

1. Канонічний аналіз

В математиці існує один метод, який установлює зв'язок між двома групами величин ознак, – це метод канонічних кореляцій.

Сферу застосування канонічних кореляцій поки що однозначно не визначено, найпоширеніше пояснення цього стосується факту, що дослідники практично не ознайомлені з цим математичним апаратом.

Перейдемо до вирішення математичних проблем у моделюванні механізму взаємозв'язку складних ознак об'єкта. Саме метод канонічних кореляцій дозволяє знаходити максимальні кореляційні зв'язки між двома групами випадкових величин. Ця проблема вирішується за допомогою нових змінних – канонічних функцій, визначених як лінійні комбінації початкових ознак. Попередньо всю сукупність елементарних ознак необхідно розділити на дві групи: пояснювальні ознаки і результативні ознаки, що акумулюють наслідки впливу перших. Оскільки в економіці причинно-наслідкові взаємозв'язки приводять в дію механізми функціонування та розвитку об'єктів, то розділити елементарні ознаки на причинні та наслідкові можна, хоча і з певною умовністю. Отже, система елементарних ознак, що характеризує ресурсно-ринкову здатність об'єкта (пояснювальні змінні) протистоїть системі ознак, що виражають результати його функціонування (результативні змінні). З двох наборів змінних – результативних ознак $\{y_j\}$ і елементарних ознак, що впливають на результативні ознаки $\{x_i\}$, – складають дві (канонічні) функції – дві нові змінні, що однозначно визначаються даною множиною величин ознак. Канонічні змінні завжди можна трактувати як комплексні показники якості двох груп ознак, тому вони потребують найпильнішого вивчення.

Концепція методу канонічної кореляції започаткована наступними міркуваннями. Множинна кореляція є мірою зв'язку між однією випадковою величиною і множиною інших випадкових величин. Насправді ж множинна кореляція є максимальною кореляцією між однією випадковою величиною і

лінійною функцією інших. Ця концепція була узагальнена Хоттелінгом (1936) на випадок зв'язку між двома множинами випадкових величин.

Нові канонічні величини вибираються таким чином, щоб нові координати безпосередньо вказували значення кореляції. Окремі показники не характеризують повністю групу, до якої вони належать. За характерного представника груп складають дві лінійні комбінації з показників кожної групи. Коефіцієнти цих лінійних комбінацій визначають із умови максимуму коефіцієнта кореляції між комбінаціями. Знайдені таким чином пара лінійних комбінацій утворюють першу пару «канонічних функцій», яка описує певні властивості обох груп первинних показників. Але групи показників мають ще інші властивості, для концентрованого опису яких знаходять другу пару канонічних функцій, яка незалежна (некорельована) з першою парою. Виділяють стільки пар канонічних функцій, поки не буде практично повністю вичерпано всі особливості груп показників. Систему канонічних функцій можна вважати новою координатною системою, яка найкращим чином пристосована для опису сукупності кореляційних зв'язків між показниками різних груп.

В канонічному аналізі ознак об'єкта матриця величин ознак розбивається на дві частини, як це показано в табл. 1.

Таблиця 1

Матриця значень елементарних ознак

Номер спостереження	Перша група ознак				Друга група ознак			
	X_1	X_2	...	X_q	Y_1	Y_2	...	Y_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1q}	y_{11}	y_{12}	...	y_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2q}	y_{21}	y_{22}	...	y_{2p}
3	x_{31}	x_{32}	...	x_{3q}	y_{31}	y_{32}	...	y_{3p}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nq}	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{np}

Тут $X_1, X_2, \dots, X_q$ – величини ознак у формі значень показників, що описують ресурсно-ринковий стан об'єкта; $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ – величини результативних ознак, що характеризують функціонування об'єкта. Практика свідчить, що кількість елементарних ознак ресурсно-ринкового стану об'єкта значно перевищує кількість результативних ознак його функціонування, тому $p \leq q$.

Канонічна кореляція – це кореляція між новими компонентами (канонічними змінними) U і V :

$$U = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_q X_q;$$

$$V = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + \dots + b_p Y_p.$$

За аналогією з парною кореляцією тіснота зв'язку між канонічними змінними буде визначатися «канонічним» коефіцієнтом кореляції r :

$$r = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sqrt{\text{var}(U) \cdot \text{var}(V)}}$$

Залежно від того, яких значень набувають коефіцієнти a_i і b_j ($i = \overline{1, q}, j = \overline{1, p}$), будуть змінюватися значення канонічних змінних та канонічного коефіцієнта кореляції. Одна з основних задач, що розв'язується в процесі аналізу канонічних кореляцій, полягає в знаходженні такої пари значень канонічних змінних, якій відповідає максимальне значення канонічного коефіцієнта кореляції.

Для обчислення канонічних коефіцієнтів кореляції необхідно, перш за все, визначити матриці коваріацій початкових змінних:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

де S_{11} – коваріаційна матриця початкових змінних першої групи $X_1, \dots, X_2, \dots, X_q$ розміром $q \times q$;

S_{22} – коваріаційна матриця початкових змінних другої групи $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ розміром $p \times p$;

S_{12}, S_{21} – коваріаційні матриці початкових змінних обох груп $X_1, X_2, \dots, X_q$ і $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$; розміри цих матриць дорівнюють відповідно $q \times q$ та $p \times p$.

Канонічні коефіцієнти кореляції можна обчислювати, на основі вибіркової кореляційної матриці R :

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Донедавна складність описаної обчислювальної процедури канонічного аналізу була поясненням її обмеженого застосування в аналізі ознак об'єктів в економіці, але сучасний розвиток програмного та технічного забезпечення розкриває широкі можливості даного математичного методу, залишається лише питання формування системи ознак, що описують об'єкт, та виявлення механізму їх причинно-наслідкової взаємодії.

Для перевірки значущості коефіцієнтів канонічної кореляції доцільно використовувати критерій Бартлета.

Приклад застосування канонічного аналізу.

Визначити взаємозв'язок ресурсно-ринкового стану підприємств та результативності їх діяльності доцільно за допомогою канонічного аналізу. Для цього слід активізувати меню **Describe/Multivariate Methods/Canonical Correlations**. Маємо системи загальних ознак виробничо-господарської діяльності підприємств:

$$r_{u_1v_1} = 0,95$$

$$p = 0,00$$

$$\begin{cases} u_1 = 0,56x_1 - 0,23x_2 + 0,14x_3 + 0,21x_4 - 0,12x_5 - 0,01x_6 + 0,01x_8 + 0,14x_9 + 0,07x_{10} + 0,23x_{13} + \\ + 0,09x_{14} - 0,12x_{16} - 0,01x_{17} - 0,11x_{18} - 0,06x_{19} + 0,06x_{20} - 0,09x_{21} + 1,03x_{22} - 0,03x_{23} + 0,46x_{24} - \\ - 0,09x_{25} + 0,06x_{26} + 0,04x_{27} - 0,18x_{30} + 0,39x_{31} + 0,12x_{32} - 0,42x_{33} - 0,06x_{34} + \\ + 0,03x_{35} - 0,21x_{36} - 0,04x_{37} - 0,05x_{38} + 0,01x_{39} + 0,14x_{46} - 0,1x_{48} \\ v_1 = 0,17x_{28} - 0,06x_{29} + 0,24x_{40} - 0,23x_{41} + 0,2x_{42} + 0,05x_{43} + 0,05x_{44} - 0,88x_{45} + 0,06x_{47} \end{cases}$$

u_1 – швидкість обігу власних коштів підприємств;

v_1 – дохідність власного капіталу;

$$r_{u_2v_2} = 0,92$$

$$p = 0,00$$

$$\begin{cases} u_2 = -0,65x_1 - 0,89x_2 - 0,09x_3 + 0,13x_4 + 0,08x_5 + 0,09x_6 - 0,18x_8 - 0,16x_9 - 0,06x_{10} - 0,51x_{13} - \\ - 0,13x_{14} + 0,21x_{16} + 0,02x_{17} + 0,09x_{18} - 0,13x_{19} + 0,69x_{20} - 0,52x_{21} - 0,28x_{22} + 0,11x_{23} + \\ + 1,21x_{24} + 0,04x_{25} + 0,19x_{26} + 0,07x_{27} + 0,72x_{30} - 0,98x_{31} + 0,9x_{32} - 0,59x_{33} - 0,52x_{34} + \\ + 0,08x_{35} + 0,08x_{36} + 0,1x_{37} - 0,1x_{38} - 0,1x_{39} + 0,28x_{46} - 0,14x_{48} \\ v_2 = 0,21x_{28} + 0,19x_{29} + 0,53x_{40} + 0,15x_{41} - 0,08x_{42} + 0,51x_{43} + 0,03x_{44} - 0,05x_{45} - 0,06x_{47} \end{cases}$$

u_2 – швидкість обігу усього капіталу підприємства;

v_2 – рентабельність виробленої продукції;

$$r_{u_3v_3} = 0,77$$

$$p = 0,00$$

$$\begin{cases} u_3 = 1,11x_1 + 1,36x_2 + 0,35x_3 + 0,04x_4 + 0,25x_5 + 0,09x_6 - 0,05x_8 + 0,14x_9 + 0,29x_{10} + 0,19x_{13} - \\ + 0,41x_{14} - 0,59x_{16} - 0,39x_{17} + 0,09x_{18} + 0,2x_{19} - 0,34x_{20} + 0,01x_{21} + 0,09x_{22} + 0,06x_{23} + \\ + 0,02x_{24} + 0,14x_{25} + 0,01x_{26} + 0,57x_{27} + 0,42x_{30} - 0,88x_{31} - 0,28x_{32} + 0,09x_{33} + 0,51x_{34} + \\ + 0,001x_{35} - 0,22x_{36} + 0,03x_{37} + 0,01x_{38} + 0,18x_{39} + 1,28x_{46} + 0,13x_{48} \\ v_3 = 0,92x_{28} + 0,29x_{29} + 0,09x_{40} - 0,18x_{41} - 0,29x_{42} + 0,51x_{43} + 0,24x_{44} + 0,27x_{45} + 0,29x_{47} \end{cases}$$

u_3 – структура капіталу підприємства;

v_3 – отриманий дохід;

$$r_{u_4v_4} = 0,73$$

$$p = 0,00$$

$$\begin{cases} u_4 = 0,45x_1 + 0,22x_2 + 0,24x_3 + 0,28x_4 - 0,74x_5 - 0,35x_6 + 0,09x_8 - 0,38x_9 - 0,3x_{10} + 0,78x_{13} - \\ - 0,62x_{14} - 0,46x_{16} - 0,4x_{17} - 0,22x_{18} + 0,12x_{19} - 0,01x_{20} - 0,05x_{21} - 0,22x_{22} - 0,003x_{23} - \\ - 0,32x_{24} + 0,34x_{25} - 0,03x_{26} + 0,27x_{27} - 0,09x_{30} + 0,07x_{31} + 0,09x_{32} - 0,56x_{33} - 0,45x_{34} + \\ + 0,08x_{35} - 0,08x_{36} + 0,04x_{37} + 0,7x_{38} + 0,41x_{39} - 0,24x_{46} - 0,39x_{48} \\ v_4 = 0,47x_{28} + 0,13x_{29} - 0,74x_{40} - 0,31x_{41} + 0,81x_{42} + 0,31x_{43} - 0,17x_{44} + 0,04x_{45} - 0,02x_{47} \end{cases}$$

u_4 – ефективність використання матеріальних засобів та грошових коштів;

v_4 – прибутковість діяльності підприємств;

$$r_{u_5v_5} = 0,71$$

$$p = 0,00$$

$$\begin{cases} u_5 = -8,87x_1 - 9,94x_2 - 0,17x_3 - 0,27x_4 - 0,41x_5 - 0,74x_6 + 0,001x_8 + 0,17x_9 + 0,16x_{10} + \\ + 0,22x_{13} + 0,93x_{14} + 0,47x_{16} + 0,2x_{17} - 0,31x_{18} - 0,02x_{19} - 0,1x_{20} + 0,2x_{21} - 0,17x_{22} - \\ - 0,1x_{23} - 0,8x_{24} + 0,004x_{25} + 0,21x_{26} + 0,07x_{27} + 0,76x_{30} - 1,16x_{31} + 0,62x_{32} + 0,15x_{33} - \\ - 0,17x_{34} - 0,11x_{35} - 0,44x_{36} - 0,13x_{37} + 0,14x_{38} + 0,14x_{39} + 0,53x_{46} - 0,3x_{48} \\ v_5 = 0,47x_{28} + 0,75x_{29} - 0,03x_{40} + 0,31x_{41} - 0,09x_{42} + 0,01x_{43} - 0,51x_{44} - 0,61x_{45} - 0,3x_{47} \end{cases}$$

u_5 – стан виробничого потенціалу підприємства;

v_5 – прибутковість основної діяльності підприємства;

$$r_{u_5v_5} = 0,59$$

$$p = 0,00$$

$$\begin{cases} u_6 = -3,26x_1 - 3,96x_2 + 0,32x_3 - 0,12x_4 + 0,04x_5 + 0,36x_6 - 0,62x_8 + 0,16x_9 - 0,18x_{10} - \\ - 0,18x_{13} + 0,25x_{14} - 0,38x_{16} + 0,01x_{17} + 0,25x_{18} + 0,23x_{19} + 0,07x_{20} - 0,4x_{21} + 0,12x_{22} + \\ + 0,32x_{23} - 0,71x_{24} - 0,17x_{25} + 0,43x_{26} - 0,18x_{27} + 0,6x_{30} - 0,18x_{31} - 0,97x_{32} + 1,17x_{33} - \\ - 0,1x_{34} - 0,68x_{35} - 0,34x_{36} - 0,07x_{37} - 0,12x_{38} - 0,04x_{39} + 0,25x_{46} + 0,12x_{48} \\ v_6 = -0,13x_{28} - 0,01x_{29} + 0,04x_{40} - 0,67x_{41} - 0,52x_{42} + 1,32x_{43} - 0,93x_{44} - 0,04x_{45} + 0,41x_{47} \end{cases}$$

u_6 – платоспроможність підприємства та його майновий стан;

v_6 – рентабельність усього вкладеного капіталу;

$$r_{u_6v_6} = 0,56$$

$$p = 0,04$$

$$\begin{cases} u_7 = -9,51x_1 - 9,92x_2 - 1,12x_3 - 0,66x_4 - 0,28x_5 - 0,22x_6 - 0,13x_8 - 0,15x_9 + 0,1x_{10} - 0,13x_{13} + \\ + 0,04x_{14} - 0,17x_{16} + 0,39x_{17} + 0,3x_{18} + 0,3x_{19} - 0,69x_{20} + 0,46x_{21} + 0,18x_{22} - 0,17x_{23} - \\ - 0,42x_{24} + 0,27x_{25} + 0,27x_{26} - 0,72x_{27} - 0,07x_{30} + 0,35x_{31} - 0,71x_{32} + 0,15x_{33} + 0,15x_{34} + \\ + 0,02x_{35} - 0,18x_{36} + 0,14x_{37} + 0,53x_{38} + 0,13x_{39} + 0,36x_{46} - 0,18x_{48} \\ v_7 = 0,02x_{28} + 0,82x_{29} - 0,59x_{40} + 0,37x_{41} - 0,21x_{42} - 0,33x_{43} + 0,53x_{44} - 0,36x_{45} + 0,63x_{47} \end{cases}$$

u_7 – достатність обігових коштів підприємств;

v_7 – здатність підприємств генерувати прибуток.

Наведені складні ознаки мають великий коефіцієнт канонічної кореляції, який дорівнює 0,95478. Структуру утворює пара $x_{22} - x_{45}$, тобто прибутковість власного капіталу повністю залежить від його маневрування. За величиною вагових коефіцієнтів перед змінними, що визначають елементарні ознаки, конкретизуємо сформовані складні ознаки, які характеризують два визначальних аспекти виробничо-господарської діяльності підприємств: u_1 – це швидкість обігу власних коштів підприємств; v_1 – дохідність власного капіталу.

Перші сім пар канонічних функцій виокремлені за наявним тісним взаємозв'язком, про що свідчать значення коефіцієнтів канонічної кореляції в табл. 1, а також підтверджується їх істотність за критерієм Пірсона.

Рівень величини взаємозв'язку елементарної та складної ознаки свідчить про рівень корегованості чи керованості ознак у наявній структурі ознак об'єкта. За допомогою канонічних кореляцій можна спостерігати деформації в структурах усіх ознак і елементарних, і складних СЕС. Для цього слід застосувати даний математичний метод на множині значень показників, що виражають елементарні ознаки в динаміці.

Таблиця 1

Статистичні характеристики канонічних кореляцій

№ пар складних ознак	Власн і числа	Коефіцієнти канонічних кореляцій	Статистика Уїлкса	Критерій Пірсона	Число ступенів свободи	Рівень значущості α
1	0,911604	0,95478	0,0003138	939,761	315	0,0000
2	0,848407	0,92109	0,0035504	657,14	272	0,0000
3	0,598735	0,77378	0,0234209	437,356	231	0,0000
4	0,531898	0,739313	0,0583676	330,976	192	0,0000
5	0,501735	0,708332	0,12469	242,544	155	0,0000
6	0,346449	0,588599	0,250248	161,388	120	0,0070
7	0,309634	0,556448	0,382905	111,836	87	0,0377
8	0,281878	0,530922	0,55464	68,6693	56	0,1192
9	0,227652	0,477129	0,772348	30,0943	27	0,3099

У результаті обчислених моделей за 1999 – 2002 рр., узагальнення містяться в табл. 2. Системи складних ознак слід формувати за рівнем значущості взаємозв'язків, не більшим ніж 0,05.

За змістом табл. 2 можна зробити висновок, що результативність виробничо-господарської діяльності підприємств даної сукупності усталено (протягом п'яти років) визначається дохідністю власного капіталу та рентабельністю виробленої продукції, які залежать від оборотності власних коштів підприємств, мобільності наявних ресурсів. Зміна стану систем складних ознак обумовлюється зміною рівнів величин елементарних ознак, а отже, підприємствам потрібно оперативно, тактично та стратегічно планувати свою діяльність, що має виражатися в рівнях показників, які відображають елементарні ознаки основних факторів діяльності.

Якщо закон розподілу значень величини ознаки несиметричний, потрібно детально дослідити величину; рекомендуємо в даному випадку розв'язати задачу розділення суміші. Задача розділення суміші завжди була непростю математичною задачею. Рекомендується її розв'язувати наступним чином.

Зміст змодельованих систем складних ознак виробничо-господарської діяльності підприємств, періодично фіксованих в часі

Ознаки, що характеризують ресурсно-ринковий стан підприємств (складні ознаки U)	Ознаки, що характеризують результативність діяльності підприємств (складні ознаки V)
1999 – 2000 рр.	
U_1 – мобільність ресурсів підприємств; U_2 – структура капіталу підприємств; U_3 – стан, достатність і оборотність активів; U_4 – забезпеченість підприємств власними коштами	V_1 – отриманий дохід; V_2 – прибутковість основної діяльності підприємств; V_3 – отриманий дохід; V_4 – прибутковість діяльності
1999 – 2001 рр.	
U_1 – ліквідність активів підприємств; U_2 – мобільність ресурсів підприємств; U_3 – структура виробничого потенціалу та його гнучкість; U_4 – стан оборотних засобів та швидкість їх руху	V_1 – прибутковість коштів, вкладених в активи; V_2 – загальна рентабельність підприємств; V_3 – здатність підприємств генерувати чистий прибуток; V_4 – прибутковість діяльності
1999 – 2002 рр.	
U_1 – оборотність коштів підприємств; U_2 – мобільність ресурсів підприємств; U_3 – структура капіталу підприємств; U_4 – ефективність використання обігових коштів	V_1 – віддача активів та капіталу; V_2 – рентабельність виробленої продукції; V_3 – отриманий дохід; V_4 – прибутковість діяльності підприємств
1999 – 2003 рр.	
U_1 – швидкість обігу власних коштів підприємств; U_2 – швидкість обігу всього капіталу підприємств; U_3 – структура капіталу підприємств; U_4 – ефективність використання матеріальних засобів та грошових коштів; U_5 – стан виробничого потенціалу підприємств; U_6 – платоспроможність підприємств та їх майновий стан; U_7 – стан і достатність обігових коштів	V_1 – дохідність власного капіталу; V_2 – рентабельність виробленої продукції; V_3 – отриманий дохід; V_4 – прибутковість діяльності підприємств; V_5 – прибутковість основної діяльності підприємств; V_6 – рентабельність усього вкладеного капіталу; V_7 – здатність підприємств генерувати прибуток