленням).

В економічних задачах часто середнє квадратичне відхилення σ використовується як міра ризику.

Приклад. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, заданої законом розподілу:

X	2	5	7	10	12
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Розв'язання. Для знаходження математичного сподівання використовуємо формулу

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i,\ M(X)=2\cdot 0,1+5\cdot 0,2+7\cdot 0,4+10\cdot 0,2+12\cdot 0,1=7,2.$$

Для обчислення дисперсії використовуємо формулу:

$D(X)=M(X-M(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i,$ за означенням математичного сподівання).

$$D(X)=(2-7,2)^2\cdot 0,1+(5-7,2)^2\cdot 0,2+(7-7,2)^2\cdot 0,4+$$
$$+(10-7,2)^2\cdot 0,2+(12-7,2)^2\cdot 0,1=7,56.$$

Обчислюємо дисперсію за формулою:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

За означенням математичного сподівання $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$, тому для нашого прикладу

$$M(X^2)=2^2\cdot 0,1+5^2\cdot 0,2+7^2\cdot 0,4+10^2\cdot 0,2+12^2\cdot 0,1=59,4.$$

Тоді $D(X)=59,4-(7,2)^2=7,56$.

Отже, за двома формулами дисперсії збіглися.

4.5. Неперервні випадкові величини

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X називають функцією $F(x)$, яка для кожного значення x визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Властивості інтегральної функції розподілу:

1. Значення інтегральної функції належать відрізку $[0;1]$, тобто $0 \le F(x) \le 1$.

2. Інтегральна функція неспадна функція, тобто $F(x_2) \le F(x_1)$, якщо $x_2 \le x_1$.

3. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуває значення з інтервалу (a,b), дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

4. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуває одне певне дорівнює нулю: $P(X = x_0) = 0$.

5. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу (a,b), то $F(x) = 0,$ якщо $x \le a$; $F(x) = 1,$ якщо $x \ge b$.

Мають місце такі співвідношення: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Неперервну випадкову величину можна задати не лише інтегральною функцією розподілу $F(x)$,а й за допомогою диференціальної функції розподілу ймовірностей.

Диференціальною функцією розподілу $f(x)$ (або щільністю розподілу ймовірностей) називають першу похідну від інтегральної функції: $f(x) = F'(x)$.

$F(x)$ є первісною для $f(x)$. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ виражається через щільність розподілу $f(x)$ за допомогою рівності:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Теорема. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуває значення з інтервалу (a,b) дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, взятому в межах від a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Властивості щільності розподілу $f(x)$.

1. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини є невід'ємною функцією: $f(x) \geq 0$.

Графік щільності розподілу – крива, що розташована над віссю $0x$ або на цій осі.

2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрично це означає, що площа криволінійної трапеції, яка обмежена кривою розподілу і віссю $0x$, дорівнює 1.

Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Однією з числових характеристик неперервної випадкової величини є математичне сподівання.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать всій осі $0x$, називають невласний інтеграл

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, де $f(x)$ – диференціальна функція, а невласний інтеграл збігається абсолютно.

Якщо всі можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a, b]$

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Дисперсією неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання. Отже, якщо можливі значення X належать всій числовій осі $0x$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx,$$

Якщо можливі значення випадкової величини X належать $[a,b]$, то

$$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Зауваження 1. Для обчислення дисперсії легко одержати більш зручні формули:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2 \text{ та } D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Зауваження 2. Властивості математичного сподівання і дисперсії дискретних випадкових величин зберігаються і для неперервних випадкових величин.

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається, як і для дискретної, рівністю: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Приклад. Знайти математичне сподівання і дисперсію неперервної випадкової величини, заданої інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{якщо } x\le 1,\\ \frac{1}{8}(x^4-x^3) & \text{якщо } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

Розв'язання. Математичне сподівання обчислюється за формулою: $M(X)=\int_{a}^{b}xf(x)dx$.

Тому спочатку треба знайти $f(x)$.

Тоді:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{якщо } x\le 1,\\ \frac{1}{8}(4x^3-3x^2) & \text{якщо } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

Тоді:

$$M(X)=\int_1^2 x\cdot\frac{1}{8}(4x^3-3x^2)dx=\frac{1}{8}\int_1^2(4x^3-3x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4x^5}{5}-\frac{3x^4}{5}\right)\Big/_1^2=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{5}(2^5-1^5)-\frac{3}{4}(2^4-1^4)\right)=\frac{271}{160}.$$

Тепер обчислюємо дисперсію за формулою, а саме:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2$$

Спочатку знайдемо $M(X^2)$, тобто

$$\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(4x^3-3x^2)dx=\frac{1}{8}\int_1^2(4x^5-3x^4)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4x^6}{6}-\frac{3x^5}{5}\right)\Big/_1^2=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}(2^6-1^6)-\frac{3}{6}(2^5-1\right)=\frac{117}{40}.$$

Отже, $D(X)=\frac{117}{40}=\left(\frac{117}{40}\right)^2\approx 0,06.$

4.6. Елементи математичної статистики

Відповідність між варіантами x_i та їх частотами m_i або відносними частотами w_i називається **дискретним статистичним розподілом вибірки**.

Цей розподіл можна подати у вигляді таблиці (табл. 4.1):

Таблиця 4.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

$$\sum_i^k m_i$$

Якщо об'єм вибірки n великий, або ознака X є неперервною, тобто може приймати будь-які значення в межах деякого інтервали, то вихідні дані вибірки розбивають на інтервали (частіше однакової довжини) і підраховують число m_i значень ознаки, що потрапила в кожний інтервал. Результат такого групування зручно записати у вигляді таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Інтервали	$a_0 - a_1$	$a_1 - a_2$	…	$a_{k-1} - a_k$
Частоти (m_i)	m_1	m_2	…	m_k
Відносні частоти (w_i)	w_1	w_2	…	w_k

де $a_o = x_{\min} - \frac{h}{2}$, $a_k = x_{\max} - \frac{h}{2}$, $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, k – кількість інтервалів, h – крок або довжина інтервалу.

Таке співвідношення між проміжками варіаційного ряду та їх частотами або відносними частотами називається **інтервальним статистичним розподілом** вибірки.

Щоб перейти від інтервального ряду розподілу до дискретного, треба, кожний інтервал замінити середнім значенням ознаки в цьому інтервалі.

Для графічного зображення варіаційних рядів застосовують полігон, гістограму та комуляту.

Полігон – графічне зображення дискретного варіаційного ряду. Для його побудови з'єднують відрізками точки, координати яких є значення x_i ознаки і відповідні їм частоти м або відносні частоти $\frac{m_i}{n}$.

Одержана ламана називається **полігоном частот** або **полігоном відносних частот** (рис. 4.1).

Гістограма – графічне зображення інтервального варіаційного ряду. Для побудови на осі абсцис відзначають відрізки, яких відповідають інтервалам статистичного ряду, і на кожному з них, як на основі будують прямокутники, висоти яких дорівнюють частотам $\frac{m_i}{h}$ або відносним частотам $\frac{w_i}{h}$, де h – довжина кожного інтервалу (рис. 9.2).

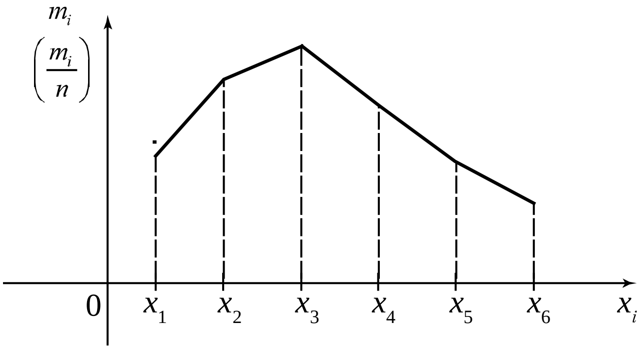

Рис. 4.1. Полігон

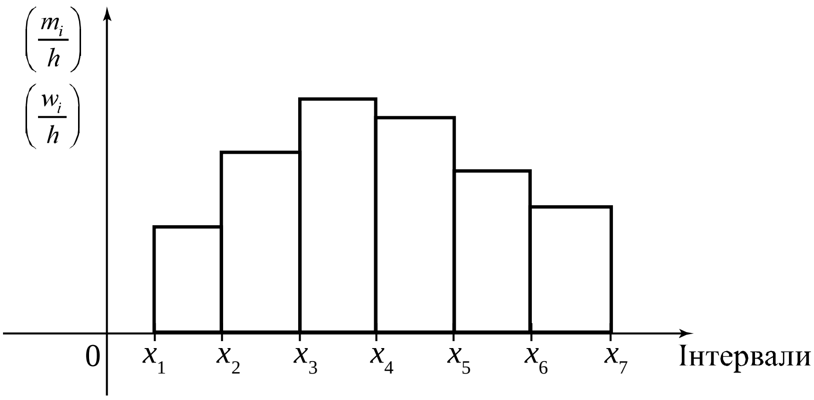

Рис. 4.2. Гістограма

Площа гістограми частот $\frac{m_i}{h}$ дорівнює сумі усіх частот, тобто об’єму вибірки n, а площа гістограми відносних частот $\frac{w_i}{h}$ дорівнює сумі усіх відносних частот, тобто дорівнює одиниці.

Варіаційний ряд дозволяє одержати перше уявлення про одержаний розподіл. Другий етап обробки даних спостережень є знаходження числових характеристик варіаційного ряду, основними з яких є вибіркова середня ($\overline{x}_в$), вибіркова дисперсія ($D_в$) і вибіркове середнє квадратичне відхилення ($\sigma_в$)

Для дискретного варіаційного ряду

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
m_i	m_1	m_2	m_3	...	m_k

$$\sum_{i=1}^{k} m_i$$

Мають місце наступні формули:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}, \quad D_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_b)^2 m_i}{n}, \text{або} \quad D_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 m_i}{n} - (\overline{x}_в)^2.$$

Середня вибірка $\overline{x}_в$ характеризує лише середній рівень значень спостережень статистичної сукупності і на практиці не завжди дає повну характеристику цієї сукупності. Вибіркова дисперсія $D_в$ є тим показником, який характеризує розсіювання значень випадкової величини за результатами вибірки. Дисперсія вимірюється у квадратних одиницях вимірності значень випадкової величини, що створює незручність у дослідженнях. Показником, який характеризує розсіювання у тих самих одиницях що і значення випадкової величини, є вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$, яке визначається формулою:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}$$

Приклад. Обчислити $\overline{x}_в$, $D_в$ і $\sigma_в$, для даного інтервального варіаційного ряду.

Інтервали	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
Частоти (m_i)	12	18	27	25	18

Розв'язання. Перейдемо від інтервального ряду до дискретного, замінюючи кожний інтервал його серединою (x_i). Результати зручно зобразити в таблиці.

Таблиця 4.3

Інтервали	m_i	x_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$	$(x_i - \overline{x}_в)^2 m_i$
10 – 20	12	15	180	2700	5755,32
20 – 30	18	25	450	11250	2548,98
30 – 40	28	35	945	33075	97,47
40 – 50	25	45	1125	50625	1640,25
50 – 60	18	55	990	54450	5896,98
Разом	100		3690	152100	15939,00

За формулами маємо:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i m_i}{n} = \frac{3690}{100} = 36,9;$$

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 m_i}{n} - (\overline{x}_в)^2 = \frac{152100}{100} - 36,9^2 - 159,39;$$

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \overline{x}_в)^2 m_i}{n} = \frac{15939}{100} = 159,39;$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{159,39} - 12,62.$$

Лекція 5. Елементи математичного програмування.

5.1. Графічний метод розв’язання задачі лінійного програмування

Найбільш простим методом розв’язання задач лінійного програмування (ЗЛП) є графічний метод. Він застосовується для задач ЛП із двома змінними, заданими в неканонічній формі, і багатьма змінними в канонічній формі за умови, що вони містять не більше двох вільних змінних.

З геометричної точки зору в задачі лінійного програмування ведеться пошук такої кутової точки або набору точок із припустимої множини рішень, які перетинає сама верхня (або нижня) лінія рівня, що розташована далі (або ближче) інших у напрямі найшвидшого росту.

Для знаходження екстремального значення цільової функції $Z(x_1, x_2)$ використовують вектор $\overline{gradZ} = \overline{\nabla Z} = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\bar{j}$ на площині X_1OX_2, де $\bar{i}, \bar{j}$ – одиничні вектори по осях OX_1 та OX_2 відповідно. Цей вектор показує напрям найшвидшої зміни цільової функції.

Таким чином, координатами вектора $\overline{\nabla Z}$ є коефіцієнти цільової функції $Z(x_1, x_2)$.

Рішення задач ЛП графічним методом здійснюється за алгоритмом:

1. Знаходимо область припустимих рішень системи обмежень задачі.
2. Будуємо вектор $\overline{\nabla Z}$.
3. Проводимо лінію рівня Z_0, що перпендикулярна $\overline{\nabla Z}$.
4. Лінію рівня пересуваємо за напрямом вектора $\overline{\nabla Z}$ для задач на максимум й за напрямом, протилежним до $\overline{\nabla Z}$, для задач на мінімум. Пересування лінії рівня робиться доти, доки в ній залишиться тільки одна загальна точка з областю припустимих рішень (ОПР). Ця точка визначає єдине рішення задачі ЛП та екстремум.

Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна одній зі сторін ОПР, то задача ЛП буде мати безліч рішень.

Якщо ОПР представляє необмежену область, то цільова функція може бути необмежена.

Задача лінійного програмування може бути нерозв'язаною, коли визначальні її обмеження виявляться суперечливими.

5. Знаходимо координати точки екстремуму й значення цільової функції в ній.

Множина припустимих розв'язків (багатокутник розв'язків) задачі лінійного програмування становить опуклий багатокутник, оптимальний розв'язок задачі знаходиться, принаймні, в одній з кутових точок багатокутника розв'язків (рис. 5.1).

Необхідно серед точок цього багатокутника знайти таку точку, в якій лінійна функція $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ приймає максимальне (або мінімальне) значення.

Розглянемо так звану лінію рівня лінійної функції Z, тобто лінію, вздовж якої ця функція приймає одне й теж фіксоване значення a, тобто $Z = a$, або $c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$. Важлива властивість лінії рівня полягає у тому, що при паралельному зміщення лінії у один бік рівень тільки зростає, а при зміщенні у інший бік – тільки спадає.

З геометричної точки зору в задачі ЛП ведеться пошук такої кутової точки або набору точок із припустимої множини розв'язків, які перетинає сама верхня (або нижня) лінія рівня, що розташована далі (або ближче) інших у напрямі найшвидшого росту.

Для знаходження екстремального значення цільової функції $Z(x_1, x_2)$ використовують вектор $\overline{gradZ} = \overline{\nabla Z} = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\bar{j}$ на площині

X_1OX_2, де $\bar{i}, \bar{j}$ - одиничні вектори по вісях OX_1 та OX_2 відповідно. Цей вектор показує напрямок найшвидшої зміни цільової функції.

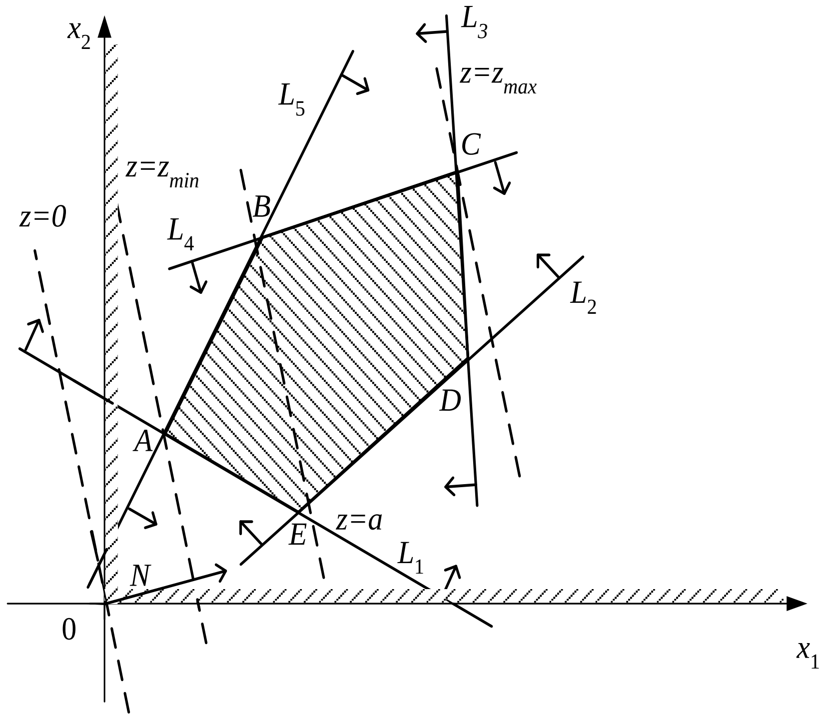

Рис.5.1. **Множина припустимих розв'язків**

Таким чином, координатами вектора $\overline{\nabla Z}$ є коефіцієнти цільової функції $Z(x_1, x_2)$.

Розглянемо пошук оптимального плану випуску виробів підприємства на прикладі.

Приклад. Для виготовлення двох виробів A та B використовуються три види сировини, запаси яких обмежені й складають відповідно 300, 120 і 252 умовних одиниці. Прибуток від реалізації одиниці готової продукції кожного виду становить 20 і 40 умовних одиниць. Відповідно до прийнятої технології витрати сировини на виготовлення одиниці продукції A становлять 12, 4 і 3 одиниці, а одиниці продукції B − 4, 4 і 12 одиниць сировини кожного виду. Визначити оптимальний план виробництва, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від реалізації готової продукції.

Розв'язання

За вихідними даними укладемо математичну модель задачі. Якщо через x_1 позначити кількість одиниць виробу A, а через x_2 – виробу B, то загальний прибуток z від реалізації готової продукції є функцією двох змінних: $z = 20x_1 + 40x_2$. Оскільки витрати сировини на виготовлення продукції не може перевищувати її запасів, то обмеження за сировиною має вигляд системи нерівностей:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

Крім того, кількість готової продукції не може бути від'ємною, тобто маємо обмеження на знак: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Задачу можна сформулювати таким чином: необхідно знайти такі значення x_1 і x_2, які б задовольняли систему обмежень, і при яких цільова функція z сягає максимального значення. Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \quad \to \quad \max,$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Застосуємо до розв'язання задачі графічний метод. Для побудови багатокутника планів у І-ій чверті координатної площини проведемо прямі за рівняннями:

$$L_1: \quad 12x_1 + 4x_2 = 300 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{25} + \frac{x_2}{75} = 1;$$

$$L_2: \quad 4x_1 + 4x_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{30} = 1;$$

$$L_3: \quad 3x_1 + 12x_2 = 252 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{84} + \frac{x_2}{21} = 1.$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів (рис. 5.2).

Побудуємо вектор $N = grad\, z = (20; 40)$, який визначає напрям найбільш швидкого зростання цільової функції, і перпендикулярно йому через початок координат проведемо лінію рівня, якій відповідає значення цільової функції $z_{\min} = 0$. Пересуваючи лінію рівня в напрямі градієнта, визначимо, що лінія рівня виходить із багатокутника планів через точку перетину прямих L_2 та L_3. Визначаємо її координати з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 30, \\ x_1 + 4x_2 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18. \end{cases}$$

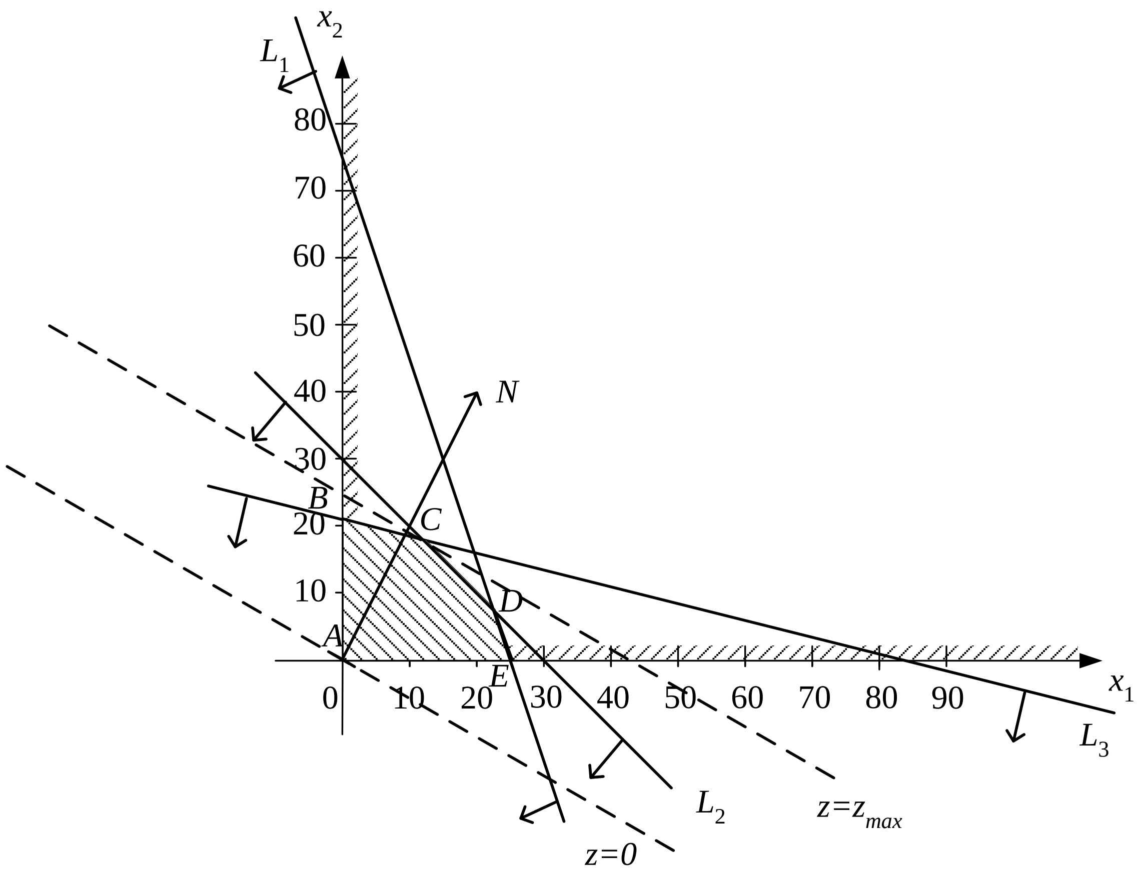

Рис. 5.2. **Графічне розв'язання задачі**

Отже, маємо оптимальний план $\mathbf{X}_{опт.} = (12; 18)$, якому відповідає максимальне значення цільової функції:

$$z_{\max} = z(\mathbf{X}_{опт.}) = 20 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 960.$$

Таким чином, підприємство повинно випускати 12 одиниць продукції A та 18 одиниць продукції B, при цьому прибуток підприємства буде максимальним і складатиме 960 умовних одиниць.

5.2. Симплексний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Симплексний метод є універсальним методом розв'язання задач лінійного програмування, бо він дозволяє розв'язати практично будь-яку задачу, що подана у канонічному вигляді.

Суть симплексного метода полягає в тому, що починаючи з одного опорного розв'язку здійснюється послідовно спрямоване переміщення по опорним розв'язкам системи до оптимального опорного розв'язку.

Алгоритм симплекс-методу:

1. Записати систему обмежень задачі з невід'ємними вільними членами у канонічному вигляді, тобто у вигляді рівнянь.
2. Виділити у системі обмежень одиничний базис, зберігаючи вільні члени невід'ємними.
3. Знайти вихідний не вироджений опорний план та значення функції цілі.
4. Перевірити вихідний план на оптимальність. Для цього необхідно:

a) обчислити величину $z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$;

b) обчислити оцінки $\Delta_j = z_j - c_j$.

Якщо всі оцінки $\Delta_j \geq 0$ (у випадку максимізації цільової функції) або всі оцінки $\Delta_j \leq 0$ (у випадку мінімізації цільової функції), то вихідний опорний план є оптимальним і задача розв'язана.

Якщо серед оцінок є хоча б одна від'ємна (у випадку максимізації цільової функції) або додатна (у випадку мінімізації цільової функції), то план необхідно покращити.

5. Покращення вихідного опорного плану.

a) якщо одна від'ємна оцінка у випадку максимізації цільової функції або одна додатна у випадку мінімізації цільової функції, то для відповідного j-го вектора обчислюємо параметр:

$$\Theta_j = \min\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right), \text{ де } a_{ij} > 0,$$

та відповідний вектор вводимо до базису, використовуючи однократне заміщення базису.

b) якщо декілька від’ємних оцінок у випадку максимізації цільової функції або декілька додатних у випадку мінімізації цільової функції, то для кожного відповідного вектора обчислюємо $\left|\Delta_j \cdot \Theta_j\right|$ і в базис вводимо вектор з максимальним значенням цього добутку ($\max\left|\Delta_j \cdot \Theta_j\right|$), тобто направляючий стовпець a_j визначається максимальним модулем добутку, а направляючий рядок – мінімальним відношенням $\frac{b_i}{a_{ij}}$.

6. Новий опорний план перевіряємо на оптимальність, починаючи з четвертого пункту. Процес продовжуємо поки не буде виконаний критерій оптимальності.

Зауваження:

1. Якщо для j-го вектора оцінка $\Delta_j < 0$ (у випадку максимізації цільової функції) або оцінка $\Delta_j > 0$ (у випадку мінімізації цільової функції), а координати j-го вектора від’ємні, то план не є оптимальним, покращити його неможливо, задача розв’язку немає.

2. Якщо на будь-якому етапі розрахунків виникає невизначеність у виборі розв’язувального рядка, тобто відбувається зациклення, то необхідно обирати той рядок, для якого відношення елементів наступного (попереднього) стовпчика до розв’язувального буде мінімальним. Причому в новому стовпчику беруться до уваги як невід’ємні, так і від’ємні координати вектора. Процес продовжується доти, доки розв’язувальний рядок не визначиться однозначно.

Приклад.

Для виготовлення різних виробів A і B підприємство використовує три різні види сировини. Норми розходу на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A і B, а також загальна кількість сировини кожного виду, яке може бути використане підприємством, подані в табл. 5.1.

Вироби A і B можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечено, але виробництво обмежено сировиною кожного виду, що надана підприємству). Треба скласти план виробництва виробів таким чином, щоб загальна вартість всієї продукції, що вироблена підприємством, була максимальною.

Таблиця 5.1

Вихідні дані

Вид сировини	Норми затрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	*B*	
I	9	5	1 431
II	7	8	1 224
III	4	16	1 328
Ціна одного виробу (грн)	3	2	

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через x_1 та x_2 кількість виробів A і B відповідно. Оскільки маються обмеження на виділений підприємству фонд сировини кожного виду, то змінні x_1 та x_2 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \le 1431, \\ 7x_1 + 8x_2 \le 1224, \\ 4x_1 + 16x_2 \le 1328. \end{cases}$$

Загальна вартість продукції, що виробило підприємство за умовою випуску x_1 виробів A та x_2 виробів B:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 та x_2 повинні приймати тільки невід'ємні значення.

Спочатку запишемо системy обмежень задачі у канонічному вигляді за допомогою балансових змінних $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$.

Таким чином, система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 1431, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 1224, \\ 4x_1 + 16x_2 + x_5 = 1328, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}.$$

Балансові змінні за своїм економічним змістом означають кількість сировини того чи іншого виду, яка при даному плані виробництва не буде використана.

Складемо симплекс-таблицю.

Таблиця 5.2

Симплекс – таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	3	2	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	1 431	9	5	1	0	0
2	A_4	0	1 224	7	8	0	1	0
3	A_5	0	1 328	4	16	0	0	1
4	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
5	$\Delta_j = z_j - c_j$			–3	–2	0	0	0
6	A_1	3	159	1	5/9	1/9	0	0
7	A_4	0	111	0	37/9	–7/9	1	0
8	A_5	0	692	0	124/9	–4/9	0	1
9	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		477	3	5/3	1/3	0	0
10	$\Delta_j = z_j - c_j$			0	–1/3	1/3	0	0
11	A_1	3	144	1	0	8/37	–5/37	0
12	A_2	2	27	0	1	–7/37	9/37	0
13	A_5	0	320	0	0	80/37	124/37	1
14	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		486	3	2	10/37	3/37	0
15	$\Delta_j = z_j - c_j$			0	0	10/37	3/37	0

І ітерація

Значення всіх основних змінних x_1, x_2 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень відповідно обмеженням задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, при якому нічого не виробляється, сировина не використовується і значення лінійної функції $z(x)$ дорівнює нулю. Цей план не є оптимальним.

Оцінки $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = -2$ свідчать не тільки про можливість збільшення загальної вартості виробленої продукції, а і вказують на скільки збільшиться ця сума при введенні в план виробництва одиниці того чи іншого виду продукції.

Число -3 означає, що введення в план виробництва одного виробу A забезпечує збільшення прибутку на 3 грн. Число –2 означає, що введення в план виробництва одного виробу B забезпечує збільшення прибутку на 2 грн. Таким чином, з економічної точки зору найбільш доцільним буде включити до плану виробництва вироби A. Перевіримо це за допомогою математичних обчислень.

$$\theta_1 = \min\left(\frac{1431}{9};\frac{1224}{7};\frac{1328}{4}\right) = \frac{1431}{9};$$

$$\theta_2 = \min\left(\frac{1431}{5};\frac{1224}{8};\frac{1328}{16}\right) = \frac{1328}{16}.$$

$$\left|\Delta_1 \cdot \theta_1\right| = \left|\frac{1431}{9}\cdot(-3)\right| = 477 - \max,$$

$$\left|\Delta_2 \cdot \theta_2\right| = \left|\frac{1328}{16}\cdot(-2)\right| = 166.$$

Таким чином будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_1$, а виводити – $\vec{a}_3$.

Число $\theta_1 = \dfrac{1431}{9}$ з економічної точки зору означає кількість виробів A, яку підприємство може виготовити з урахуванням норм витрат і об’ємів сировини кожного виду.

Тобто обмежуючим фактором для виробництва виробів A є об’єм сировини першого виду.

II ітерація

Одержаний план $\vec{X}_1 = (159, 0, 0, 111, 692)$ не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_2 = -1/3 < 0$. Його необхідно покращити. Для цього необхідно обчислити $\theta_2 = \min\left(\dfrac{159}{5/9};\ \dfrac{111}{37/9};\ \dfrac{692}{124/9}\right) = \dfrac{111}{37/9}$.

Таким чином будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_2$, а виводити $\vec{a}_4$ тому, що випуск виробів B обмежено запасами сировини другого виду.

III ітерація

Усі оцінки $\Delta_j \ge 0$, тому план оптимальний.

$$\overset{\sqcup}{X}_{опт} = \left(144, 27, 0, 0, 320\right),\ z_{\max} = 486.$$

Висновок: для того, щоб отримати максимальний прибуток у розмірі 486 грн необхідно виготовити 144 вироби A та 27 виробів B. При цьому ресурси першого і другого видів будуть використані повністю, а ресурс третього виду буде невикористаний на 320 кг.

5.3. Транспортна задача

Транспортна задача (ТЗ) становить основу цілого класу оптимізаційних задач, пов'язаних із розподілом ресурсів при існуванні певних обмежень щодо їх кількості або умов розподілу. Модель ТЗ використовується при побудові математичних моделей, що пов'язані з управлінням фінансами та плануванням виробництва, а також задач управління, що виникають на рівні регіонів і навіть на державному рівні.

Загальна постановка ТЗ полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення (складів, постачальників) A_1, A_2, ..., A_m в n пунктів призначення (споживачів) B_1, B_2, ..., B_n. При цьому у якості критерію оптимальності береться або мінімальна вартість перевезень, або мінімальний час його постачання.

Розглянемо ТЗ з критерієм оптимальності за мінімальною вартістю перевезень. Позначимо через c_{ij} – вартість (тариф) перевезень одиниці вантажу від *i*-го постачальника до *j*-го споживача, через a_i - запаси вантажу у *i*-го постачальника (в кількості a_1, a_2, ..., a_m одиниць відповідно), через b_j – потреби у вантажу у *j*-го споживача (в кількості b_1, b_2, ..., b_n одиниць відповідно), через x_{ij} – кількість одиниць продукції, що перевозиться від *i*-го постачальника до *j*-го споживача.

Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min, \tag{5.1}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1, n}, \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}. \tag{5.4}$$

Математична модель ТЗ містить *цільову функцію* (критерій ефективності) (5.1), що досліджується на екстремум, та систему обмежень у формі системи рівнянь або нерівностей (5.2) та (5.3).

У відповідності до економічного тлумачення усі змінні ТЗ повинні бути невід’ємними, тобто необхідно виконання умови (5.4). ТЗ має сенс, якщо система обмежень сумісна та має безліч рівнянь.

Оскільки змінні x_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ задовольняють системи лінійних рівнянь (5.2) та (5.3) та умову невід'ємності (5.4), забезпечуються постачання необхідної кількості вантажу до кожного споживача, вивезення наявного вантажу від усіх постачальників, а також виключаються зворотні перевезення.

Будь-який невід’ємний розв’язок систем лінійних рівнянь (5.2) та (5.3), який визначається матрицею $X = \left(x_{ij}\right)_{m\,x\,n}$, називається *планом ТЗ*.

План $X^* = \left(x_{ij}^*\right)_{m\,x\,n}$, при якому функція (5.1) приймає своє мінімальне значення, називається *оптимальним планом ТЗ*.

Тоді задача полягає в тому, щоб на множині можливих планів перевезень $X = \left(x_{ij}\right)_{m\,x\,n}$ визначити такий, якому б відповідала найменша загальна вартість перевезень.

Запишемо математичну модель ТЗ за допомогою таблиці (табл. 5.3).

Загальна наявність вантажу у постачальників дорівнює $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а загальна потреба споживачів у вантажі дорівнює $\sum_{j=1}^{n} b_j$ одиниць.

Таблиця 5.3

Таблиця перевезень

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потреби, b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Якщо потреба споживачів у вантажі дорівнює запасу вантажу у постачальників, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{5.5}$$

то модель такої ТЗ називається ***закритою***, або ***збалансованою.*** Якщо умова (5.5) не виконується, модель ТЗ називається ***відкритою.***

Ця умова є необхідною та достатньою (***балансовою***) умовою існування розв’язку класичної ТЗ, тобто збалансованість попиту та пропозиції або загальні запаси постачальників повинні дорівнювати загальним потребам споживачів.

У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний $(n+1)$-й споживач з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ та відповідні вартості (тариф) перевезень вважаються рівними нулю: $c_{i\,n+1} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$. Отримана задача є ТЗ, для якої виконується рівність (5.5).

Аналогічно, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний $(m+1)$-й постачальник з запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ та тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1\,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$). Отримана задача є ТЗ, для якої виконується рівність (5.5).

Загальна кількість змінних x_{ij} ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) у ТЗ з m постачальниками та n споживачами становить $m \times n$, а кількість рівнянь, які утворюють основну систему обмежень (5.2) та (5.3), дорівнює $m+n$, причому кожна змінна x_{ij} входить до основної системи обмежень два рази – один раз у рівняння за рядком та один раз – у рівняння за стовпцем.

З умови (5.5) випливає, що сума всіх рівнянь основної системи обмежень за рядками (5.2) дає рівняння, яке можна отримати як суму всіх рівнянь за стовпцями (5.3). Відповідно одне з рівнянь основної системи обмежень є лінійною комбінацією усіх інших, і ранг матриці основної системи обмежень не перевищує $m+n-1$.

Оскільки передбачено, що виконується умова (5.5), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m+n-1$. Тому основна система обмежень ТЗ завжди сумісна та має безліч розв'язків, що мають $m+n-1$ відмінних від нуля невідомих.

Якщо в опорному плані число відмінних від нуля компонентів дорівнює у точності $m+n-1$, то план є ***невиродженим.*** Якщо кількість менше, ніж $m+n-1$, то такий план є ***виродженим.***

Відповідно, ***опорний план,*** тобто матриця перевезень вимірністю $m \times n$, містить не більше, ніж $m+n-1$ додатних елементів (базисних невідомих), а інші компоненти опорного плану (вільні невідомі) дорівнюють нулю.

Додатним елементам матриці перевезень відповідають заповнені клітини таблиці перевезень (табл. 5.1). Вони називаються *завантаженими.* Решту клітин залишають вільними, оскільки нульові перевезення в таблицю не записують.

Алгоритм розв'язання ТЗ

Алгоритм розв'язання ТЗ полягає в послідовності таких дій:

1) визначення будь-якого вихідного опорного плану;

2) перевірка плану на оптимальність за певним критерієм;

3) поліпшення вихідного опорного плану, якщо знайдений план не є оптимальним, тобто перехід до нового опорного плану з меншим значенням цільової функції;

4) новий план також перевіряють на оптимальність;

5) якщо план оптимальний, то він і є розв'язком ТЗ.

Пошук оптимального плану X^* передбачає цілеспрямований перегляд опорних планів X з метою їх поліпшення, але для цього спочатку треба мати вихідний опорний план. Розглянемо два методи укладання такого плану.

<u>Метод північно-західного кута</u>

Розподіл вантажу між споживачами починають із лівої верхньої клітини (північно-західного кута) таблиці перевезень. Перерозподіляємо запаси першого постачальника A_1. Спочатку задовольняємо потреби споживача B_1 за рахунок A_1. У клітину x_{11} записуємо найменше з чисел a_1 та b_1, тобто $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$. Сюди направляють вантаж у кількості $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$.

Нехай $x_{11} = a_1$, тоді перший постачальник витратив увесь ресурс і в подальшому розподілі вантажу участі не приймає, тобто цей постачальник виключається з розгляду. Якщо попит першого споживача не задовольнили у повному обсязі, тоді до клітини, що міститься в другому рядку першого стовпця, направляють вантаж у кількості: $x_{21} = \min\{a_2; b_1 - x_{11}\}$. Навпаки, якщо $x_{11} = b_1$, то перший споживач отримав потрібний йому вантаж, тоді з решти ресурсів першого постачальника задовольняють потреби другого споживача, розв'язуючи при цьому таку задачу: $x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}; b_2\}$. Такий розподіл проводять доти, доки всю таблицю не буде заповнено.

Клітини відповідного стовпця або рядка, де потреби споживача задоволені та запаси витрачені, не заповнюють.

При визначенні опорного плану методом північно-західного кута не враховується вартість перевезення одиниці вантажу, тому цей план може бути далеким від оптимального.

<u>Метод мінімальної вартості</u>

Даний метод дозволяє побудувати опорний розв’язок, який є достатньо близьким до оптимального. Він дуже простий та складається з ряду однотипних кроків, на кожному з яких заповнюється тільки одна клітина, яка відповідає мінімальної вартості c_{ij}.

Побудову вихідного опорного плану починають із визначення клітини, що має найменшу вартість перевезень c_{ij}, і туди роблять поставку обсягом $x_{ij} = \min\{a_i ; b_j\}$. Тоді виключають рядок, якщо запаси постачальника витрачені, або виключають стовпець, якщо потреби споживача повністю задоволені.

Далі знов обирають вільну клітину з найменшою вартістю та продовжують процес, доки усі запаси не будуть витрачені, а потреби задоволені.

<u>Метод потенціалів</u>

Одним із найбільш ефективних та поширених методів при визначенні оптимального плану ТЗ є метод потенціалів. Цей метод дозволяє перевірити, чи є даний опорний план оптимальним, і якщо ні, то визначити такий шлях поліпшення цього плану, за яким кожна наступна ітерація дає опорний план, котрому відповідає менше за попереднє значення цільової функції.

Якщо допустимий розв'язок $X = (x_{ij})_{m\,x\,n}$ ТЗ є оптимальним, то існують потенціали (числа) постачальників u_i (u_i – потенціал i-го постачальника), $(i = \overline{1,m})$ та споживачів v_j (v_j – потенціал j-го споживача) ($j = \overline{1,n}$), які задовольняють такі умови:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad \text{якщо } x_{ij}^* \geq 0, \tag{5.6}$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \qquad \text{якщо } x_{ij}^* = 0. \tag{5.7}$$

Група нерівностей (5.6) використовується як система рівнянь для знаходження потенціалів. Дана система має $m + n$ чисел u_i, $(i = \overline{1,m})$ та v_j, $(j = \overline{1,n})$. Число рівнянь системи, як і число відмінних від нуля координат не виродженого опорного розв'язку, дорівнює $m + n - 1$. Тому що число невідомих системи на одиницю більше, ніж число рівнянь, то одній з них можна надати значення довільно, а інші знайти з системи.

Група нерівностей (5.7) використовується для перевірки оптимальності опорного розв'язку. Ці нерівності зручно представити у такому виді:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0, \text{ якщо } x_{ij}^{\ *} = 0. \quad (5.8)$$

Числа Δ_{ij} називаються *оцінкою плану* для вільних клітин таблиці ТЗ.

Опорний розв’язок системи є оптимальним, якщо для всіх клітин таблиці оцінки не будуть додатними.

З цих нерівностей (5.6 – 5.7) випливає, що за оптимальним планом ТЗ для кожної зайнятої клітини сума потенціалів постачальника та споживача повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу між цими учасниками, а для кожної вільної клітини оптимального плану сума потенціалів повинна бути не більша за вартість перевезень.

Оцінки для вільних клітин транспортної таблиці використовуються при поліпшенні опорного розв’язку. Для цього знаходять клітину (l,k) таблиці, яка відповідає $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Якщо $\Delta_{lk} \le 0$, то розв’язок оптимальний. Якщо ж $\Delta_{lk} > 0$, то для відповідної клітини (l,k) будують цикл та поліпшують розв’язок, перерозподіляючи вантаж $\theta = \min\{x_{ij}\}$ за цим циклом.

Таким чином, для перевірки опорного плану ТЗ на оптимальність необхідно укласти систему потенціалів, що відповідає даному плану перевезень, і визначити оцінки плану за кожною клітиною транспортної таблиці. Якщо серед оцінок плану є додатні, то план не є оптимальним,

Алгоритм методу потенціалів

1) Побудувати вихідний опорний розв’язок (будь-яким методом), пере-вірити правильність його побудови за кількістю зайнятих клітин (їх по-винно бути $m + n - 1$);

2) Побудувати систему потенціалів, які відповідають опорному розв’язку. Для цього розв’язують систему рівнянь

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad \text{якщо } x_{ij} > 0,$$

яка має безліч розв’язків.

Для знаходження частинного розв’язку системи одному з потенціалів (звичайно тому, якому відповідає найбільше число зайнятих клітин) задають довільно деяке значення (частіше нуль). Останні потенціали однозначно визначаються за формулами

$$u_i = c_{ij} - v_j, \qquad \text{якщо } x_{ij} > 0, \quad (5.9)$$

якщо відомий потенціал v_j, та

$$v_j = c_{ij} - u_i, \qquad \text{якщо } x_{ij} > 0, \qquad (5.10)$$

якщо відомий потенціал u_i.

3) Перевірити виконання умови оптимальності для вільних клітин таблиці. Для цього обчислюють оцінки для всіх вільних клітин за формулами

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

та ті з них, які більше нуля, записують у ліві нижні кути клітин.

Якщо для всіх вільних клітин $\Delta_{ij} \le 0$, то обчислюють значення цільової функції та розв'язок задачі закінчується, тому що отриманий розв'язок є оптимальним.

Якщо ж мається одна або декілька клітин з додатною оцінкою, опорний розв'язок не є оптимальним.

4) Перейти до нового опорного розв'язку, на якому значення цільової функції буде менше. Для цього знаходять клітину таблиці задачі, якій відповідає найбільша додатна оцінка

$$\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}.$$

Далі будуємо цикл, який включає у свій склад дану клітину та частину клітин, зайнятих опорним розв'язком.

5) Визначають *цикл* (контур) перерозподілу й обсяг вантажу, який можна перерозподілити у відповідності з цим циклом (рис. 5.1). Клітина, якій відповідає найбільша додатна оцінка, разом з іншими із зайнятих клітин повинна утворювати замкнений контур.

Поворот можна здійснювати під прямим кутом тільки в зайнятих клітинах (або в умовно зайнятих, якщо опорний план вироджений). Усім кутовим клітинам циклу присвоюють відповідний знак. Так, вільну клітину, до якої необхідно здійснити поставку, позначають знаком «+», наступну кутову клітину циклу – знаком «–», далі – знаком «+». Знаки розставляємо доти, доки не повернемося до вихідної клітини.

Для визначення обсягу вантажу, який можна перерозподілити за цим циклом, розглядають ті кутові клітин, що увійшли до циклу перевезень зі знаком «–», і за цими клітинами визначають найменший обсяг постачання, якому відповідає найменше додатне симплексне відношення $\theta = \min\{\theta_{ij}\}$. Це і є кількість вантажу, яку необхідно перерозподілити за даним циклом.

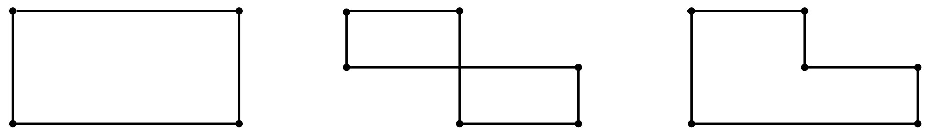

Рис. 5.3. **Види циклів перерозподілу**

6) Кількість вантажу в кожній кутовій клітині циклу змінюють на величину θ, причому так, що перевезення в усіх клітинах із знаком «-» зменшують на θ, а в усіх клітинах із знаком «+» збільшують на θ (в клітинах, які не позначені ніякими знаками, обсяг постачання не змінюється).

Внаслідок перерозподілу вантажу одержують новий опорний план, за яким цільова функція має значення, що менше за попереднє на $\Delta Z = \left|\Delta_{ij} \cdot \theta\right|$. Цей план знов перевіряємо на оптимальність за методом потенціалів (див. пункт 2).

Приклад. Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 і A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 і B_4, за яким за-гальні транспортні витрати були б найменшими. Запаси вантажу задані матрицею $A = (180;400;280)$, потреби споживачів – матрицею $B = (240;320;120;180)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3x4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Загальні запаси вантажу всіх постачальників становлять:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 280 = 860.$$

Це дорівнює загальним потребам усіх споживачів:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860.$$

Отже, ТЗ є закритою.

Запишемо вихідні дані задачі у вигляді таблиці й складемо вихідний опорний план перевезень за методом північно-західного кута.

Згідно з цим методом першою заповнюється клітинка, що має індекси $i = 1$, $j = 1$.

Порівнявши запаси постачальника A_1 і потреби споживача B_1, визначаємо, що обсяг постачання до цієї клітинки становить 180 одиниць.

Оскільки постачальник A_1 вичерпав свої можливості, а споживачеві B_1 потрібно ще 60 одиниць, то наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 1$, направивши туди необхідні 60 одиниць вантажу. Тепер потреби споживача B_1 задовольнили в повному обсязі, а запас постачальника A_2 зменшився до 340 одиниць.

Наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 2$. Відповідно до потреб споживача B_2 направляємо туди 320 одиниць вантажу. Оскільки в постачальника A_2 залишилося ще 20 одиниць, поставимо цей вантаж до клітинки $i = 2$, $j = 3$. Тепер постачальник A_2 вичерпав свої можливості, але споживачеві B_3 необхідні ще 100 одиниць.

Візьмемо цей вантаж у постачальника A_3, тобто робимо поставку такого обсягу до клітинки $i = 3$, $j = 3$. У постачальника A_3 лишилося ще 180 одиниць, але рівно стільки необхідно споживачеві B_4. Поставимо ці 180 одиниць до клітинки $i = 3$, $j = 4$.

Отже, весь вантаж було розподілено та потреби всіх споживачів задовольнили.

Маємо вихідний опорний план X_0, який подано в табл. 5.4.

За вихідним опорним планом вартість перевезень становить:

$$z(X_0) = 22 \cdot 180 + 9 \cdot 60 + 12 \cdot 320 + 32 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 14 \cdot 180 = 12500.$$

Цей план є невиродженим, оскільки кількість заповнених клітинок таблиці становить $m + n - 1 = 6$, де m – кількість постачальників ($m = 3$),

n – кількість споживачів ($n = 4$). Отже, кількість заповнених клітинок дорівнює числу базисних невідомих.

Перевіримо за методом потенціалів, чи є вихідний план оптимальним. З цією метою кожному постачальникові поставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачеві – потенціал v_j. Значення потенціалів визначаємо за умов, що для кожної заповненої клітинки таблиці перевезень сума потенціалів постачальника та споживача дорівнює вартості перевезень одиниці вантажу між цими учасниками, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$. Отже, для базисних клітинок отримуємо систему з 6-ти рівнянь, яка містить 7 невідомих:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 22, \\ u_2 + v_1 = 9, \\ u_2 + v_2 = 12, \\ u_2 + v_3 = 32, \\ u_3 + v_3 = 10, \\ u_3 + v_4 = 14. \end{cases}$$

Така система має нескінчену множину розв'язків. Знайдемо будь-який частинний розв'язок. Вибираємо довільно значення одного з потенціалів.

Таблиця 5.4

Вихідний опорний план X_0

Постачальники	Споживачі				**Запаси, a_i**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	22 180	15	40	18	180
A_2	9 60	12 320	32 20	16	400
A_3	11	38	10 100	14 180	280
Потреби, b_j	240	320	120	180	860 \ 860

Нехай $u_1 = 0$, тоді з системи рівнянь знаходимо значення потенціалів усіх інших учасників: $v_1 = 22$, $u_2 = -13$, $v_2 = 25$, $v_3 = 45$, $u_3 = -35$, $v_4 = 49$.

Тепер перевіряємо, чи виконується для всіх вільних клітинок таблиці перевезень умова: $u_i + v_j \le c_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$, тобто чи є оцінки всіх вільних клітинок $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ недодатніми.

Складемо таблицю потенціалів таким чином. До кожної клітинки таблиці, яка відповідає базисним змінним, ставимо значення c_{ij}, а для вільних клітинок у правому верхньому куті вказуємо вартість перевезення одиниці вантажу за цією клітинкою c_{ij}, а в лівому нижньому куті – суму потенціалів учасників перевезень за цією клітинкою $u_i + v_j$.

Отримаємо таблицю потенціалів (табл. 5.5).

Оскільки в табл. 5.3 є чотири клітинки з додатною оцінкою: $\Delta_{12} = 10$, $\Delta_{13} = 5$, $\Delta_{14} = 31$, $\Delta_{24} = 20$, то план X_0 не є оптимальним. Його можна покращити, перерозподіливши вантаж.

Найбільшою є додатна оцінка $\Delta = \max\{10; 5; 31; 20\} = 31$, яка відповідає клітинці $i = 1$, $j = 4$, і туди зробимо поставку.

Таблиця 5.5

Таблиця потенціалів для плану X_0

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 45$	$v_4 = 49$
$u_1 = 0$	22	15 / 25	40 / 45	18 / 49
$u_2 = -13$	9	12	32	16 / 36
$u_3 = -35$	11 / - 13	38 / - 10	10	14

У табл. 5.6 перевезень, котра становить план X_0, побудуємо замкнутий цикл перерозподілу (вказано пунктиром).

Таблиця 5.6

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_0

План X_0	-Θ 180			+Θ
	+Θ 60	320	-Θ 20	
			+Θ 100	-Θ 180

Починаючи зі знака «+», яким позначимо клітинку з найбільшою додатною оцінкою, розставимо по черзі знаки «–» та «+» у всіх кутах (поворотах). Кількість вантажу, що потрібно перерозподілити за цим циклом, визначаємо як найменшу з поставок, які відповідають «від'ємним» кутам циклу: $\theta = \min\{180;\, 20;\, 180\} = 20$. Згідно зі знаками, що проставлені в кутах циклу, перерозподілимо 20 одиниць вантажу й отримаємо новий опорний план X_1, при переході до якого загальна вартість перевезень повинна зменшитися на величину $\Delta Z = \Delta \cdot \theta = 31 \cdot 20 = 620$, тобто цільова функція повинна дорівнювати $Z(X_1) = 12\,500 - 620 =$ $= 11\,880$.

Перевіримо, чи є план X_1 оптимальним (табл. 5.7). Для цього складемо відповідну йому таблицю потенціалів (табл. 5.8).

Таблиця 5.7

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_1

План X_1	-Θ 160	+Θ		20
	+Θ 80	-Θ 320		
			120	160

План X_1 не є оптимальним, оскільки має додатні оцінки $\Delta_{12} = 10$ і $\Delta_{31} = 8$. Визначаємо, що $\Delta = \max\{10;\, 8\} = 10$, отже, необхідно зробити поставку до клітинки $i = 1$, $j = 2$.

Цикл перерозподілу вказано пунктиром у таблиці перевезень за планом X_1. За цим циклом перерозподіляємо вантаж у кількості: $\theta = \min\{160;\, 320\} = 160$.

Таблиця 5.8

Таблиця потенціалів для плану X_1

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22	15 / 25	40 / 14	18
$u_2 = -13$	9	12	32 / 11	16 / 5
$u_3 = -4$	11 / 18	38 / 21	10	14

Складаємо новий план X_2 (табл. 5.9) та перевіряємо його на оптимальність (табл. 5.10).

За планом X_2 загальна вартість перевезень повинна становити:

$$Z(X_2) = 11\,880 - 10 \cdot 160 = 10\,280.$$

Таблиця 5.9

План перевезень X_2

План X_2		160		20
	240	160		
			120	160

Таблиця 5.10

Таблиця потенціалів для плану X_2

u_i \ v_j	$v_1 = 12$	$v_2 = 15$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22 / 12	15	40 / 14	18
$u_2 = -3$	9	12	32 / 11	15 / 16
$u_3 = -4$	8 / 11	38 / 11	10	14

Оскільки всі оцінки є недодатніми, то план X_2 оптимальний. Загальна вартість перевезень за цим планом мінімальна й дорівнює:

$$Z_{\min} = Z(X_2) = 160 \cdot 15 + 20 \cdot 18 + 240 \cdot 9 + 160 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 14 =$$

$$= 10\,280.$$

Відповідь: загальна вартість перевезень мінімальна за планом:

$$X_{опт.} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 18 \\ 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Відкрита модель транспортної задачі

Відкрита модель задачі має місце, коли не виконується баланс

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j , \qquad (5.11)$$

На практиці дуже часто зустрічаються такі задачі. Які особливості цих розв’язань?

1. У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний $(n+1)$-й споживач з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ для зведення відкритої моделі до закритої та відповідні вартості (тариф) перевезень вважаються рівними нулю: $c_{i\,n+1} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$. Отримана задача є ТЗ, для якої виконується рівність (5.5).

2. У випадку перевищення потреби над запасом, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний $(m+1)$-й постачальник з запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ для зведення відкритої моделі до закритої та тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1\,j} = 0 \ (j = \overline{1,n})$. Отримана задача є ТЗ, для якої виконується рівність (5.5).

Розв’язання отриманої задачі проводиться як при закритій моделі. У оптимальному плані заповнені клітини у фіктивного споживача вказують на те, що у постачальника залишився нереалізований вантаж, а заповнені клітини у фіктивного постачальника вказують на те, що споживач недоодержить деяку кількість вантажу.

Приклад. Розв'язати транспортну задачу, заданою табл. 5.11.

Таблиця 5.11

Вихідні дані

Поста-чальники	**Споживачі**			**Запаси,** a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	3	2	40
A_2	6	5	1	20
Потреби, b_j	15	5	10	60 / 30

Розв'язання

Знайдемо загальну наявність вантажу у постачальників:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2 = 40 + 20 = 60$$

та загальна потребу споживачів у вантажі:

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = b_1 + b_2 + b_3 = 15 + 5 + 10 = 30$$

Маємо, що потреба споживачів у вантажі менша, ніж запас вантажу у постачальників, тобто

$$\sum_{j=1}^{3} b_j < \sum_{i=1}^{2} a_i$$

або модель задачі є відкритою.

У випадку перевищення запасу над потребою вводимо фіктивного 4-го споживача з потребою $b_4 = \sum_{i=1}^{2} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j = 60 - 30 = 30$ для зведення відкритої моделі до закритої та відповідні вартості (тариф) перевезень вважаються рівними нулю: $c_{i4} = 0 \quad (i = \overline{1,2})$. Отримана задача є закритою ТЗ, для якої виконується рівність (5.5).

Складаємо вихідний план методом найменшої вартості, вважаючи, що мінімальним елементом для реальних постачальників та споживачів є $c_{11} = 1$ або $c_{23} = 1$. В останню чергу заповнюємо клітини, які відповідають фіктивному споживачу (табл. 5.12).

Таблиця 5.12

План перевезень X_0

A_i \ B_j	Споживачі				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 15	3 5	2	0 20	40
A_2	6	5	1 10	0 10	20
b_j	15	5	10	30	60 \ 60

Отриманий вихідний опорний план X_0 є невиродженим, тому що число зайнятих клітин дорівнює 5 та дорівнює числу $m+n-1$. Перевіряємо вихідний опорний план X_0 на оптимальність, використовуючи метод потенціалів (табл. 5.13, 5.14).

Таблиця 5.13

План перевезень X_1

План X_1	15	5		20
			10	10

Таблиця 5.14

Таблиця потенціалів для плану X_1

u_i \ v_j	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=-1$
$u_1=1$	1	3	2 \ 1	0
$u_2=1$	6 \ 1	5 \ 3	1	0

Критерій оптимальності виконується, тому що всі оцінки $\Delta_{ij} \le 0$. Вихідний опорний план є оптимальним.