МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Кафедра вищої математики та
економіко-математичних методів

Методичні рекомендації до практичних робіт з навчальної дисципліни «Вища математика…»

Харків, 2017 р.

Зразок виконання завдань

1. Вирішити за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}. \quad \text{б)}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}.$$

Рішення. а) Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 5 + 8 - 6 + 6 - 30 = 0.$$

Обчислимо Δ_1:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 5 + 20 - 15 - 6 - 30 = 1.$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta_{x_1} \neq 0,$ то система не має рішень.

$$\text{б)}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}.$$

Рішення:

Складемо визначник системи Δ з коефіцієнтів при невідомих а також визначники Δx_1, Δx_2 и Δx_3, в котрих стовпець коефіцієнтів при відповідному невідомому замінений стовпцем вільних членів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 1 \cdot -2 + 2 = \\ \leftarrow 1 \cdot -1 + 3 \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 19 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 3 \cdot (-3) + 1 \\ \leftarrow 3 \cdot 4 + 2 \\ \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 19 & 7 \end{vmatrix} = -35 + 19 = -16.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 3 \\ 0 & -31 & -10 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 1 \cdot (-2) + 2 \\ \leftarrow 1 \cdot (-1) + 3 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -31 & -10 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 62 - 70 = -8.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & -31 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 1 \cdot (-2) + 2 \\ \leftarrow 1 \cdot (-1) + 3 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -31 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 31 = -24.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Відповідь: $(2;1;3)$

2. Вирішити системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана—Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -13 \end{cases}$.

Рішення.

Елементарними перетвореннями зведемо розширену матрицю AB системи,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

к верхньому трикутному виду.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2 & -1\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow\end{matrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 7 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2 & -1\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow\end{matrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 7 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +1\\ \hookleftarrow\end{matrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки ненульових рядків в приведеної матриці дві, то $rg\left(\bar{A}\right)=2$.

Перейдемо від приведеної матриці до системі двох рівнянь з трьома змінними:

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=2\\ -7x_2+5x_3=1\end{cases}.$$

Оскільки $rg\left(\bar{A}\right)=2$, то в матриці системі існує визначник, не рівний нулю. Виберемо його. Це наприклад, $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -7\end{vmatrix}=1\cdot(-7)-0\cdot 3=-7\neq 0$. Змінні x_1, x_2, які відповідні цим стовпцям, а саме $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}3\\ -7\end{pmatrix}$, звуться базисними, інші -- (x_3) вільними. У нас вільна змінна одна -- x_3. Залишим доданки з базисними змінними зліва, а вільну змінну x_3 - перенесемо вправо:

$$\begin{cases}x_1+3x_2=2+x_3\\ -7x_2=1-5x_3\end{cases}.$$

В результаті отримана неоднорідна система двох рівнянь з визначником не рівним нулю. Тому її можна вирішити, наприклад, методом виключення:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 - 3x_2 = 2 + x_3 - 3\left(-\dfrac{1}{7}\right)\left(1 - 5x_3\right) = \dfrac{17}{7} + \dfrac{22}{7}x_3; \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}\left(1 - 5x_3\right). \end{cases}$$

Таким чином, загальне рішення системи має вид $X = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{7} + \dfrac{22}{7}x_3 \\ -\dfrac{1}{7}\left(1 - 5x_3\right) \\ x_3 \end{pmatrix}$, де змінна x_3 виконує роль параметра. Его можна перепозначити як $x \equiv t$. Кожному значенню t відповідає свій вектор рішення системи лінійних рівнянь. Наприклад, при $t = 7$ маємо вектор рішення

$$\begin{pmatrix} \dfrac{17}{7} + 22 \\ -\dfrac{1}{7}\left(1 - 5 \cdot 7\right) \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{171}{7} \\ \dfrac{34}{7} \\ 7 \end{pmatrix}$$. При $t = 0$ □□ $\begin{pmatrix} \dfrac{17}{7} \\ -\dfrac{1}{7} \\ 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{7} + \dfrac{22}{7}x_3 \\ -\dfrac{1}{7}\left(1 - 5x_3\right) \\ x_3 \end{pmatrix}$.

б) Елементарними перетвореннями зведемо розширену матрицю AB системи

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & -13 \end{pmatrix}$$

к верхньому трикутному виду.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{2}{5} \\ \\ \hookleftarrow \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{17}{5} & -\frac{38}{5} & -\frac{93}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{17}{5} \\ \hookleftarrow \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{72}{5} & -\frac{144}{5} \end{pmatrix}$$

Оскільки ненульових рядків в приведеної матриці три, то $r = rg(A) = rg(AB) = 3$. Оскільки $r = n = 3$ ($n-$ число невідомих в системі рівнянь) , то у системи є єдине рішення. Знайдемо його.

Розділимо останній рядок на $-\frac{72}{5}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -2 \quad -4 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} :5 \\ \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми звели розширену матрицю АВ к діагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

с одиницями на головної діагоналі.

Перейдемо від цієї матриці до системі трьох рівнянь зі змінними:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

В результаті отримано єдине рішення системи: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Дани координати точок $A\ 2,5,5$, $B\ 4,7,3$, $C\ -1,4,4$ и $D\ 4,7,1$. Перевірити, чи є чотирикутник $ABCD$ трапецієї та чи перпендикулярні його діагоналі. Знайти довжини діагоналей.

Рішення.

Знайдемо вектори: $\overrightarrow{AB}\ 4-2, 7-5, 3-5$, тобто $\overrightarrow{AB}\ 2,2,-2$, $\overrightarrow{BC}\ -1-4, 4-7, 4-3$, тобто $\overrightarrow{BC}\ -5,-3,1$, $\overrightarrow{CD}\ -2+1, -2-4, 6-4$, тобто

$\overrightarrow{CD}\ \ 3,3,-3\ \ $, $\overrightarrow{AD}\ \ 4-2,7-5,1-5\ \ $, тобто $\overrightarrow{AD}\ \ 2,2,-4\ \ $.

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ паралельні, так как $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$, а $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не паралельні, оскільки $\frac{-5}{2}\neq\frac{-3}{2}\neq\frac{1}{-4}$, тобто, это трапеция. Диагонали AC и BD. Знайдемо $\overrightarrow{AC}\ \ -1-2,4-5,4-5\ \ $, тобто $\overrightarrow{AC}\ \ -3,-1,-1\ \ $, $\overrightarrow{BD}\ \ -1-4,7-7,1-3\ \ $, тобто $\overrightarrow{BD}\ \ -5,0,-2\ \ $. Якщо $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярні, то скалярний добуток $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ дорівнює нулю.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-3\cdot\ \ -5\ \ +\ \ -1\ \ \cdot 0+\ \ -1\ \ \cdot\ \ -2\ \ =15+2=17\neq 0,$$

тобто $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не перпендикулярні. Їх довжини:

- $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\ \ -3\ \ ^2+\ \ -1\ \ ^2+\ \ -1\ \ ^2}=\sqrt{11}$,
- $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{\ \ -5\ \ ^2+0^2+\ \ -2\ \ ^2}=\sqrt{29}$.

Завдання 4. Дани координати точок $A\ \ 2,1\ \ $, $B\ \ 5,-3\ \ $ и $C\ \ 3,4\ \ $. Скласти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти и медіани, проведених через вершину A;

в) рівняння прямої, яка проходить через вершину B паралельно стороні AC.

Побудувати трикутник ABC и згадані прямі.

Рішення.

Рівняння сторони AB — це рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки A и B.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-1}{-3-1},\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4},$$

$$-4x-3y+11=0,\ 4x+3y-11=0.$$

Рівняння AB: $4x+3y-11=0$.

Рівняння висоти AF, проведеної з вершини A. Нормальний вектор висоти — це $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=\ \ 3-2,4+3\ \ $, тобто $\vec{n}\ \ 1,7\ \ $. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $A\ \ x-x_0\ \ +B\ \ y-y_0\ \ =0$. $\vec{n}\ \ A,B\ \ $, точка $\ \ x_0,y_0\ \ $ — це точка $A\ \ 2,1\ \ $.

$$1\cdot\ \ x-2\ \ +7\ \ y-1\ \ =0.$$

Рівняння висоти: $x+7y-9=0$.

Рівняння медіани: Знайдемо середину відрізка BC, тобто точку K.

$$x_K=\frac{x_B+x_C}{2},\ y_K=\frac{y_B+y_C}{2},$$

$$x_K=\frac{5+3}{2}=4,\ y_K=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}.$$

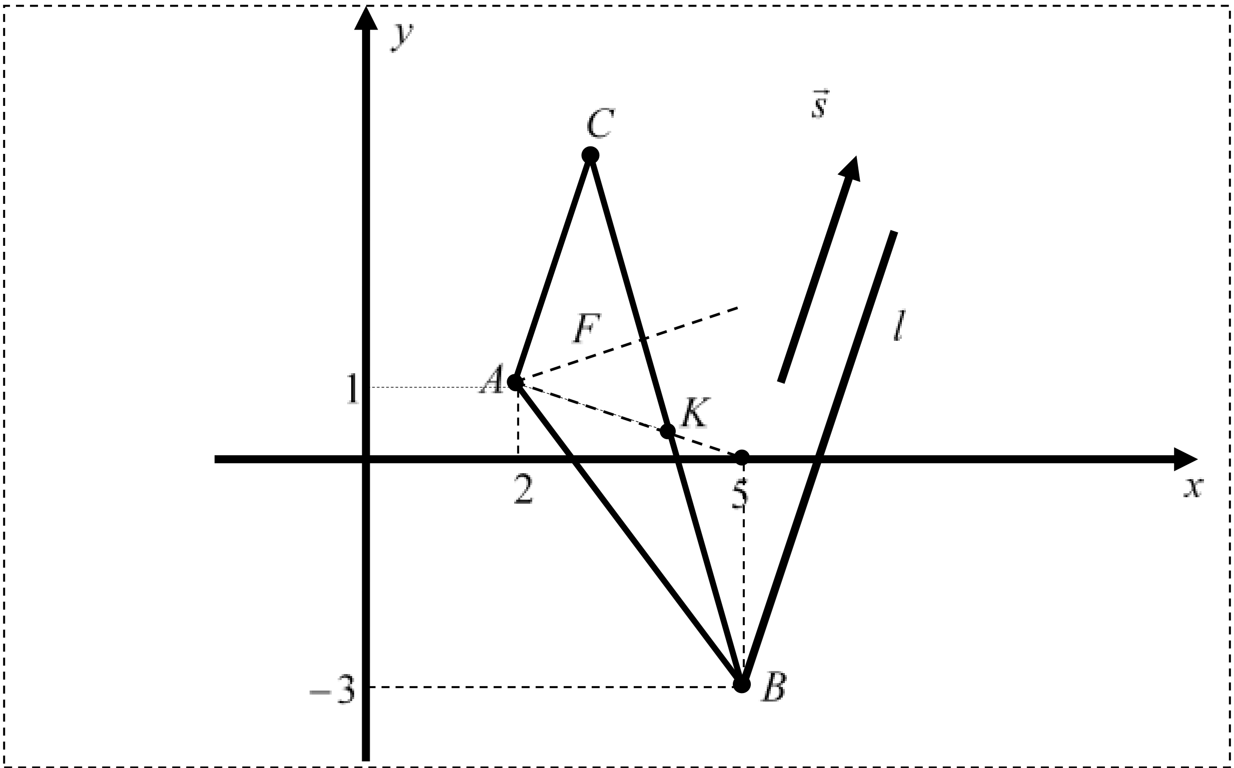

Рис. 1. Геометрична ілюстрація рішення.

AK — пряма, яка проходить через дві точки: $A\ \ 2,1$ и $K\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}-1},\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}},$$

$$x-2=-4\ \ y-1\ \ ,\ x-2=-4y+4$$

и, остаточно, $x+4y-6=0$ — рівняння медианы.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через точку $B\ \ 5,-3$, паралельно стороні AC. $\overrightarrow{AC}\ \ 3-2,4-1\ =\overrightarrow{AC}\ \ 1,3\ =\vec{s}\ \ m,n$. Використуємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \quad \frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{3}.$$

Рівняння прямої l: $3x-y-18=0$.

5. Знайти в трикутнику ABC с вершинами $A\ \ 3;2;-3\ \ $, $B\ \ 5;1;1\ \ $ і $C\ \ 1;-2;1$ внутрішній кут при вершині C.

Рішення:.

Шуканий кут φ – це кут між векторами $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\ \ -2;-4;4\ \ $ і $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\ \ 4;3;0\ \ $. Отримуємо:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-3)+4\cdot 0}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{16+9+0}}=\frac{20}{6\cdot 5}=\frac{2}{3}.$$

Тоді, $\varphi=\arccos\frac{2}{3}$.

6. Знайти для трикутника с вершинами $A\ \ 1;-1;2\ \ $, $B\ \ 5;-6;2\ \ $, $C\ \ 1;3;-1$ довжину его висоти, яка проведена з вершини B.

Рішення.

Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знаходимо:

$\overrightarrow{AB}=\ \ 4;-5;0\ \ $, $\overrightarrow{AC}=\ \ 0;4;-3\ \ $.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25, \quad S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

Відомо що $S_\Delta=\frac{ah}{2}$, або у даному разі: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot h_{AC}$, відкіля:

$$h_{AC}=\frac{2S_{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2\cdot 12{,}5}{\sqrt{0+16+9}}=\frac{25}{5}=5.$$

Завдання 7. Найти границі функції.

Рішення.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-2}{7x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{5}{7};$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\sqrt{x+4}}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\sqrt{x+4}}{(x-5)(x+5)}=\frac{3}{10}=0{,}3;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+5x}-1\right)\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x-1}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=\frac{5}{8\cdot 2}=\frac{5}{16}.$$

Завдання 8. Найти похідні функцій.

Функції та похідні:

а) $y=7x^3+5x^2+3x-2$, $y'=7\cdot 3x^2+5\cdot 2x+3=21x^2+10x+3$;

б) $y=\dfrac{5x}{tgx}$, $y'=\dfrac{(5x)'\cdot tgx-5x\cdot (tgx)'}{tg^2x}=\dfrac{5\cdot tgx-\dfrac{5x}{\cos^2 x}}{tg^2x}=$

$$=\frac{5\cdot tgx\cos^2 x-5x}{tg^2x\cos^2 x}=\frac{5\cdot\sin x\cos x-5x}{\sin^2 x}=5\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-x}{\sin^2 x}=$$

$$=5\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-x}{\sin^2 x}=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 2x-2x}{\sin^2 x};$$

в) $y=x\cdot 7^x$, $y'=(x)'\cdot 7^x+x\cdot (7^x)'=7^x+x\cdot 7^x\ln 7=7^x(1+x\cdot\ln 7)$;

г) $y=2^{-x^5}$, $y'=2^{-x^5}\cdot\ln 2\cdot(-5x^4)$.

Завдання 9. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{31}{6}.$$

Рішення. 1. ОДЗ: $x\in\mathrm{R}$.

2. $y(x)$ є функцією загального виду, оскільки

$$y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-\frac{3}{2}(-x)^2-4(-x)+\frac{31}{6}=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{31}{6}\neq\pm y(x).$$

3. $y(x)$ не є періодичною функцією, оскільки не існує такого числа T, що для будь-яких $x \in R$: $f(x+T) = f(x)$.

4. Точки перетину с осями координат:

С віссю Ох: $y = 0 \Rightarrow 2x^3 - 9x^2 - 24x + 31 = 0$. Значення $x = 1$ є коренем цого рівняння, тому ліва частина рівняння приводиться к виду $2x^3 - 9x^2 - 24x + 31 = (x-1)(2x^2 - 7x - 31)$. Рішеннями квадратного рівняння $2x^2 - 7x - 31 = 0$ є два значення:

$$x_1 = \frac{7-\sqrt{22}}{4} \approx -2{,}4; \qquad x_2 = \frac{7+\sqrt{22}}{4} \approx 5{,}9.$$

5. Інтервали монотонності функції и точки екстремумів:

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x - 4 = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1).$$

Необхідна умова екстремуму: $y'(x_0) = 0$ в точці x_0 дає два значення: $x_0 = 4$ и $x_0 = -1$. В ціх точках можуть бути екстремуми. Щоби в цьому переконатися, необхідно використатися достатньою умовою екстремуму: при переході через точку x_0 знак похідної y' повинен змінюватися з $+$ на $-$, або з $-$ на $+$. Складемо таблицю знаків y':

Интервалы	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 4)$	4	$(4; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

З таблиці видно, що при переході через ці точки знак похідної y' змінюється з $+$ на $-$ в точці $x = -1$ (max) и с $-$ на $+$ в точці $x = 4$ (min).

Знайдемо значення функції в ціх точках:

$$y_{\max}(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 + \frac{31}{6} = 7\frac{1}{3};$$

$$y_{\min}(4) = \frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16 - 4 \cdot 4 + \frac{31}{6} = -13\frac{1}{2}.$$

6. Інтервали опуклості та точки перегину.

$$y''=\left(x^2-3x-4\right)'=2x-3=0 \quad x=1.5.$$

Дослідимо знаки y'' зліва и справа від цієї точки:

Інтервали	$(-\infty;1.5)$	1.5	$(1.5;\infty)$
y''	$-$		$+$
y			

В точці перегину функція приймає значення:

$$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}-4\cdot\frac{3}{2}+\frac{31}{6}=-3\frac{1}{12}.$$

Асимптоти. Очевидно, що функція $y(x)$ не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти. Для цього обчислимо границі:

на $-\infty$: $\kappa_-=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-9x^2-24x+31}{x}=+\infty$. Слід, $y(x)$ не має похилої асимптоти при $x\to-\infty$. Аналогічно,

на $+\infty$: $\kappa_+=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-9x^2-24x+31}{x}=+\infty$. Слід, $y(x)$ не має похилої асимптоти також при $x\to+\infty$.

Зараз можна побудувати графік функції $y(x)$.

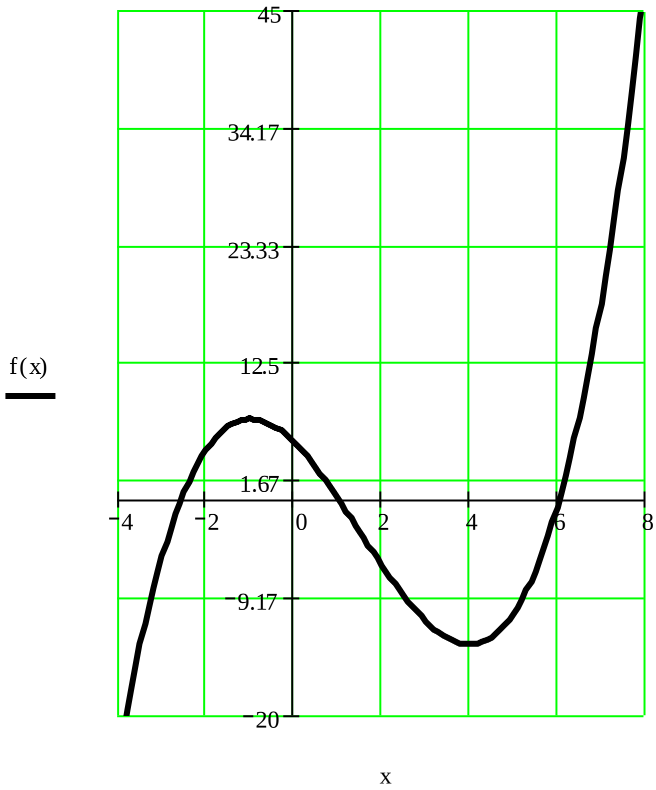

Рис. 5

Завдання 10. Обчислити невизначені інтеграли.

Рішення.

а) $\int \; x^2+2x-5 \; dx=\dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2}-5x+C=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-5x+C$;

б) $\int x^2\ln x dx=\begin{vmatrix} \ln x=u & x^2dx=dv \\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=\dfrac{x^3}{3}\end{vmatrix}=$

Формула інтегрування частинами: $\int udv=uv-\int vdu$. Оскільки інтеграл від $\ln x$ не є табличним, позначимо її через u, а $x^2dx=dv$.

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3\cdot\ln x}{3}-\frac{1}{3}\int x^2dx=$$

$$=\frac{x^3\cdot\ln x}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C;$$

в) $\int tg^4x\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\cos^2 x}= \; tgx \; ' \\ tgx=t\end{vmatrix}=\int t^4dt=\dfrac{t^5}{5}+C=\dfrac{\; tgx \; ^5}{5}+C$.

г) $\int \frac{x^2-1 \quad x+2}{\sqrt{x}}dx$.

Рішення.

Спочатку перетворимо підінтегральну функцію

$$\frac{x^2-1 \quad x+2}{\sqrt{x}} = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді,

$$\int \frac{x^2-1 \quad x+2}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx + 2\int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x} + C.$$

д) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

Рішення.

Оскільки $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$, то

$$\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} = \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int\left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\right)dx.$$

Тобто,

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}tgx + \frac{1}{2}x + C.$$

е) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Рішення.

Підінтегральну функцію перетворимо наступним чином:

$$\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 - \sin x.$$

Маємо:

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int(1-\sin x)\,dx=\int dx-\int\sin x dx=x+\cos x+C.$$

ж) $\displaystyle\int\frac{\ln^2 x}{x}dx.$

Рішення.

Хай $\ln x=t$, тоді $\dfrac{dx}{x}=dt$.

$$\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C.$$

з) $\displaystyle\int\frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

Рішення.

Хай $e^x=t$, тоді $e^x dx=dt$.

$$\int\frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}=\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{e^x}{3}+C.$$

и) $\displaystyle\int\frac{\cos x dx}{9+\sin^2 x}$

Рішення.

Хай $\sin x=t$, тоді $\cos x dx=dt$.

$$\int\frac{\cos x dx}{9+\sin^2 x}=\int\frac{dt}{9+t^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{3}+C.$$

л) $\displaystyle\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Рішення.

Хай $\sqrt[3]{x}=t$, тоді $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=dt.$

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=3\int\sin\sqrt[3]{x}\,\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}=3\int\sin t dt=-3\cos t+C=-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$$

11. Знайти загальне рішення рівняння

а) $x\sqrt{9-y^2}dx-y(4+x^2)dy=0$.

Рішення. Розділимо змінні в даному рівнянні, розділивши обидві його частини на $(4+x^2)\sqrt{9-y^2}$:

$$\frac{x}{4+x^2}dx-\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}dy=0.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо:

$$\int\frac{x}{4+x^2}dx-\int\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}dy=0,\ \frac{1}{2}\ln(4+x^2)+\sqrt{9-y^2}+\ln C=0,$$

або

$$lnC^2(4+x^2)+2\sqrt{9-y^2}=0.$$

Це і є загальний інтеграл даного рівняння.

б) Найти частинне рішення рівняння $y'=2\sqrt{y}\,ln\,x$, яке задовольняє початковим умовам: $y|_{x=e}=1$.

Рішення. Розділяючи змінні в даному рівнянні, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\,ln\,x,\qquad \text{або}\qquad \frac{dy}{2\sqrt{y}}=ln\,xdx.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний інтеграл даного рівняння:

$$\sqrt{y}=x\,ln\,x-x+C,$$

де $\int\ln xdx$ знаходимо інтегруванням частинами.

Використовуючи початкові умови, підставимо в загальний інтеграл рівняння: $x=e,y=1$ та знайдемо C:

$$1=e\,ln\,e-e+C,\ \text{відкіля}\ C=1.$$

Тоді частинне рішення матеме вид:

$$y=(x\,ln\,x-x+1)^2.$$

12. Найти загальні рішення наступних рівнянь:

а) $2y''+5y'+2y=0$; б) $y''+4y'+4y=0$;

в) $y''-4y'+13y=0$.

Рішення. Для кожного з рівнянь складаємо характеристичні рівняння:

а) $2k^2+5k+2=0$, $k_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\dfrac{-5\pm3}{4}$,

$k_1=-2$, $k_2=-\dfrac{1}{2}$; $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$;

б) $k^2+4k+4=0$, $k_1=k_2=-2$ $\qquad y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$;

в) $k^2 - 4k + 13 = 0$, $\quad k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$,

$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

14. Знайти частинні похідні функцій:

1) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

Рішення.

Використаємо формулу похідної від функції $z = \mathrm{arctg}\,u$, де u – складений аргумент:

$$z' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Тоді знаходимо:

$$z'_x = \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{x}}{y})^2} \cdot (\frac{\sqrt{x}}{y})'_x = \frac{1}{1+\frac{x}{y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}y} = \frac{y}{2(y^2+x)\sqrt{x}},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{x}}{y})^2} \cdot (\frac{\sqrt{x}}{y})'_y = \frac{1}{1+\frac{x}{y^2}} \cdot (-\frac{\sqrt{x}}{y^2}) = -\frac{\sqrt{x}}{y^2+x};$$

19. Найти екстремуми функції $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Рішення.

Знаходим частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Далі знаходимо критичні точки з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -9, \\ -x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Точка $M(-4;1)$ є критичною точкою.

Знаходимо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Оскільки ці похідні не залежать від x та y, то $A=2$, $B=-1$, $C=2$, а $\Delta = AC - B^2 = 2\cdot 2 - 1 = 3 > 0$. Це означає, що точка $M(-4;1)$ є екстремумом. Оскільки $A=2>0$, то точка $M(-4;1)$ – є точкою мінімума. Значення функції z в цієї точці:

$$z_{min}(-4,1) = 16+4+1-36-6+20=-1.$$

20. а) Використовуючи признак Даламбера, дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Рішення.

Тут: $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Тому: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1, \text{ оскільки } e \approx 2{,}7.$$

І тому даний ряд розбігається.

б) За допомогою радикального признака Коши дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Рішення.

Для даного ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3e} < 1,$$

отже, ряд збігається.

в) Використовуючи інтегральний признак, дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+5}$.

Рішення. Тут $u_n = \dfrac{n}{n^2+5}$. Покладаючи $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$, застосовуємо інтегральний признак збіжності:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+5} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{xdx}{x^2+5} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} ln(x^2+5)\Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (ln(b^2+5) - ln6) = \infty.$$

Таким чином, даний ряд розбігається.