ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Тема 4. Основні теореми теорії ймовірностей

Згадаємо теоретичний матеріал

Теорема (про ймовірність протилежної події). Якщо ймовірність події A дорівнює $P(A)$, ймовірність протилежної до неї події $\overline{A}$ дорівнює:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема додавання ймовірностей (випадок двох подій**).** *Якщо події A_1, A_2 <u>несумісні</u>, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто*

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

<u>Якщо не вказано про несумісність</u> подій A_1, A_2, то:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Теорема додавання ймовірностей (випадок трьох подій**).** *Якщо події A_1, A_2, A_3 <u>попарно несумісні</u>, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто*

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

<u>Якщо не вказано про попарну несумісність</u> подій A_1, A_2, A_3, то:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

Формула для обчислення умовної ймовірності

Нехай (Ω, P) – заданий дискретний ймовірнісний простір, і визначені дві підмножини простору елементарних подій $A, B \subset \Omega$, $A \neq B$, і $P(B) \neq 0$. При заданих умовах *умовна ймовірність події A, при умові, що подія B настала,* дорівнює:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Поняття умовної ймовірності події *A*, при умові, що подія *B* настала, добре ілюструється також за допомогою діаграм.

Зауваження. Для класичної схеми, як і раніше, можемо обчислювати цю ймовірність як відношення потужності множин: $P(A/B) = \frac{|A \cdot B|}{|B|}$. Також умовна ймовірність часто обчислюється і без використання цих формул.

Приклад. В компанії було 15 дівчини, з яких 8 білявок, 6 заміжніх, 3 білявок та заміжніх одночасно. Хлопця познайомили з випадковою дівчиною, яка виявилась білявкою. Яка ймовірність, що вона заміжня?

Розв'язання

Позначимо через події:

– *A* – обрана дівчина заміжня;
– *B* – обрана дівчина білявка.

Нам необхідно обчислити умовну ймовірність того, що дівчина заміжня, при умові, що вона білявка, тобто $P(A/B)$:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

де $P(AB)$ – ймовірність того, що обрана дівчина є одночасно і заміжньою, і білявкою;

$P(B)$ – ймовірність того, що обрана дівчина є білявкою.

З умов задачі:

$$P(AB)=\frac{3}{15},$$
$$P(B)=\frac{8}{15},$$

отже:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{3}{8}.$$

Ту ж саму відповідь ми б отримали, якщо би відразу записали формулу через потужності множин:

$$P(A/B)=\frac{|AB|}{|B|}=\frac{3}{8}.$$

Формула для обчислення умовної ймовірності є вкрай важливою не стільки для знаходження умовних ймовірностей, які нескладно обчислювати в простих випробуваннях, скільки для наступних теорем. І насправді не стільки ця формула, скільки її важливий наслідок, є значним результатом для подальшого використання.

Теорема ймовірностей. Нехай (Ω, P) – заданий дискретний ймовірнісний простір, тоді для будь-яких двох подій $\forall A, B \subset \Omega$ виконується:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)$$

або

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Зауваження. Обираємо одну з двох формул в залежності від умов задачі.

Означення. Якщо $P(A/B)=P(A)$, то говорять, що *подія* A *не залежить від події* B. Властивість незалежності є взаємним: якщо $P(A/B)=P(A)$, то і $P(B/A)=P(B)$. Події A і B в цьому випадку називаються *незалежними.*

Для незалежних подій Теорема ймовірності має окремий вигляд.

Теорема ймовірностей для незалежних подій. Нехай (Ω, P) – заданий дискретний ймовірнісний простір, тоді для будь-яких <u>двох незалежних подій</u> $\forall A, B \subset \Omega$ виконується:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

4.1. В урні 5 білих та 4 чорних кульок. З неї послідовно виймають на удачу дві кульки. Знайти ймовірність, що обидві кульки білі.

Розв'язання

Позначимо події через

A – в першій раз вийняти білу кульку;

B – в другий раз вийняти білу кульку.

Тоді необхідно обчислити:

$$P\underbrace{(A\cdot B)}_{\substack{\textit{послідовно}\\ \textit{вийнято дві}\\ \textit{білі кульки}}} = P\underbrace{(A)}_{\substack{\text{в першій}\\ \text{раз вийнято}\\ \text{білу кульку}}} \cdot P\underbrace{(B/A)}_{\substack{\text{в другий раз}\\ \text{вийняти білу}\\ \text{кульку, при умові,}\\ \text{що в перший раз}\\ \text{було вийнято білу}}}$$

де $P(A)=\dfrac{5}{9}$ (при першому вийманні усього 9 кульок, серед яких 5 білих), $P(B/A)=\dfrac{4}{8}$ (при умові, що при першому вийманні точно була біла кулька, усього залишилось 8 кульок, серед яких вже тільки 4 білих). Звідки:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{18}.$$

4.2. Три стрілка стріляють у ціль незалежно один від одного. Ймовірність влучення для першого стрілка дорівнює 0,6, для другого – 0,7 і для третього – 0,75. Знайти ймовірність хоча б одного влучення у ціль, якщо кожний стрілок зробить по одному пострілу (через протилежну подію).

Розв'язання

Позначимо події через

A – першій стрілок влучив у ціль;

B – другий стрілок влучив у ціль;

C – третій стрілок влучив у ціль;

D – хоча б один з трьох стрілків влучив у ціль.

Використаємо теорему про ймовірність протилежної події: якщо ймовірність події A дорівнює $P(A)$, ймовірність протилежної до неї події $\overline{A}$ дорівнює:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Ми можемо обчислити ймовірність того, що жоден зі стрілків не влучив у ціль $P(\overline{D})$, і, використовуючи цю теорему, $P(D) = 1 - P(\overline{D})$. Обчислимо $P(\overline{D})$:

$$P(\overline{D}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}),$$

де всі події є незалежні, і ми можемо використати теорему ймовірностей для незалежних подій:

$$P(\overline{D}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}).$$

З умов задачі нам відомі ймовірності:

$$P(A) = 0{,}6;$$
$$P(B) = 0{,}7;$$
$$P(C) = 0{,}75;$$

звідки:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}4;$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}3;$$
$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0{,}25.$$

І повертаючись до ймовірності того, що жоден зі стрілків не влучив у ціль $P(\overline{D})$:

$$P(\overline{D}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}03,$$

обчислимо

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97.$$

4.3. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Обчислити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше ніж у три місця. Як зміниться ймовірність, якщо відомо, що остання цифра непарна?

4.4. У грошово-речовій лотереї на 1000 білетів приходиться 24 речових та 10 грошових виграшів. Деяка людина купила два білета. Яка ймовірність виграшу:

а) хоча б за одним білетом;

б) за першим білетом грошей, а за другим – речей?

4.5. В урні 20 білих та 6 чорних кульок. З неї послідовно виймають на удачу 2 кульки. Знайти ймовірність, що обидві кульки чорні. Якщо після першого виймання кульку повертають до урни, і всі кульки перемішують, яка буде ймовірність два рази витягнути чорну кульку?

4.6. В урні 5 білих та 3 чорні кульки. Знайти ймовірність того, що виймаючи послідовно 3 кульки на удачу, не повертаючи їх назад, вони всі виявляться білими.

4.7. Для людини, яка досягла 60-річного віку, ймовірність померти на 61-

му році у певних умовах дорівнює 0,09. Яка ймовірність, що з трьох людей у віці 60 років:

а) всі три будуть живі через рік;

б) хоча б один з них залишиться живим?

4.8. Проведений залп з двох знарядь по мішені. Ймовірність влучення з першого знаряддя дорівнює 0,85, з другого – 0,91. Знайти ймовірність ураження цілі.

4.9. При виготовленні деталі замка заготовка повинна пройти 4 операції. Вважаючи появу браку на окремих операціях подією незалежною, знайти ймовірність виготовлення стандартної деталі, якщо ймовірність браку на першій операції дорівнює 0,02, на другій – 0,01, на третій – 0,02, на четвертій – 0,03.

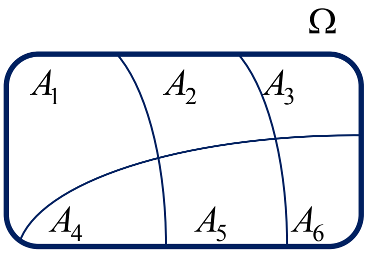
Тема 5. Формула повної ймовірності. Схема незалежних випробувань

Означення. Нехай задано дискретний ймовірнісний простір (Ω, P) та n випадкових подій $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, таких, що виконуються наступні дві умови:

1) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$, тобто хоча б одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обов'язково наступає у результаті випробування;

2) $A_i \cdot A_j = \phi, (i \neq j)$, тобто ніякі дві події з $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не настають одночасно (попарно несумісні).

Система випадкових подій $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ $(A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega)$, яка задовольняє таким двом умовам, називається *повною групою подій*.



Теорема (формула повної ймовірності). Нехай подія $B \subset \Omega$ може настати лише одночасно з однією з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, які складають повну групу. Тоді ймовірність події *B* знаходиться за *формулою повної ймовірності*:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n).$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, які складають повну групу, ще називають *гіпотезами по відношенню до події B*, бо заздалегідь невідомо з якою з цих подій одночасно настане подія *B*, але відомо, що з якоюсь з них *B* обов'язково настане.

У подібних випробуваннях часто шукають ймовірності для ще деяких подій. Якщо формулу повної ймовірності використовують при обчисленні деякої події *B*, яка може настати з однією з гіпотез, то для наступної задачі вже потрібно шукати ймовірність гіпотези при умові, що якась подія *B* вже настала.

Теорема (формула Байєса). Нехай подія $B \subset \Omega$ може настати лише одночасно з однією з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, які складають повну групу. Якщо відомо, що подія *B* настала, то ймовірність події A_j з повної групи подій $\{A_i\}_{i=1}^n$, при умові, що *B* настала, знаходиться за *формулою Байєса* (або *формулою ймовірності гіпотез*):

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$

Приклад. У першій групі навчається 24 студента, у другій – 36, а у третій – 40. З теорії ймовірностей «відмінно» отримали 6 студентів з першої групи, 6 студентів з другої та 4 – з третьої.

1) Обчислити ймовірность того, що на удачу обраний студент отримав

«відмінно» з теорії ймовірностей.

2) Обчислити ймовірность того, що на удачу обраний студент не отримав «відмінно» з теорії ймовірностей.

3) Випадковий студент, у якого ми запитали про його оцінку, виявився «відмінником». Яка ймовірність, що він з третьої групи? Що ймовірніше: він з першої або другої групи?

Розв'язання

Визначимо події A_i, які складають повну групу (гіпотези):

A_1 – студент навчається у першій групі;

A_2 – студент навчається у другій групі;

A_3 – студент навчається у третій групі.

Відразу обчислимо ймовірності того, що на удачу обраний студент навчається у першій групі – $P(A_1)$, у другій – $P(A_2)$ та у третій – $P(A_3)$:

$$P(A_1) = \frac{24}{24+36+40} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25};$$

$$P(A_2) = \frac{36}{24+36+40} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25};$$

$$P(A_3) = \frac{40}{24+36+40} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}.$$

Перейдемо до обчислення ймовірностей за пунктами.

1) Позначимо через подію B_1 – на удачу обраний студент отримав «відмінно» з теорії ймовірностей. Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(B_1) = P(A_1)\cdot P(B_1/A_1) + P(A_2)\cdot P(B_1/A_2) + P(A_3)\cdot P(B_1/A_3).$$

Обчислимо ймовірності $P(B_1/A_1),\ P(B_1/A_2),\ P(B_1/A_3)$.

$P(B_1/A_1)$ – ймовірність того, студент отримав «відмінно» при умові, що він з першої групи:

$$P(B_1/A_1)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4};$$

$P(B_1/A_2)$ – ймовірність того, студент отримав «відмінно» при умові, що він з другої групи:

$$P(B_1/A_2)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6};$$

$P(B_1/A_3)$ – ймовірність того, студент отримав «відмінно» при умові, що він з третьої групи:

$$P(B_1/A_3)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Отже ймовірність події B_1:

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)+P(A_3)\cdot P(B_1/A_3)=$$

$$=\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{50}+\frac{3}{50}+\frac{2}{50}=\frac{8}{50}=\frac{4}{25}.$$

2) Позначимо через подію B_1 – на удачу обраний студент отримав «відмінно» з теорії ймовірностей. Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)+P(A_2)\cdot P(B_2/A_2)+P(A_3)\cdot P(B_2/A_3).$$

Обчислимо $P(B_2/A_1),P(B_2/A_2),P(B_2/A_3)$:

$$P(B_2/A_1)=\frac{18}{24}=\frac{3}{4};$$

$$P(B_2/A_2)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6};$$

$$P(B_2/A_3)=\frac{36}{40}=\frac{9}{10}.$$

Отже

$$P(B_2)=P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)+P(A_2)\cdot P(B_2/A_2)+P(A_3)\cdot P(B_2/A_3)=$$

$$=\frac{6}{25}\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{50}+\frac{15}{50}+\frac{18}{50}=\frac{42}{50}=\frac{21}{25}.$$

Відмітимо, що $P(B_1)+P(B_2)=\frac{4}{25}+\frac{21}{25}=\frac{25}{25}=1.$

3) Якщо випадковий студент, у якого ми запитали про його оцінку, виявився «відмінником», то для обчислення ймовірності, що він з третьої групи, необхідно використати формулу Байєса:

$$P(A_3/B_1)=\frac{P(A_3)\cdot P(B_1/A_3)}{P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)+P(A_3)\cdot P(B_1/A_3)}=$$

$$=\frac{P(A_3)\cdot P(B_1/A_3)}{P(B_1)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{4}{25}}=\frac{2\cdot 25}{50\cdot 4}=\frac{1}{4}.$$

Для визначення того, що ймовірніше – студент відмінник з першої або другої групи, необхідно обчислити за формулою Байєса $P(A_1/B_1)$ та $P(A_2/B_1)$, і порівняти їх:

$$P(A_1/B_1)=\frac{P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)+P(A_3)\cdot P(B_1/A_3)}=$$

$$=\frac{P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{4}{25}}=\frac{6\cdot 25}{25\cdot 4\cdot 4}=\frac{3}{8};$$

$$P(A_2/B_1)=\frac{P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)}{P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)+P(A_3)\cdot P(B_1/A_3)}=$$

$$=\frac{P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{4}{25}}=\frac{9\cdot 25}{25\cdot 6\cdot 4}=\frac{3}{8}.$$

Ймовірності того, що студент відмінник з першої або другої групи, однакові та дорівнюють $\frac{3}{8}$.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

5.1. Червона Шапочка заблукала у лісі та вийшла на галявину, від якої у різні сторони виходили 3 стежки. Ймовірність зустріти Сірого Вовка на першій стежці дорівнює 0,6; на другій – 0,3; на третій – 0,2. Яка ймовірність того, що Червона Шапочка зустріне Сірого Вовка, якщо стежку вона обирає на удачу?

5.2. Співробітник ДАІ зупиняє закордонний автомобіль віп-класу із ймовірністю 0,6; будь-який інший закордонний автомобіль з ймовірністю 0,3; а всі вітчизняні автомобілі з ймовірністю 0,1. При цьому зазвичай штрафує водіїв автомобілів віп-класу із ймовірністю 0,2; водіїв будь-якого іншого закордонного автомобілю з ймовірністю 0,5; а водіїв вітчизняних автомобілів з ймовірністю 0,9. Щасливий водій першого зупиненого співробітником ДАІ автомобіля уникнув штрафу. Водієм якого автомобіля найімовірніше він є?

5.3. Серед 30 спортсменів з групи 20 бігунів, 6 стрибунів та 4 метальників. Ймовірність того, що буде виконана норма майстра спорту бігуном дорівнює 0,9; стрибуном – 0,8; метальником – 0,75.

1) Знайти ймовірність того, що на удачу обраний спортсмен виконає норму.

2) Якщо на удачу обраний спортсмен виконав норму, яка ймовірність, що він був бігуном?

5.4. Статистичні дані говорять о том, що 23% усіх запитів кредитів приходиться на державні органи, 18% – на інші банки, всі інші – на фізичні особи. Ймовірність того, що взятий кредит не буде поверненим державним органом дорівнює 0,01; банком – 0,07; фізичною особою – 0,2.

1) Визначити ймовірність того, що кредит, на удачу обраний з усіх кредитних справ, буде повернутий.

2) Співробітник банку доповів про неповернення кредиту. Яка ймовірність, що цей кредит був виданий банку?

5.5. В установі троє чиновників готують копії документів. Перший чиновник обробляє 40% усіх форм, другий – 35%, третій – 25%. У першого чиновника питома вага помилок становить 0,04, у другого – 0,06, у третього – 0,03. Наприкінці дня, обравши випадково один із підготовлених документів, керівник констатував, що у ньому є помилка. Обчислити ймовірності того, що помилки припустився перший чиновник, другий, третій.

5.6. У магазині три холодильники, у яких закінчується морозиво. У першому 4 білих та 6 шоколадних, у другому – 2 білих та 8 шоколадних, у третьому – 3 білих та 7 шоколадних. Навмання вибирають холодильник і виймають із нього морозиво.

1) Визначити можливість того, що воно біле.
2) Морозиво виявилось шоколадним. Яка ймовірність, що воно було обране з першого холодильника?

5.7. В офісі є 4 ноутбуки виготовлених компанією А, 6 – компанією Б, 8 – компанією В і 2 – компанією Г. Гарантії, що ноутбуки цих компаній працюватимуть протягом гарантійного терміну без ремонту становлять 70%, 80%, 85% та 55% для кожної з них. Потрібно знайти ймовірність, що обраний на удачу ноутбук працюватиме без ремонту протягом гарантійного терміну.

5.8. На склад надходять телефони трьох заводів, причому частка телефонів з першого заводу становить 25%, другого – 60%, третього – 15%. Відомо також, що середній відсоток телефонів без браку для першої фабрики становить 2%, другої – 4%, третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що:

1) навмання взятий телефон виявиться із браком;
2) телефон виготовлений першому заводі, якщо він бракований;
3) на якому заводі швидше було виготовлено телефон, якщо він зроблений якісно?

Схема незалежних випробувань

Розглянемо випробування, у результаті якого деяка подія A може з'явитись з ймовірністю p. Тоді ймовірність протилежної до A випадкової події $\overline{A}$ буде дорівнювати $q = 1 - p$. Проведемо випробування n разів та обчислимо ймовірність появи події A в цій серії випробувань рівно m разів, де $0 \le m \le n$. Описана схема незалежних випробувань була запропонована Якобом Бернуллі.

Формула Бернуллі

Формула для обчислення ймовірності $p_n(m)$ появи події A в серії з n незалежних випробувань рівно m разів $(0 \le m \le n)$ називається *формулою Бернуллі* або *біноміальною*:

$$p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що при підкиданні монети 20 разів герб з'явиться рівно 11 разів.

Розв'язання

Умови задачі задовольняють умовам схеми незалежних випробувань. Позначимо через подію A – появу герба при одному підкиданні монети, відповідно ймовірність появи події A:

$$p = P(A) = \frac{1}{2}.$$

А отже ймовірність події, протилежної до A:

$$q = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}.$$

За умовами задачі серія незалежних випробувань складається з $n = 20$ підкидань монети, а число випадінь герба, що нас цікавить, $m = 11$. Використовуючи формулу Бернуллі $p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, отримаємо шукану ймовірність:

$$p_{20}(11) = C_{20}^{11} \cdot p^{11} \cdot q^{20-11} = \frac{20!}{11!(20-11)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} =$$

$$= \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2^{20}} \approx 0{,}16.$$

Часто в задачах на схему Бернуллі потрібно обчислити ймовірності появи події A не просто точну кількість m разів, а з більш складними питаннями: менше m разів, більше m разів, не менше m разів, не більше m разів. У таких випадках використовуються формули:

$$p_n(X < m) = p_n(0) + p_n(1) + \ldots + p_n(m-1);$$

$$p_n(X > m) = p_n(m+1) + p_n(m+2) + \ldots + p_n(n);$$

$$p_n(X \ge m) = p_n(m) + p_n(m+1) + \ldots + p_n(n);$$

$$p_n(X \le m) = p_n(0) + p_n(1) + \ldots + p_n(m).$$

Найбільш ймовірне число M появи події A в серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі знаходиться з подвійної нерівності:

$$pn - q \le M \le pn + q\,.$$

В залежності від нерівності, M відповідає або лише єдиний розв'язок, або два розв'язки.

Приклад. При проведенні заліку методом тестування знань використовується 5 питань. На кожне питання пропонується 5 варіантів відповідей, серед котрих лише один варіант правильний. Студент отримає залік, якщо надасть не менш ніж 3 правильні відповіді. Яка ймовірність отримання студентом заліку, якщо він зовсім не знає предмет і обирає відповідь на удачу? Яке найбільш ймовірне число правильних відповідей буде у такого студента?

Розв'язання

Виходячи з умов задачі для студента, який зовсім не розуміється у предметі, ймовірність правильно відповісти на будь-яке питання буде завжди дорівнювати $\frac{1}{5}$, бо кожен з 5 варіантів відповідей буде для нього рівнозначним. А значить для такого студента тест з 5 питань можна розглядати як серію з 5 незалежних випробувань. Позначимо через подію A обрання правильної відповіді студентом, тоді

$$p = P(A) = \frac{1}{5};$$

$$q = P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Для отримання заліку студент повинен правильно відповісти на не менш ніж 3 питання. Тобто необхідно використати формулу:

$$p_n(X \geq m) = p_n(m) + p_n(m+1) + \ldots + p_n(n).$$

У нашому випадку вона матиме наступний вигляд:

$$p_5(X \geq 3) = p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} + C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^{5-4} + C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^{5-5} =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!}\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 \approx 0{,}058.$$

Для обчислення найбільш ймовірного числа правильних відповідей у студента, який обирає варіант на удачу, скористаємось формулою:

$$pn - q \leq M \leq pn + q.$$

У нашому випадку:

$$\frac{1}{5} \cdot 5 - \frac{4}{5} \leq M \leq \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{4}{5},$$

$$1 - \frac{4}{5} \leq M \leq 1 + \frac{4}{5},$$

$$\frac{1}{5} \leq M \leq \frac{9}{5} \Rightarrow M = 1,$$

тобто найбільш ймовірнісним числом буде лише одна правильна відповідь.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

5.9. Ймовірність виловити коропа у ставку при одному закиданні вудки дорівнює 0,4, з ймовірністю 0,6 виловлюють якусь іншу рибу. За шість разів закидання виловили шість риб. Яка ймовірність, що серед них:

1) 3 коропи;
2) не менше 2 коропів.

5.10. Ймовірність виграшу в лотерею на один білет дорівнює 0,2. Було куплено 7 білетів. Знайти ймовірність, що серед них буде:

1) 3 виграшних білета;
2) хоча б один виграшний.

5.11. Можливість випуску бракованого виробу на верстаті дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що в партії з десяти випущених на даному верстаті деталей:

1) рівно 7 будуть без браку;
2) не менше 7 будуть без браку;
3) менше 3 буде з браком.

5.12. Імовірність того, що телевізор має приховані дефекти, дорівнює 0,2. На склад надійшло 20 телевізорів. Яка подія найімовірніша: в партії є два телевізори з прихованими дефектами чи три?

5.13. Імовірність того, що при кидку м'яча баскетболіст потрапить до кошика, дорівнює 0,3. Знайти найбільш імовірне число попадань при 8 кидках і відповідну ймовірність.

5.14. Серед виробів, виготовлених на верстаті-автоматі, загалом буває 60% виробів першого сорту. Яка ймовірність того, що серед 6 удачу відібраних виробів буде:

1) від 2 до 4 виробів першого сорту;

2) щонайменше 5 виробів першого сорту;
3) хоча б один виріб нижчого сорту.

5.15. Ймовірність того, що покупцю необхідне чоловіче взуття 41-го розміру, дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що з шести покупців принаймні двом необхідне взуття 41-го розміру.