ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Тема 1. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей

Алгебра подій. Діаграми Ейлера-Венна

Приклад 1. Розглянемо випробування – підкидання двох монет (або двократне підкидання однієї монети). Визначимо множину елементарних подій Ω. Якщо, як і раніше позначимо через G – падіння одної монети гербовою стороною догори, а N – цифрою догори, то для підкидання двох монет можливі наступні елементарні події:

– на першій монеті герб догори, на другій монеті герб – GG;
– на першій монеті герб догори, на другій монеті цифра – GN;
– на першій монеті цифра догори, на другій монеті герб – NG;
– на першій монеті цифра догори, на другій монеті цифра – NN,

тобто

$$\Omega = \{GG, GN, NG, NN\}.$$

Розглянемо декілька подій у цьому випробуванні:

– A – випадіння хоча б одного герба;
– B – випадіння двох однакових сторін монети;
– C – не випадіння герба на жодній монеті;
– D – випадіння двох різних сторін монети,

та визначимо, які з них сумісні, які несумісні, визначимо якими подіями є $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$, $C \cap D$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \setminus D$, $D \setminus B$, $A \cup C$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.Для цього запишемо, які елементарні події складають події A, B, C, D:

$$A = \{GG, GN, NG\};$$

$$B = \{GG, NN\};$$

$$C = \{NN\};$$

$$D=\{GN,NG\}.$$

Звідки

$$A\bigcap B=\{\underline{GG},GN,NG\}\bigcap\{\underline{GG},NN\}=\{GG\}\neq\phi;$$

$$A\bigcap C=\{GG,GN,NG\}\bigcap\{NN\}=\phi;$$

$$A\bigcap D=\{GG,\underline{GN},\underline{NG}\}\bigcap\{\underline{GN},\underline{NG}\}=\{GN,NG\}\neq\phi;$$

$$B\bigcap C=\{GG,\underline{NN}\}\bigcap\{\underline{NN}\}=\{NN\}\neq\phi;$$

$$B\bigcap D=\{GG,NN\}\bigcap\{GN,NG\}=\phi;$$

$$C\bigcap D=\{NN\}\bigcap\{GN,NG\}=\phi.$$

З того, що $A\bigcap B\neq\phi, A\bigcap D\neq\phi, B\bigcap C\neq\phi$ випливає, що пари подій *A* і *B*, *A* і *D*, *B* і *C* – сумісні; а з того, що $A\bigcap C=\phi, B\bigcap D=\phi, C\bigcap D=\phi$ випливає, що пари подій *A* і *C*, *B* і *D*, *C* і *D* – несумісні.

Знайдемо події $A\setminus B$, $A\setminus D$, $D\setminus B$, $A\bigcup C$:

$$A\setminus B=\{GG,GN,NG\}\setminus\{GG,NN\}=\{GN,NG\},$$

$$A\setminus D=\{GG,GN,NG\}\setminus\{GN,NG\}=\{GG\},$$

$$D\setminus B=\{GN,NG\}\setminus\{GG,NN\}=\{GN,NG\},$$

$$A\bigcup C=\{GG,GN,NG\}\bigcup\{NN\}=\{GG,GN,NG,NN\}=\Omega,$$

$$\overline{A}=\Omega\setminus A=\{GG,GN,NG,NN\}\setminus\{GG,GN,NG\}=\{NN\}=C,$$

$$\overline{B}=\Omega\setminus B=\{GG,GN,NG,NN\}\setminus\{GG,NN\}=\{GN,NG\}=D.$$

Приклад 2. Обрана на удачу деталь може виявитися або першого (подія *A*), або другого (подія *B*), або третього (подія *C*) сорту. Що визначають події $A+B, \overline{A+C}, AC, AB+C$?

Розв'язання

$A+B$ – це подія, що складається в настанні або події *A*, або події *B*, або обох них одночасно (хоча б однієї з подій *A* та *B*), а значить подія $A+B$ – на удачу обрана деталь першого або другого сорту.

Для визначення події $\overline{A+C}$ спочатку запишемо, що означає подія $A+C$.

З того, що подія $A+C$ – на удачу обрана деталь першого або третього сорту, протилежна до неї подія $\overline{A+C}$ означає обрання у випробуванні деталі другого сорту.

Подія AC складається в настанні обох подій A та C одночасно, що неможливо. Отже $AC=\phi$.

В сумі події $AB+C$ подія $AB=\phi$ (так само як і $AC=\phi$), звідки $AB+C=\phi+C=C$, що визначає просто подію C – обрана деталь є третього сорту.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

1.1. Подія *A* – хоча б один студент з групи запізнюється на заняття, подія *B* – не менше двох студентів з групи пропускають заняття. Що визначають події $\overline{A}$, $\overline{B}$.

1.2. В урні 5 червоних, 2 синіх та 3 білих кульок, і всі вони занумеровані від 1 до 10. Подію – кулька з парним номером – позначимо *A*, з номером, кратним 3, – через *B*, кулька червоного кольору – через *C*, синього – через *D*, та білого – через *E*. Що визначають події $A+B, C+E, AD, \overline{A-B}, B\overline{E}, \overline{AD}-E$?

1.3. Нехай *A*, *B*, *C* – три довільні події. Знайти вирази для наступних подій:

1) настала лише подія *A*;
2) настала одна і лише одна з подій *A*, *B*, *C*;
3) настали дві і лише дві події;
4) всі три події настали одночасно;
5) настала принаймні одна подія;
6) настали не більш ніж дві події.

Кількісна оцінка можливості подій. Частота та відносна частота

Означення. *Частота* – це число випадків появи події у серії з n випробувань при визначених умовах, очевидно це може бути нуль або будь-яке натуральне число (максимально може дорівнювати числу випробувань):

$$\nu = 0,1,2,\ldots,n,$$

де ν – позначення *частоти*;

n – її можливе максимальне значення, яке дорівнює числу випробувань.

Відносна частота:

$$\frac{\nu}{n} \ \left(0 \le \frac{\nu}{n} \le 1\right),$$

де n – число спостережень, випробувань (або, як говорять, шансів).

Приклад 3. З 5000 обраних на удачу деталей 32 виявились бракованими. Обчислити відносну частоту бракованих деталей в даній партії.

Розв'язання

Подія, яка нас цікавить, це A – виявлення бракованої деталі. Проведено $n = 5000$ випробувань, подія A в цій серії випробувань з'явилась 32 рази, тобто частота $\nu = 32$. Отже відносна частота буде дорівнювати

$$\frac{\nu}{n} = \frac{32}{5000} = 0{,}0064.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

1.4. Серед 1000 новонароджених дітей виявилось 517 хлопчиків. Знайти відносну частоту народження хлопчиків.

1.5. Стрілок зробив 100 пострілів, попавши у мішень 89 разів. Чому дорівнює відносна частота попадання у мішень цього стрілка?

1.6. Французький науковець Бюффон при експериментальній перевірці закону великих чисел підкинув монету 4040 разів, в результаті чого герб випав 2048 разів. Знайти відносну частоту випадіння герба.

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

1.7. Подія A означає появу 6 очок на верхній грані грального кубику. Що означає подія $\overline{A}$?

1.8. Подія A означає складається в тому, що хоча б одна з 15 деталей нестандартна. Що означає подія $\overline{A}$?

1.9. Які з наступних пар подій протилежні:

1) екзамен здано на «відмінно»; екзамен здано на «незадовільно»;
2) хоча б одна пуля при двох пострілах влучає в ціль; жодна з двох пуль при двох пострілах не влучає в ціль;
3) обрана на удачу кість з повного набору доміно є «дублем»; обрана на удачу кість з повного набору доміно не є «дублем».

1.10. Підкидується гральний кубик. Які з наступних подій сумісні, а які – несумісні:

1) A – випало парне число очок, B – випало непарне число очок;
2) A – випало непарне число очок, B – випало число, кратне 3.

1.11. Серед студентів, які здали екзамен, обирають одного на удачу. Нехай подія A складається в тому, що обраний сдудент виявиться старше двадцяти років, подія B – в тому, що обраний студент отримал «відмінно» на екзамені, а подія C – що студент проживає у гуртожитку.

1) Опишить подію $\overline{A}BC$.
2) При якій умові має місце рівність $ABC = A$?
3) При якій умові виконується $\overline{A} \subset C$?
4) Чи буде мати місце подія $\overline{A}B$, якщо дев'ятнадцятирічний студент отримав на екзамені «відмінно»?

1.12. На трьох верстатах виробляють однотипні вироби. Подія A_1 означає, що виріб виготовлений на першому верстаті відповідає стандарту, A_2 означає, що виріб виготовлений на другому верстаті відповідає стандарту, A_3 означає, що виріб виготовлений на третьому верстаті відповідає стандарту. Що означають наступні події:

1) $A_1 A_2 A_3$;
2) $A_1 + A_2 + A_3$;
3) $A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$;
4) $A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$;
5) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;
6) $(A_1 + A_2 + A_3) - A_1 A_2 A_3$.

Тема 2. Ймовірність події. Статистичне (або стохастичне) означення ймовірності

Означення. *Ймовірність події* – це міра можливості появи цієї події при проведенні випробування.

Розглянемо деяку елементарну випадкову подію ω_i, яка може статись, а може і не статись, при проведенні деякого випробування. Повторимо це випробування декілька разів, наприклад *n*, проводячи їх в однакових умовах та незалежно одне від одного. Нехай в результаті *n* випробувань подія ω_i сталась ν разів, тоді величина $\frac{\nu}{n}$ $\left(0 \le \frac{\nu}{n} \le 1\right)$ буде відносною частотою події ω_i у розглянутій серії *n* випробувань.

Означення. Якщо існує границя відношення $\frac{\nu(n)}{n}$ при прямуванні числа випробувань до нескінченності:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(n)}{n}=p(\omega_i),$$

то ця границя $p(\omega_i)$, $0\le p(\omega_i)\le 1$ називається ймовірністю події ω_i, а саме випробування задовольняє властивості *сталості частот.*

Властивості $p(\omega_i)$:

1) $0\le p(\omega_i)\le 1$;
2) $\sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)=1$;
3) $p(\Omega)=1$;
4) $p(\phi)=0$.

Класичне визначення ймовірності події

Нехай визначене випробування і відома множина всіх елементарних подій $\Omega=\{\omega_i\}_{i=1}^{k}$, і всі елементарні події $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$ є рівноможливі.

Означення. Елементарні події, які складають подію $A\subset\Omega$, називають *результатами випробування, сприятливими для події* A.

Ймовірністю події $A\subset\Omega$ *називається відношення числа результатів випробування, сприятливих для події А, до числа всіх рівноможливих елементарних подій.*

Класична формула обчислення ймовірності

$$p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|},$$

де $|A|$ – число результатів випробування, сприятливих для події A (кількість елементарних подій, сума яких складає подію A);

$|\Omega|=k$ – число всіх рівноможливих елементарних подій випробування (кількість елементів множини Ω).

У навчально-методичній літературі ця формула у загальному вигляді часто записується як

$$p(A)=\frac{m}{n},$$

де m – число результатів випробування, сприятливих для події A;

n – число всіх рівноможливих елементарних подій випробування.

Приклад 1. Обчислимо ймовірність випадіння парного числа при підкиданні кубика. Множина всіх елементарних подій для цього випробування складається зі шістьох елементів $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, де ω_i відповідає події випадіння на кубику числа i, і всі елементарні події $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$ є рівноможливі. Тобто можна використати класичну формулу обчислення ймовірності.

Кількість елементів множини Ω – число всіх рівноможливих елементарних подій випробування дорівнює

$$n=|\Omega|=6.$$

Запишемо подію A – випадіння парного числа при підкиданні кубика, як підмножину множини Ω:

$$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}\subset\Omega,$$

звідки число результатів випробування, сприятливих для події A (кількість елементів множини A) дорівнює

$$m=|A|=3.$$

Використовуючи класичну формулу обчислення ймовірності, обчислимо ймовірність випадіння парного числа при підкиданні кубика (події A):

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Елементи комбінаторики

Принцип додавання комбінацій полягає в тому, що якщо деяка дія може здійснитись декількома незалежними способами, то загальне число способів здійснення цієї дії дорівнює сумі числа таких способів.

Принцип добутку комбінацій полягає в тому, що якщо деяка дія здійснюється у k кроків, при цьому перший крок може бути реалізований n_1 числом способів, другий крок n_2 числом способів, і так далі до k-го кроку, який може бути реалізований n_k числом способів, то загальне число способів реалізації дії дорівнює добутку $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Приклад 2. Випробування складається з підкидання двох гральних кубиків. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях двох кубиків є парним числом, при умові, що хоча б на одному кубику випаде 6.

Розв'язання

Визначимо множину всіх елементарних подій для цього випробування Ω. На першому кубику може випасти 1, 2, 3, 4, 5, 6, аналогічно на другому кубику – 1, 2, 3, 4, 5, 6. Кожна подія на першому кубику поєднуватись з кожною подією на другому, тобто множина Ω складається з пар:

$$\left\{\underbrace{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)}_{\substack{6 \\ пар}},\ldots,\underbrace{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}_{\substack{6 \\ пар}}\right\}.$$

Отже кількість елементів множини Ω – число всіх рівноможливих елементарних подій випробування (можна також застосувати принцип добутку комбінацій) дорівнює

$$n = |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36.$$

Визначимо подію A – випадіння парного числа у сумі очок на гранях двох кубиків, з умовою, що хоча б на одному кубику випаде 6:

$$A = \{(6,2),(6,4),(6,6),(4,6),(2,6)\} \subset \Omega.$$

А отже число результатів випробування, сприятливих для події A (кількість елементів множини A) дорівнює

$$m = |A| = 5.$$

Використовуючи класичну формулу обчислення ймовірності, обчислимо ймовірність події A:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}.$$

Приклад 3. Монета підкинута два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випав герб.

Розв'язання

Визначимо множину всіх елементарних подій для цього випробування:

$$\Omega = \{GG, GN, NG, NN\}.$$

Визначимо подію A – при двох підкиданнях хоча б один раз випав герб:

$$\Omega = \{GG, GN, NG\}.$$

Отже

$$n = |\Omega| = 4,$$

$$m = |A| = 3,$$

і за класичною формулою обчислення ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 4. В урні містяться 10 білих та 20 чорних кульок. На удачу виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що було вийнято білу кульку.

Розв'язання

Позначимо через A – подію, що складається у вийманні білої кульки. Число всіх елементарних подій співпадає з загальним числом кульок в урні:

$$n = 10 + 20 = 30.$$

Число результатів випробування, сприятливих для події A, дорівнює числу білих кульок:

$$m = 10.$$

Отже ймовірність того, що було вийнято білу кульку:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

2.1. Випробування складається з підкидання двох гральних кубиків. Знайти ймовірність того, що

1) сума очок на гранях двох кубиків дорівнює 7;
2) сума очок на гранях двох кубиків дорівнює 8, а різниця – 4;
3) добуток очок на гранях двох кубиків дорівнює 5.

2.2. В урні містяться 12 кульок, які нічим не відрізняються окрім кольору – 5 чорних та 7 білих. Яка ймовірність, що на удачу обрана кулька виявиться чорною?

2.3. В урні містяться 3 білих, 2 чорних та 5 червоних кульок. Чому дорівнює ймовірність того, на удачу обрана кулька виявиться: 1) червоною; 2) не чорною?

2.4. З 35 екзаменаційних білетів, занумерованих цілими числами від 1 до 35, на удачу виймається один. Яка ймовірність того, що номер вийнятого білету є числом, кратним трьом?

2.5. Монета підкидається три рази підряд. Знайти ймовірність наступних подій:

1) число випадінь герба більше числа випадіння цифри;
2) випадає в точності два герба;
3) результаті всіх підкидань однакові.

2.6. На чотирьох карточках написані числа 1, 2, 3, та 4. Яка ймовірність того, що сума чисел на трьох довільно обраних карточках ділиться на 3 без остачі?

Тема 3. Перестановки, розміщення, сполучення (комбінації)

У найпростіших задачах всі можливі комбінації нескладно виписати і підрахувати, але частіше приходиться розв’язувати задачі з великим числом комбінацій, які вже не так просто виписати, і для обчислення їх кількості потрібні спеціальні формули. Перед введенням формул визначимо два важливих типи множини: *упорядковану* та *неупорядковану*.

Означення. *Упорядкованою множиною елементів* називають множину, в якій заданий порядок наступності елементів (тобто є важливим у якому порядку знаходяться елементи множини). Дві упорядковані множини, які складаються з одних і тих же елементів, але відрізняються порядком наступності елементів, вважаються різними.

Означення. Якщо порядок наступності елементів не має значення, то множина називається *неупорядкованою.*

Наприклад, при наборі номеру телефону важливий порядок цифр, а при грі в покер неважливий порядок, а лише набір карт – сама комбінація.

Для **упорядкованих множин** найчастіше використовуються два типи комбінацій: *перестановки* та *розміщення*, для **неупорядкованих** – *сполучення*. Для введення означень, припустимо, що задана множина, яка містить n різних елементів, і елементи цієї множини використовуються у побудові інших множин. Також припустимо, що елементи вихідної множини використовуються для побудови іншої множини *без повторень* – кожний елемент можна взяти лише один раз, такі комбінації називаються *комбінаціями без повторень*.

Означення. *Перестановкою з n елементів* називається будь-яка упорядкована множина з n заданих різних елементів без повторень.

Приклад 1. Розглянемо множину елементів $A = \{1,2,3\}$ та визначимо всі можливі перестановки цієї множини. За означенням перестановки складаються з усіх елементів заданої множини, тобто з того, що множина A містить три різних елементи, будь-яка перестановка повинна також містить ці три елементи, а зміна порядку елементів визначатиме вже нову перестановку:

$$\underbrace{\{1,2,3\}}_{1}, \underbrace{\{3,1,2\}}_{2}, \underbrace{\{2,3,1\}}_{3}, \underbrace{\{1,3,2\}}_{4}, \underbrace{\{2,1,3\}}_{5}, \underbrace{\{3,2,1\}}_{6}.$$

Перебравши всі можливі варіанти розташування трьох різних елементів, отримали шість перестановок. Але чим більше буде елементів вихідної множини, тим складніше їх всі виписати. Тому виведемо формулу для обчислення числа перестановок для множини з n елементів.

Розглянемо множину з n різних елементів $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, і для обчислення числа всіх можливих перестановок з елементів цієї множини зробимо наступні дії.

1) Представимо n занумерованих місць, які можуть зайняти елементи множини вихідної множини:

$$\underbrace{\bullet}_{\substack{1\\ \text{місце}}}\ \underbrace{\bullet}_{\substack{2\\ \text{місце}}}\ \underbrace{\bullet}_{\substack{3\\ \text{місце}}}\ \ldots\ \underbrace{\bullet}_{\substack{n-1\\ \text{місце}}}\ \underbrace{\bullet}_{\substack{n\\ \text{місце}}}$$

2) Почнемо заповняти ці місця, враховуючи, що кожний елемент може бути задіяний лише один раз. Так,

   – на перше місце можна поставити будь-який з n елементів вихідної множини,
   – на друге – вже $(n-1)$ елемент, бо один елемент вже поставлений на перше місце,
   – на третє – вже $(n-2)$ елемент, бо два елементи вже поставлені на перше і друге місця, і так далі,
   – …,
   – на $(n-1)$ місце залишилось вільних два елементи,
   – на останнє місце під номером n залишиться вільним лише один елемент.

$$\underbrace{n}_{1}\underbrace{n-1}_{2}\underbrace{n-2}_{3}\ldots\underbrace{2}_{n-1}\underbrace{1}_{n}$$

На кожному кроці заповнення наступного місця для обчислення кількості комбінацій використаємо принцип добутку комбінацій, тоді, якщо позначити через P_n число перестановок з n елементів, отримаємо формулу:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Якщо повернутись до прикладу 1, то не виписуючи всі перестановки, обчислити їх загальну кількість можна за допомогою формули $P_n = n!$, враховуючи, що в прикладі $n = 3$:

$$P_n = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Таку ж відповідь ми отримали, виписавши всі можливі перестановки.

Окрім перестановок серед важливих комбінацій **упорядкованих множин** є *розміщення*, яке відрізняється від *перестановок* лише кількістю існуючих місць для елементів, яких вже менше за кількість всіх елементів вихідної множини.

Означення. *Розміщенням з n елементів по m* ($m < n$) називається будь-яка упорядкована множина з *m* елементів без повторень, обрана з *n* заданих різних елементів.

Пояснення. Тобто у випадку розміщень, так само як і у перестановках, обираються елементи з заданої множини, що містить *n* різних елементів, але на відміну від перестановок, місць для цих елементів вже менше за *n*.

Приклад 2. Обчислимо число можливих комбінацій для цифрового коду, якій містить три різні цифри. Елементи, які можуть бути використані для коду запишемо у вигляді вихідної множини:

$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Для коду задіяні лише три різні цифри з можливих десяти з множини A, для яких важливий порядок, тобто такі комбінації є розміщеннями з 10 елементів по 3. Обчислимо їх кількість, використовуючи принцип добутку комбінацій. Так на першому місці коду може стояти будь-яка цифра з 10 можливих, на другому – будь-яка цифра з 9, що залишились, на третьому – будь-яка з 8, що залишились. І використовуючи принцип добутку комбінацій число всіх можливих розміщень з 10 по 3 – A_{10}^{3} дорівнюватиме:

$$A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Зауважимо, що виписувати всі 720 комбінацій займе багато часу.

Виведемо загальну формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по m $(m<n)$. Розмірковуючи подібно обчисленню кількості перестановок, представимо m занумерованих місць, які можуть зайняти елементи множини вихідної множини:

$$\underbrace{\bullet}_{\substack{1\\ \text{місце}}}\ \underbrace{\bullet}_{\substack{2\\ \text{місце}}}\ \underbrace{\bullet}_{\substack{3\\ \text{місце}}}\ \ldots\ \underbrace{\bullet}_{\substack{m-1\\ \text{місце}}}\ \underbrace{\bullet}_{\substack{m\\ \text{місце}}}$$

Тоді число розміщень з n елементів по m $(m<n)$ – A_n^m дорівнюватиме:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)).$$

Формула у такому запису не дуже зручна для використання, тому дещо її перетворимо:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)) = (n-(m-1))\cdot(n-(m-2))\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n =$$

Спочатку просто перепишемо у зворотному порядку

Зауважимо, що отриманий вираз є частиною $n!$ без множника $(n-m)!$, домножимо та розділимо на цей множник

$$= (n-(m-1))\cdot(n-(m-2))\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot\frac{(n-m)!}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-m)!\cdot(n-m+1)\cdot(n-m+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Отримали зручну формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по m $(m<n)$:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Якщо повернутись до прикладу 2, то використовуючи формулу

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, отримаємо:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Для **неупорядкованих множин** комбінацією елементів, що зустрічається найчастіше, є *сполучення* (або комбінація). Сполучення дуже схоже на розміщення – теж з множини, що складається з n різних елементів обирають не всі, а лише m $(m < n)$ елементів, але на відміну від розміщення не враховується порядок місць, на яких ці елементи розташовані.

Означення. *Сполученням з n елементів по m* $(m < n)$ називається будь-яка неупорядкована множина з m елементів без повторень, обрана з n заданих різних елементів.

Для того, щоб записати загальну формулу для числа сполучень, зробимо наступні розмірковування. У сполученнях так само як у розміщеннях обирається m елементів з n заданих, але при цьому всі перестановки цих обраних m елементів для розміщень визначають різні комбінації, у той час як для сполучення неважливий порядок, і всі перестановки з обраних m елементів вважаються однією комбінацією. Тобто для знаходження числа сполучень з n елементів по m $(m < n)$ – його позначають через C_n^m, необхідно відповідне число розміщень A_n^m розділити на число перестановок з m елементів P_m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Отримали зручну, відому зі школи, формулу для обчислення сполучень з n елементів по m $(m < n)$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Приклад 3. Яка ймовірність витягнути карточки з номерами 1, 5, 7, обравши на удачу три карточки з набору із 9 карток, пронумерованих від 1 до 9?

Для розв'язання задачі спочатку зрозуміємо, які саме комбінації необхідно розглядати. З того, що в експерименті обираються три картки з наданих дев'яти різних карток, при цьому в обраному наборі нам неважливий порядок, випливає, що необхідно обчислювати число сполучень. Для використання класичної формули необхідно знайти число результатів випробування, сприятливих для заданої події, і число всіх рівноможливих елементарних подій випробування.

Число всіх рівноможливих елементарних подій випробування дорівнює числу сполучень з 9 елементів по 3:

$$n = C_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} = 7\cdot 4\cdot 3 = 84,$$

тобто всього 84 можливих варіанти витягнути 3 картки з 9 наданих.

Число результатів випробування, сприятливих для події A – витягнути карточки з номерами 1, 5, 7, дорівнює 1, бо така комбінація єдина:

$$m = 1.$$

Отже за класичною формулою обчислення ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{84}.$$

Задачі для практичного заняття та самостійної роботи

3.1. На 6 однакових карточках написані букви А, В, І, К, Р, Х. Карточки перемішують та розташовують на удачу в рядок. Яка ймовірність, що при цьому вийде слово ХАРКІВ? Якщо на удачу витягнути 3 картки з цих карток і розташувати на удачу в рядок, яка ймовірність отримати слово РІК?

3.2. Для 3 котів господиня купила 3 різних лежаки і кожний підписала за їх прізвиськом. Яка ймовірність, що коти, на удачу підійшовши до різних лежаків, займуть їх відповідно прізвиськам?

3.3. Потрібно зшити прапор з двох однакових горизонтальних смуг різних кольорів у певному порядку розташування. Якщо ми маємо шість різнокольорових рулонів матерії, серед яких є жовтий та блакитний, скільки можливих варіантів прапорів ми можемо зшити? Якщо оберуть на удачу два різних кольори матерії і зшиють прапор, яка ймовірність, що він виявиться українським? Якщо не зважати на розташування кольорів, а лише на правильність обрання кольорів, чому дорівнює ймовірність, що обрані два кольори жовтий та блакитний?

3.4. Чоловік, набираючи пароль для входу в аккаунт, не зміг згадати три останні цифри, і пам'ятаючи лише, що вони були непарні та різні, набрав їх на удачу. Яка ймовірність того, що він вгадав?

3.5. З колоди з 36 карт на удачу витягнули 3 карти. Яка ймовірність, що це трійка, сімка і туз? Яка ймовірність, що ці карти пікової масті? Яка ймовірність, що ці карти червоних мастей?

3.6. В ящику знаходяться 10 стандартних та 3 нестандартних деталей, однакові на дотик. На удачу виймають 2 деталі. Найти ймовірність того, серед обраних деталей:

а) рівно одна нестандартна;

б) дві нестандартні.

3.7. Серед 30 студентів було розігране 15 білетів до аквапарку, 8 – до кінотеатру та 7 – на концерт. Яка ймовірність, що два певних студенти виграли білети в одне місце?

3.8. На тепловій електростанції працюють 15 змінних інженерів, серед яких 3 жінки. У зміну зайнято 3 людини. Обчислити ймовірність того, що у випадково обрану зміну чоловіків виявиться не менше 2.

3.9. З колоди з 36 карт на удачу виймається 3 карти. Знайти ймовірність, що серед них виявиться хоча б один туз.