**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

Кафедра вищої математики та
економіко-математичних методів

# Методичні рекомендації до практичних робіт
# з навчальної дисципліни «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

Харків, 2019 р.

# Лінійна алгебра

**Завдання 1.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР): 1) методом Крамера та методом Жордана – Гаусса, 2) дослідити систему на сумісність та у разі сумісності розв'язати її методом Жордана – Гауса.

**Розв'язання**. 1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$.

Згідно з правилом Крамера розв'язок СЛАР $n \times n$ відшукується за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ \ldots\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ – невідомі величини;

$\Delta$ – визначник системи рівнянь ($\Delta \neq 0$), створений із коефіцієнтів при невідомих;

$\Delta_j,\ j = 1, 2, \ldots n,$ – детермінанти, що відповідають невідомим $x_j$; вони одержуються з визначника системи заміною $j$-го стовпця стовпцем вільних членів – правих частин рівнянь. Наведені відомості визначають відповідні кроки (порядок) розв'язування задачі.

Складаємо і обчислюємо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Оскільки визначник $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Складаємо і обчислюємо визначники $\Delta_j,\ j = 1, 2, 3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -12;$$

відповідно для $\Delta_2, \Delta_3$ отримуємо:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 6,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 5.$$

Визначимо значення невідомих:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2},\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}.$$

Робимо перевірку, підставляючи значення невідомих у кожне (!) з рівнянь системи:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 3 - 1{,}5 - 2\cdot 1{,}25 = 5 \\ 2\cdot 3 - 1{,}5 + 2\cdot 1{,}25 = 7 \\ -3 + 1{,}5 - 2\cdot 1{,}25 = -4 \end{cases}.$$

Суть методу Жордана – Гаусса розв'язання СЛАР $n \times n$ при Δ≠0 полягає в еквівалентних перетвореннях вихідної системи з метою одержати в кожному рівнянні лише одне невідоме (і в усіх рівняннях – різні).

Для реалізації методу системі рівнянь ставлять у відповідність матрицю, складену з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах (це так звана розширена матриця $A|B$), і оперують її рядками, як рівняннями. Тобто рядки додають, віднімають, помножують на числа, що рівносильні відповідним діям над рівняннями.

Цей спосіб передбачає запис розв'язування системи у вигляді ланцюжка матриць, які відповідають еквівалентним системам, що одержуються у результаті перетворень; еквівалентність матриць позначатимемо символом «~».

Виписуємо розширену матрицю системи (при цьому стовпець вільних членів відокремлюється вертикальною рискою) і аналізуємо її з точки зору найшвидшого досягнення мети:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Виконуємо еквівалентні перетворення системи за допомогою відповідних лінійних перетворень розширеної матриці: третє рівняння додаємо по черзі до першого і другого і рівняння ($III + I$, $III + II$), на наступному кроці друге (із одержаних) рівняння додамо до третього, а потім помножимо на (-2) і додамо до першого ($II + III$, $II \times (-2) + I$). Далі третій рядок помножуємо на (-2) та додамо до першої строки:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -5/4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -5/4 \\ x_1 = 3 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}.$$

На останньому кроці проводимо дії, які зводять основну матрицю системи до одиничної (з точністю до порядку стовпців). Після чого виписуємо систему, яка відповідає виконаним перетворенням. Як бачимо, її рівняння представляють значення невідомих величин.

Робимо перевірку і у разі правильного розв’язку, як у даному випадку, записуємо відповідь.

**Відповідь**: $x_1 = 3$; $x_2 = -1{,}5$; $x_3 = -1{,}25$.

2. дослідити систему на сумісність та у разі сумісності розв’язати її методом Жордана – Гаусса.

При дослідженні системи на сумісність зробимо ті ж самі кроки, що і для розв’язання її методом Жордана – Гаусса.

Випишемо розширену матрицю системи $A|B$ та установлюємо ранги матриць $A$ і $A|B$:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 11x_2 - 6x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 11 & -6 & 7 \end{array}\right).$$

Виконаємо лінійні перетворення:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 11 & -6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{pmatrix} I \cdot (-1) + II \\ I \cdot (-1) + III \end{pmatrix} \qquad (II \cdot (-1) + III).$$

З виду отриманої матриці робимо висновок: $r_A = 2$, $r_{A|B} = 2$. Мінор, наприклад, $M^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & {}_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ є водночас мінором як основної матриці системи, так і розширеної. Таким чином, за критерієм сумісності СЛАР $m \times n$ – теоремою Кронекера – Капеллі – система має розв'язки, бо $r_A = r_{A|B}$; причому їх нескінченно багато, адже ранг системи менший числа невідомих.

Розв'язуємо систему, зводячи її до СЛАР 2×2. Для цього залишаємо в лівих частинах рівнянь невідомі, які визначаються базисним мінором (це $x_1, x_3$), а невідоме $x_2$ оголошуємо вільним і відповідні члени рівнянь переносимо в праві частини:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ \quad -7x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \ x_1 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2},\ x_3 = \frac{7x_2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Покладемо $x_2 = c$, де $c$ – довільне дійсне число, тоді одержимо: $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{c}{2}$, $x_2 = c$, $x_3 = \frac{7c}{4} - \frac{1}{4}$. Такий вид запису відповіді називається загальним розв'язком системи.

## Елементи математичного аналізу

**Завдання 2.** Знайти границі функцій:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 - 14x + 17}{12x^3 + 7x - 3}; \qquad \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 + x - 14}{x^2 + 3x - 10}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\lim_{x\to\infty} \left( \frac{2x-4}{2x+3} \right)^{x+1}.$$

**Розв'язання.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2 - 14x + 17}{12x^3 + 7x - 3}$. При $x \to \infty$ у чисельнику та знаменнику дробу $\frac{7x^2 - 14x + 17}{12x^3 + 7x - 3}$ маємо нескінченно великі величини, тобто невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Щоб розкрити цю невизначеність, винесемо за дужки в чисельнику та знаменнику змінну $x$ у найвищому ступені, тобто $x^3$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-14x+17}{12x^3+7x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\left(\frac{7}{x}-\frac{14}{x^2}+\frac{17}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(12+\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{12}=0.$$

Далі скорочуємо дріб на $x^3$ і, користуючись теоремою про зв'язок нескінченно великих та нескінченно малих величин $\left(\frac{1}{\infty}=0\right)$, одержуємо: суму трьох нескінченно малих у чисельнику, суму константи і двох нескінченно малих у знаменнику. Такий дріб не дає невизначеність: за арифметичними властивостями нескінченно малою його границею є нуль.

$\underline{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2+3x-10}}$. Здійснюємо граничний перехід, тобто замість змінної $x$ підставляємо її граничне значення ($x=2$), і отримуємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ (відношення двох нескінченно малих). Щоб розкрити цю невизначеність, розкладемо чисельник і знаменник на множники (один з них при $x\to 2$ обов'язково прямуватиме до нуля, а саме $(x-2)$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(3x-7)}{(x-2)\cdot(x-5)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-7)}{(x-5)}=\frac{1}{3}.$$

Після скорочення дробу на $(x-2)$ невизначеність "зникає": граничний перехід дає певне число $(1/3)$, яке і є границею заданої функції.

$\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}}$. Здійснюємо граничний перехід, тобто замість змінної $x$ підставляємо її граничне значення ($x=0$), і отримуємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб розкрити цю невизначеність, треба позбутися ірраціональності в чисельнику дробу. Для цього, згідно з основною властивістю дробу, помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений чисельнику:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Після спрощення дробу граничний перехід дає певне число $(3/2)$, тобто границю функції.

$\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}}$. Після граничного переходу отримаємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Якщо така невизначеність породжується функціями, складовими яких є тригонометричні функції, то, як правило, застосовують першу визначну границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Більш прийнятним є використання теореми про еквівалентні нескінченно малі величини: замість функцій $\sin 3x$ та $tg\,x$ (нескінченно малих при $x\to 0$) записати еквівалентні їм нескінченно малі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\ x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\sin 3x\approx 3x\\ tg\ x\approx x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

$\underline{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+3}\right)^{x+1}}$.

Здійснюємо граничний перехід $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+3}\right)^{x+1}=\left[1^{\infty}\right]$. Невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$, яка породжується відношенням двох багаточленів однакового степеня при $x\to\infty$, розкривається легко: відповідна границя дорівнює відношенню старших коефіцієнтів, тобто одиниці. Таким чином, приходимо до невизначеності виду $1^{\infty}$, яка розкривається за допомогою другої визначної границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e\approx 2{,}718$.

Виконаємо тотожні перетворення основи ступеня з метою отримати структуру (будову) другої чудової границі, а саме – додамо і віднімемо одиницю:

$$1+\frac{2x-4}{2x+3}-1=1+\frac{2x-4-2x-3}{2x+3}=1+\frac{-7}{2x+3}=1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-7}}.$$

Потім подамо основу ступеня, як ступінь з показником, рівним добутку знаменника другого доданку основи на обернений дріб, і врахуємо заданий за умовою показник $(x+1)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x+3}\right)^{x+1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-7}}\right)^{\frac{2x+3}{-7}}\right]^{\frac{-7}{2x+3}\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x-7}{2x+3}}.$$

Границя виразу в квадратних дужках дає число $e$, бо при $x\to\infty$ і дріб $\frac{2x+3}{-7}$ прямує до нескінченності. Залишається обчислити границю показника $e$:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x-7}{2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{-7}{2}=-3{,}5$. Шукана границя дорівнює $e^{-3{,}5}$.

**Завдання 3.** Знайти похідні функцій.

а) $y=\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x^3}+4\right)^5$; б) $y=\cos(6x-4)\cdot\ln(2+x)$; в) $y=\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^2$.

**Розв'язання.** а) користуючись правилом відшукування похідної складеної функції (і таблицею похідних), знайдемо похідну від зовнішньої – степеневої – функції і помножимо на похідну від внутрішньої функції, тобто від основи степеня:

$$y'=5\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x^3}+4\right)^4\cdot\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x^3}+4\right)'=5\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x^3}+4\right)^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x^4}\right);$$

б) задана функція є добутком двох елементарних функцій, тому скористаємось правилом відшукування похідної добутку функцій: $(uv)'=u'v+uv'$, де $u=\cos(6x-4)$, $v=\ln(2+x)$:

$$y' = \left(\cos(6x-4)\right)' \cdot \ln(2+x) + \cos(6x-4) \cdot \left(\ln(2+x)\right)' =$$
$$= -6\sin(6x-4) \cdot \ln(2+x) + \cos(6x-4) \cdot \frac{1}{2+x};$$

в) задана функція складена. Врахуємо, що внутрішня функція $\frac{2x+3}{2x-3}$ є часткою двох функцій, тому її похідну будемо знаходити за правилом $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, і похідну від зовнішньої – степеневої – функції помножимо на похідну частки:

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x+3)'(2x-3) - (2x-3)'(2x+3)}{(2x-3)^2} = -24 \cdot \frac{2x+3}{(2x-3)^3}.$$

**Завдання 4.** 1) Для функції двох змінних $z = e^{-x^2+2y^3}$ знайти частинні похідні першого та другого порядків.

**Розв'язання.** Знайдемо частинні похідні першого порядку. Для цього будемо користуватися правилами диференціювання функції однієї змінної: при диференціюванні за змінною $x(y)$ вважатимемо змінну $y(x)$ сталою.

До того ж скористаємося правилом диференціювання складеної функції.

$$z'_x = (y = const) = e^{-x^2+2y^3} \cdot \left(-x^2 + 2y^3\right)'_x = -2x \cdot e^{-x^2+2y^3};$$
$$z'_y = (x = const) = e^{-x^2+2y^3} \cdot \left(-x^2 + 2y^3\right)'_y = 6y^2 \cdot e^{-x^2+2y^3}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(-2x \cdot e^{-x^2+2y^3}\right)'_x = (y = const) =$$
$$= e^{-x^2+2y^3} \cdot 4x^2 - 2e^{-x^2+2y^3} = 2e^{-x^2+2y^3}\left(2x^2 - 1\right);$$
$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(-2x \cdot e^{-x^2+2y^3}\right)'_y = (x = const) = (-2x) \cdot \left(e^{-x^2+2y^3}\right)'_y =$$
$$= (-2x) \cdot 6y^2 \cdot e^{-x^2+2y^3} = -12xy^2 \cdot e^{-x^2+2y^3};$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(6y^2 \cdot e^{-x^2+2y^3}\right)'_x = \left(y = const\right) = 6y^2 \cdot \left(e^{-x^2+2y^3}\right)'_x =$$

$$= 6y^2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2+2y^3} = -12xy^2 \cdot e^{-x^2+2y^3};$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(6y^2 \cdot e^{-x^2+2y^3}\right)'_y = \left(x = const\right) =$$

$$= e^{-x^2+2y^3} \cdot 36y^4 + 12y \cdot e^{-x^2+2y^3} = 12y \cdot e^{-x^2+2y^3} \cdot \left(3y^3+1\right).$$

2) Для функції двох змінних $z = \ln\left(x^2+3y^2\right)$ знайти похідну в точці $M_1(1,1)$ за напрямом $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_2(4,3)$ та $grad\, z(M_1)$.

**Розв'язання.** Знайдемо частинні похідні функції:

$z'_x = \dfrac{2x}{x^2+3y^2}$, $z'_y = \dfrac{6y}{x^2+3y^2}$, тоді $grad\, z(M_1) = (0{,}5; 1{,}5)$.

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 2)$,

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Оскільки похідна за напрямком знаходиться за формулою $z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta$, запишемо шукану похідну: $z'_{\overrightarrow{M_1M_2}}(M_1) = \dfrac{9}{2\sqrt{13}}$.

**Завдання 5.** Знайти загальний розв'язок та частинний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклади завдання містять диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними (а), однорідне рівняння (б), лінійне рівняння (в).

*Приклад 1.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'\sin x = y\ln y$.

**Розв'язання.** Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Спочатку визначимо загальний розв'язок рівняння. Для цього розв'яжемо його відносно $y'$ та замінимо $y'$ на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{\sin x}.$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{\sin x}$.

Після інтегрування маємо: $\ln\left|\ln y\right|=\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+\ln c$.

Пропотенціюємо останній вираз: $\ln y=c\cdot tg\dfrac{x}{2}$ або $y=e^{c\cdot tg\frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок.

*Приклад 2.* Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xdy-ydx=ydy$, який задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

**Розв'язання.** Згрупуємо доданки, які містять диференціали $dx$ і $dy$: $(x+y)dy-ydx=0$.

Відокремити змінні неможливо завдяки наявності множника $(x+y)$ перед $dy$. Перейдемо від рівняння у диференціалах до рівняння в похідних.

Для цього поділимо обидві частини рівняння на $dx$: $(x+y)y'-y=0$. Поділивши обидві частини рівняння на $x$, $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)y'-\dfrac{y}{x}=0$ матимемо рівняння, загальний вигляд якого $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ – це загальний вигляд однорідного відносно змінних $x$ та $y$ рівняння. Для його розв'язання застосуємо заміну $\dfrac{y}{x}=t$; $y'=t'x+t$ $\Rightarrow$ $(1+t)(t'x+t)-t=0$.

Після перемноження виразів у дужках та згрупування відповідним чином, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними: $t'x(1+t)=-t^2$.

Далі, як у попередньому прикладі, замінимо $t'$ на $\dfrac{dt}{dx}$, відокремимо змінні та інтегруємо для отримання загального розв'язку диференціального рівняння. Остаточно отримаємо: $\dfrac{1}{t}-\ln|t|=\ln|x|=\ln c$.

Зробивши зворотну підстановку (замість $t$ підставимо $\frac{y}{x}$) і використавши властивості логарифмів, запишемо загальний інтеграл: $\frac{x}{y} = \ln|cy|$.

Використовуючи початкову умову $y(0)=1$, отримаємо: $0 = \ln c \Rightarrow c = 1$.

Остаточно маємо частинний інтеграл: $\frac{x}{y} = \ln|y|$.

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ .

**Розв'язання.** Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо його за допомогою методу Бернуллі.

Зробимо заміну $y = uv$. Тоді $y' = u'v + v'u$. Підставимо вирази для $y$ та $y'$ у вихідне рівняння: $u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}$ .

Згрупуємо члени рівняння, які містять $u$ і винесемо $u$ за дужки:

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2} .$$

Нехай функція $v$ є частинним інтегралом рівняння $v' + 2xv = 0$. Тоді функція $u$ буде розв'язком рівняння $u'v = xe^{-x^2}$ . Розв'яжемо обидва рівняння, які є рівняннями з відокремлюваними змінними.

| | |
|---|---|
| $v' + 2xv = 0$, | $u'v = xe^{-x^2}$ , |
| $\frac{dv}{dx} = -2xv$, | $\frac{du}{dx}e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ , |
| $\frac{dv}{v} = -2xdx$, | $\frac{du}{dx} = x$, |
| $\ln\lvert v\rvert = -x^2$, | $\int du = \int xdx$, |
| $v = e^{-x^2}$ . | $u = \frac{x^2}{2} + c$. |

Остаточно отримаємо загальний розв'язок $y = e^{-x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c\right)$.

**Завдання 6**. Три стрільця стріляють по мішені. Ймовірність влучення для першого, другого та третього стрільця дорівнює відповідно: 0,7; 0,8; 0,9. Визначити ймовірність, що з першого пострілу влучить у мішень: а) тільки перший стрілець; б) тільки другий стрілець; в) перший за умовою, якщо відомо, що в мішень влучив тільки один із стрільців.

**Розв'язання.** Нехай подія $A_1$ полягає в тому, що перший стрілець влучить у мішень з першої спроби, подія $A_2$ – другий стрілець влучить у мішень із першої спроби, подія $A_3$ – третій стрілець влучить у мішень Тоді $\overline{A}_1$ – протилежна подія, яка полягає в тому, що перший стрілець не влучить у мішень із першої спроби, $\overline{A}_2$ – другий не влучить, $\overline{A}_3$ – третій не влучить. Події $A_i$ та $\overline{A_i}$ (де $i = \overline{1,3}$) утворюють повну групу несумісних подій. Оскільки за умовою задачі відомо, що $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}8$, $P(A_3) = 0{,}9$, то знаходимо ймовірності відповідних протилежних подій як: $P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$ та $P(\overline{A_3}) = 0{,}1$.

Нехай подія $A$ полягає в тому, що тільки перший стрілець влучить у мішень із першої спроби. Це передбачає, що другий та третій стрільці не влучать у мішень. Отже, подія $A$ становить добуток сумісних подій. Звідси маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3).$$

Оскільки події $A_1$, $\overline{A}_2$ та $\overline{A}_3$ є попарно незалежними (ймовірність того, що перший стрілець не влучить у мішень, не залежить від того, що другий та третій стрільці влучать або ні), то ймовірність добутку подій дорівнює добутку їх абсолютних ймовірностей. Згідно з цим знаходимо відповідь на перше питання задачі:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}014.$$

Нехай подія $B$ полягає в тому, що в мішень із першої спроби влучив тільки один (будь-який) стрілець. Це може бути або перший, або другий, або третій, при цьому два інших стрільця в мішень не влучать. Отже, маємо суму подій:

$$P(B) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\, \overline{A}_2\, A_3).$$

Оскільки події попарно несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(B) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3) =$$
$$= P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3).$$

Вище вже було доведено, що кожна з подій є добутком незалежних подій, відповідно, ймовірність добутку є добутком абсолютних ймовірностей. Таким чином, ми знаходимо відповідь на друге питання задачі:

$$P(B) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

Розглянемо подію $C$, яка полягає у тому, що в мішень влучив перший стрілець, якщо відомо, що тільки один із стрільців влучив у мішень із першої спроби. Оскільки подія вже відбулася, і необхідно переоцінити ймовірність гіпотези, реалізація якою супроводжувалася появою події, визначення ймовірності здійснюється за формулою Байєса. Маємо три гіпотези, перша з яких полягає у тому, що в мішень влучив перший стрілець, друга – тільки другий, третя – тільки третій. Повну ймовірність події, яка полягає в тому, що в мішень влучить тільки один із стрільців, вже є визначеною попередньо – це ймовірність події $B$. Отже, формула Байєса в даному випадку має такий вигляд:

$P(C) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \mid B) = \dfrac{P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})}{P(B)}$. Звідси визначаємо відповідь на третє питання задачі:

$$P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \mid B) = \frac{0{,}014}{0{,}092} \approx 0{,}152.$$

**Відповідь**: а) 0,014; б) 0,092; в) 0,152.

**Завдання 7.** Проводять $n = 4$ незалежних однорідних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи певної події дорівнює $p = 0{,}7$. За законом розподілу випадкової величини $X$, якою вважають кількість випробувань, у яких спостерігалася поява події, необхідно: а) побудувати многокутник розподілу; б) визначити математичне сподівання випадкової величини $M(X)$, її дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення

$\sigma(X)$.

**Розв'язання.** Оскільки випробування однорідні та незалежні, тобто реалізується схема Бернуллі, то ймовірність появи події $m$ разів у серії з $n$ випробувань визначається за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $p$ − ймовірність появи події $A$, за якою ведуться спостереження, в окремому (одиничному) випробуванні;

$q$ − ймовірність того, що в окремому (одиничному) випробуванні подія $A$ не з'явиться, тобто ймовірність появи події $\overline{A}$;

$C_n^m$ − кількість сполучень із $n$ по $m$, де $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

За умовою задачі кількість випробувань становить $n = 4$, тобто випадкова величина $X$ може приймати лише п'ять значень: 0; 1; 2; 3 та 4. Для того, щоб побудувати закон розподілу, для кожного з цих значень обчислимо їх ймовірність за формулою Бернуллі. Наприклад, для $m = 0$ маємо:

$$P_4(0) = \frac{4!}{(4-0)! \cdot 0!} \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}0081.$$

Після визначення ймовірностей усіх можливих значень випадкової величини $X$ надамо закон її розподілу у вигляді табл.1

**Ряд розподілу випадкової величини $X$**

Таблиця 1

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = m)$ | 0,0081 | 0,0756 | 0,2646 | 0,4116 | 0,2401 |

Для того, щоб перевірити правильність обчислень, знайдемо суму ймовірностей усіх значень випадкової величини. Вона повинна дорівнювати одиниці. Переконаємося у цьому:

$$\sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = 0{,}0081 + 0{,}0756 + 0{,}2646 + 0{,}4116 + 0{,}2401 = 1.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини $X$ визначено. Тепер за даними табл. 1 побудуємо багатокутник розподілу. Для цього в прямокутній системі координат уздовж осі абсцис відкладаємо можливі значення випадкової величини, а вздовж осі ординат – відповідні їм ймовірності.

Маємо окремі точки: $M_1(0; 0{,}0081)$, $M_2(1; 0{,}0756)$, $M_3(2; 0{,}2646)$, $M_4(3; 0{,}4116)$ та $M_5(4; 0{,}2401)$. З'єднавши ці точки відрізками прямої, отримаємо многокутник розподілу (рис. 1).

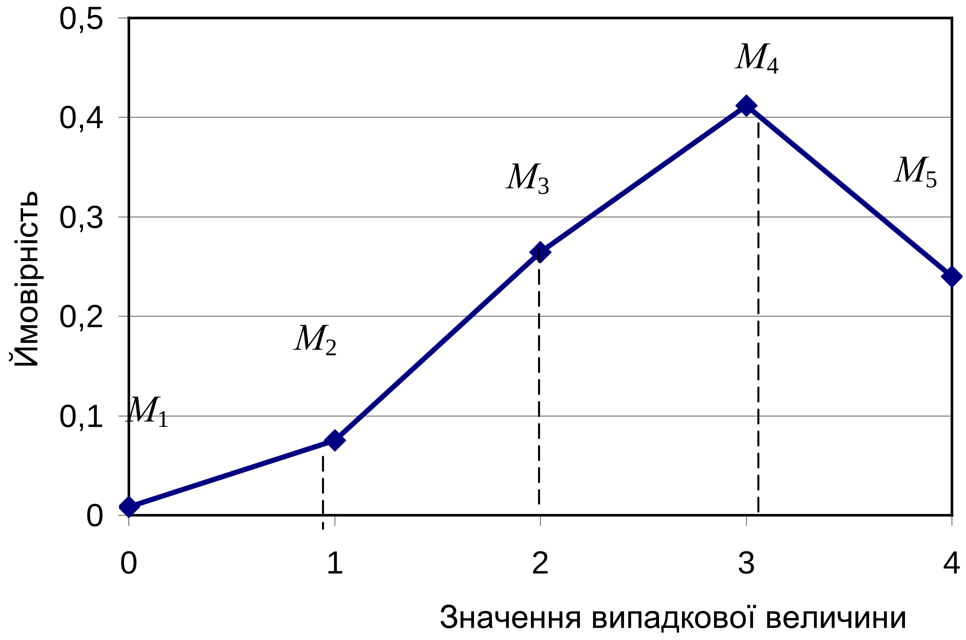


Рис. 1. **Багатокутник розподілу випадкової величини** $X$

Визначимо основні числові характеристики закону розподілу.

За означенням математичним сподіванням дискретної випадкової величини $M(X)$ є сума попарного добутку всіх можливих значень випадкової величини на їх ймовірність:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i =$$

$$= 0 \cdot 0{,}0081 + 1 \cdot 0{,}0756 + 2 \cdot 0{,}2646 + 3 \cdot 0{,}4116 + 4 \cdot 0{,}2401 = 2{,}8.$$

Оскільки розподіл випадкової величини є біноміальним (випробування здійснюються за схемою Бернуллі), то для визначення математичного сподівання можна скористатися формулою: $M(X) = n \cdot p$. Отже, маємо теж саме значення: $M(X) = 4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$.

За означенням дисперсія випадкової величини обчислюється як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання. За означенням маємо:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{5}(x_i-M(X))^2\cdot p_i=(0-2{,}8)^2\cdot 0{,}0081+(1-2{,}8)^2\cdot 0{,}0756+$$

$$+(2-2{,}8)^2\cdot 0{,}2646+(3-2{,}8)^2\cdot 0{,}4116+(4-2{,}8)^2\cdot 0{,}2401=0{,}84.$$

Дисперсію можна також обчислити за перетвореною формулою, яка є рівносильною вихідній:

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=$$

$$=0^2\cdot 0{,}0081+1^2\cdot 0{,}0756+2^2\cdot 0{,}2646+3^2\cdot 0{,}4116+4^2\cdot 0{,}2101-(2{,}8)^2=0{,}84.$$

Той самий результат ми отримаємо, якщо скористаємося формулою обчислення дисперсії для випадкової величини, що розподілена за біноміальним законом:

$$D(X)=n\cdot p\cdot q=4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}84.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини обчислюємо за означенням як корінь квадратний з дисперсії. Отже, маємо:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}84}=0{,}9165.$$

**Відповідь**: $M(X)=2{,}8$; $D(X)=0{,}84$; $\sigma(X)=0{,}9165$.

**Завдання 8.** Неперервна випадкова величина $X$ задана функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{1}{2};\\ 2x-1, & \frac{1}{2}<x\le 1.\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Визначити: а) основні числові характеристики розподілу; б) ймовірність того, що випадкова величина $X$ матиме значення, які належать інтервалу $(0{,}5;\,0{,}8)$.

**Розв'язання.** Неперервна випадкова величина $X$ задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Для того, щоб визначити основні числові характеристики випадкової величини, необхідно знайти щільність розподілу ймовірностей, тобто диференціальну функцію розподілу $f(x)$, яка є похідною першого порядку від інтегральної функції розподілу $F(x)$. Отже, $f(x)=F'(x)$. Маємо:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{1}{2};\\ 2, & \frac{1}{2}<x\le 1.\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Визначимо основні числові характеристики розподілу.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\cdot dx.$$

Звідси:

$$M(X)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot 2\cdot dx=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot dx=\left.\frac{2x^2}{2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=\left.x^2\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Дисперсію неперервної випадкової величини знаходимо, скориставшись перетвореною формулою для обчислення дисперсії:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)\,dx-\left(M(X)\right)^2.$$

Звідси:

$$D(X)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\cdot 2\cdot dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\cdot dx-\frac{9}{16}=\left.\frac{2}{3}x^3\right|_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{9}{16}=$$

$=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}-\frac{9}{16}=\frac{9}{16}$. Знаходимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{9/16} = 3/4.$$

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належатиме заданому інтервалу, знаходимо як приріст інтегральної функції розподілу на цьому інтервалі: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. Звідси:

$$P(0{,}5 < X < 0{,}8) = F(0{,}8) - F(0{,}5) = (1{,}6 - 1) = 0{,}6.$$

Наведені нижче графіки функції розподілу $F(x)$ (рис. 2) та функції щільності ймовірностей $f(x)$ (рис. 3):

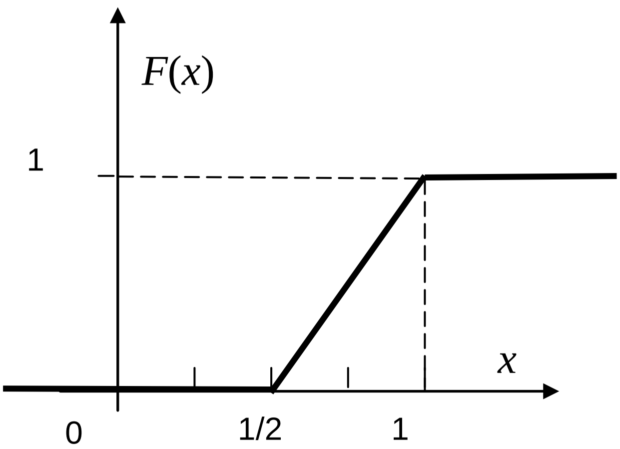


Рис. 2**. Графік інтегральної функції розподілу** $F(x)$

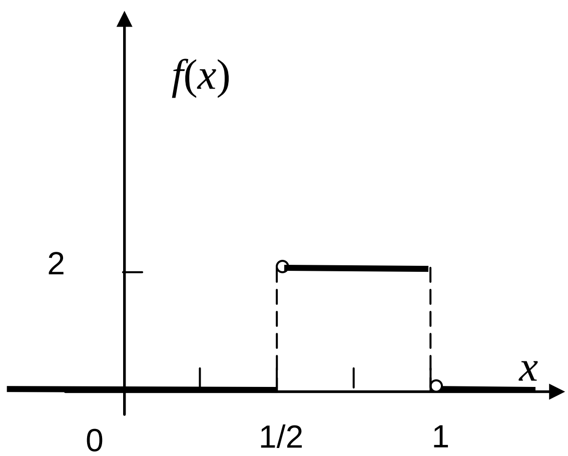


Рис. 3. **Графік функції щільності розподілу ймовірностей** $f(x)$

**Відповідь**: $M(X) = 3/4$, $D(X) = 9/16$, $\sigma(X) = 3/4$;

$$P(0{,}5 < X < 3) = 0{,}6.$$

**Завдання 9.** Необхідно за даними статистичного розподілу (табл.2):

а) побудувати гістограму відносних частот; б) обчислити вибіркову середню $\bar{x}$, виправлену дисперсію $S_x^2$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S_x$; в) у припущенні нормального закону розподілу в генеральній сукупності визначити межі довірчого інтервалу, до якого з надійністю $\gamma = 95\,\%$ належатиме математичне сподівання випадкової величини.

Таблиця 2

**Дані статистичного розподілу**

| $x_i$ | 10 | 10,5 | 11 | 11,5 | 12,0 | 12,5 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 8 | 10 | 60 | 12 | 5 | 3 | 2 |

**Розв'язання.** Попередній аналіз вихідних даних показав, що результати вимірювань випадкової величини $X$ були згруповані за інтервалами рівної довжини: $h = 0,5$. Для кожного інтервалу наведені середнє значення випадкової величини $x_i$ за цим інтервалом (середина інтервалу) та частота $m_i$, з якою значення випадкової величини попадають до певного інтервалу. Оскільки необхідно побудувати гістограму відносних частот, то обчислимо їх значення за формулою:

$$w_i = \frac{m_i}{n},$$

де $n$ – обсяг вибіркової сукупності, $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$; $k$ – загальна кількість інтервалів; $i$ – номер інтервалу (для даної вибіркової сукупності $i = \overline{1,7}$).

Обсяг вибірки становить: $n = 8 + 10 + 60 + 12 + 5 + 3 + 2 = 100$.

Побудуємо гістограму. За означенням гістограмою відносних частот називають сукупність прямокутників, основою кожного з яких є певний частинний інтервал (усі основи прямокутників визначаються довжиною кроку), а площа кожного прямокутника дорівнює відносній частоті, що відповідає цьому інтервалу. Це випливає з умови нормування, оскільки загальна площа всіх прямокутників для гістограми відносних частот дорівнює одиниці. Згідно з цим висота прямокутників на гістограмі обчислюється як відношення $w_i / h_i$, котре означається як щільність відносних частот. Оскільки всі частинні інтервали мають одинакову довжину $h = 0,5$, то для даного прикладу отримуємо співвідношення, за яким обчислюємо щільність відносних частот:

$$\frac{w_i}{h} = \frac{m_i}{0,5 \cdot 100}.$$

Для побудови гістограми вздовж осі абсцис відкладаємо межі інтервалів і на кожному з частинних інтервалів, як на основі, будуємо прямокутники, висота яких дорівнює щільності відносних частот, що відповідає певному інтервалу. Готова гістограма наведена на рис. 4.

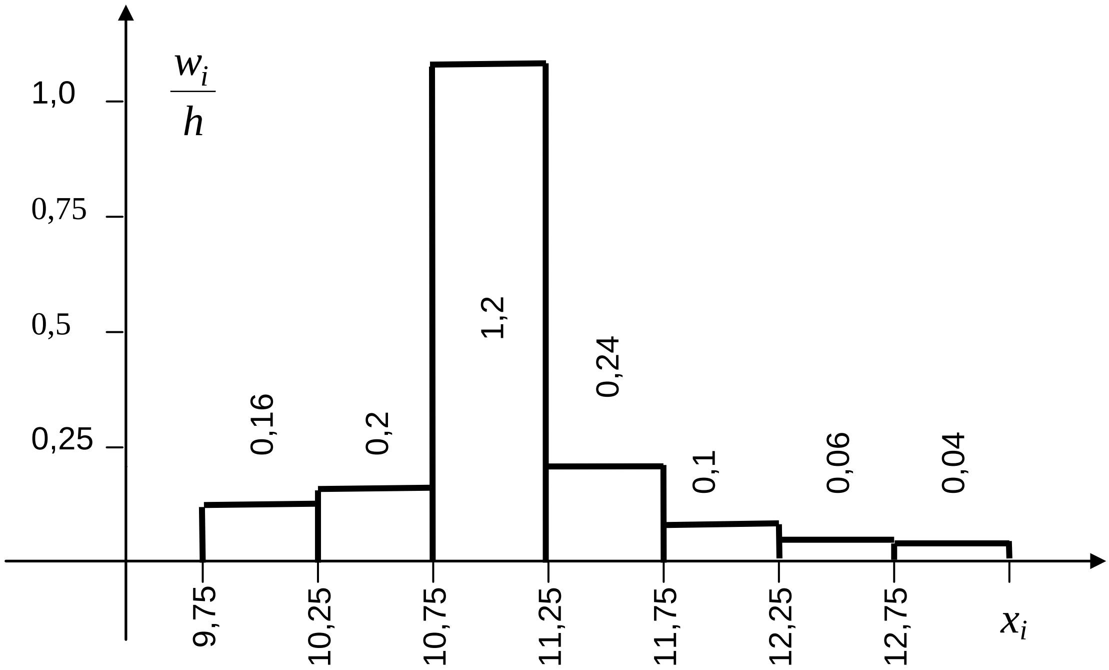


Рис. 4. **Гістограма відносних частот**

Вигляд гістограми припускає можливість того, що закон розподілу в генеральній сукупності є нормальним. За вибірковою сукупністю визначимо статистичні оцінки основних числових характеристик розподілу.

Статистичної оцінкою математичного сподівання випадкової величини є її вибіркова середня:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i \ ,$$

де $x_i$ у випадку згрупованих даних має сенс середини $i$-го інтервалу.

Слід зазначити, що вибіркова середня є незсунутою оцінкою математичного сподівання.

При обчисленні вибіркової дисперсії як статистичної оцінки дисперсії випадкової величини у генеральній сукупності необхідно ввести поправку на зсув. Отже, для визначення незсунутої вибіркової дисперсії користуються формулою:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i - \left(\overline{x}\right)^2 \right),$$

де $S_x$ − виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Обчислення вибіркових оцінок зручно проводити, надавши проміжні обчислення у вигляді таблиці (табл. 3).

Таблиця 3

| № п/п | $x_i$ | $m_i$ | $w_i$ | $y_i = w_i / h_i$ | $x_i \cdot w_i$ | $x_i^2 \cdot w_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10,2 | 8 | 0,08 | 0,16 | 0,8 | 8 |
| 2 | 10,9 | 10 | 0,10 | 0,2 | 1,05 | 11,025 |
| 3 | 11,6 | 60 | 0,60 | 1,2 | 6,6 | 72,6 |
| 4 | 12,3 | 12 | 0,12 | 0,24 | 1,38 | 15,87 |
| 5 | 13,0 | 5 | 0,05 | 0,1 | 0,6 | 7,2 |
| 6 | 13,7 | 3 | 0,03 | 0,06 | 0,375 | 4,6875 |
| 7 | 14,4 | 2 | 0,02 | 0,04 | 0,26 | 3,38 |
| Сума | | 100 | 1,00 | | 11,065 | 122,7625 |

Отже, сума за передостаннім стовпцем табл. 3 є вибірковою середньою. Відповідно маємо: $\overline{x} = 11{,}065$. Сума за останнім стовпцем табл. 3 використовується при визначенні виправленої вибіркової дисперсії:

$$S_x^2 = \frac{7}{7-1} \cdot \left(122{,}7625 - (11{,}065)^2\right) = 0{,}328.$$

Звідси визначаємо виправлене середнє квадратичне відхилення:

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{0{,}328} = 0{,}529.$$

У припущенні нормального закону розподілу в генеральній сукупності визначимо межі довірчого інтервалу, до якого з надійністю $\gamma = 95\,\%$ належатиме математичне сподівання випадкової величини.

Межі довірчого інтервалу обчислюються співвідношенням:

$$\overline{x} - t_\gamma \cdot S_x / \sqrt{n} < M(X) < \overline{x} + t_\gamma \cdot S_x / \sqrt{n},$$

де $t_\gamma$ – аргумент функції Лапласа, подвоєне значення якої дорівнює заздалегідь заданій надійності: $\Phi(t_\gamma)=0{,}5\cdot\gamma$.

Визначаємо, що $\Phi(t_\gamma)=0{,}95/2=0{,}475$. За довідковою таблицею знаходимо, що $t_\gamma=1{,}96$. Оскільки $n=100$, а $S_x=0{,}529$, то похибка оцінки математичного сподівання за вибірковою середньою не перевищує значення $\varepsilon=\dfrac{1{,}96\cdot 0{,}529}{\sqrt{100}}\approx 0{,}01$. Отже, можна стверджувати, що з ймовірністю 0,95 математичного сподівання випадкової величини $X$ належатиме інтервалу $11{,}065\pm 0{,}01$. Тобто з надійністю 95 % маємо: $11{,}055<M(X)<11{,}065$.

### Математичне програмування. Дослідження операцій

**Завдання 10.** Для виготовлення двох виробів $A$ та $B$ використовуються три види сировини, запаси яких обмежені й складають відповідно 300, 120 і 252 умовних одиниць. Прибуток від реалізації одиниці готової продукції кожного виду становить 20 і 40 умовних одиниць. Відповідно до прийнятої технології витрати сировини на виготовлення одиниці продукції $A$ становлять - 12, 4 і 3 одиниці, а на виготовлення одиниці продукції $B$ − 4, 4 і 12 одиниць кожного виду сировини. Визначити оптимальний план виробництва, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від реалізації готової продукції.

**Розв'язання.** За вихідними даними укладемо математичну модель задачі. Якщо через $x_1$ позначити кількість одиниць виробу $A$, а через $x_2$ – виробу $B$, то загальний прибуток $z$ від реалізації готової продукції є функцією двох змінних: $z=20x_1+40x_2$. Оскільки витрати сировини на виготовлення продукції не може перевищувати запасів, то обмеження з кожного виду сировини має вигляд системи нерівностей:

$$\begin{cases}12x_1+4x_2\le 300,\\ 4x_1+4x_2\le 120,\\ 3x_1+12x_2\le 252.\end{cases}$$

Крім того, кількість готової продукції не може бути від'ємним, тобто маємо обмеження на знак: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Задачу можна сформулювати таким чином: необхідно знайти такі значення $x_1$ і $x_2$, які б задовольняли системі обмежень і при яких цільова функція $z$ сягає максимального значення. Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \quad \to \quad \max,$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

*Застосуємо до розв'язання задачі графічний метод*. Для побудови багатокутника планів у І-ій чверті координатної площини проведемо прямі за рівняння:

$$L_1: \quad 12x_1 + 4x_2 = 300 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{25} + \frac{x_2}{75} = 1;$$

$$L_2: \quad 4x_1 + 4x_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{30} = 1;$$

$$L_3: \quad 3x_1 + 12x_2 = 252 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{84} + \frac{x_2}{21} = 1.$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів (рис. 5).

Побудуємо вектор $grad\, z = (20; 40)$, який визначає напрям найбільш швидкого зростання цільової функції, і перпендикулярно йому через початок координат проведемо лінію рівня, якій відповідає значення цільової функції $z_{\min} = 0$. Пересуваючи лінію рівня в напрямку градієнта, визначимо, що лінія рівня виходить з багатокутника планів через точку перетину прямих $L_2$ та $L_3$. Визначаємо її координати з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 30, \\ x_1 + 4x_2 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18. \end{cases}$$

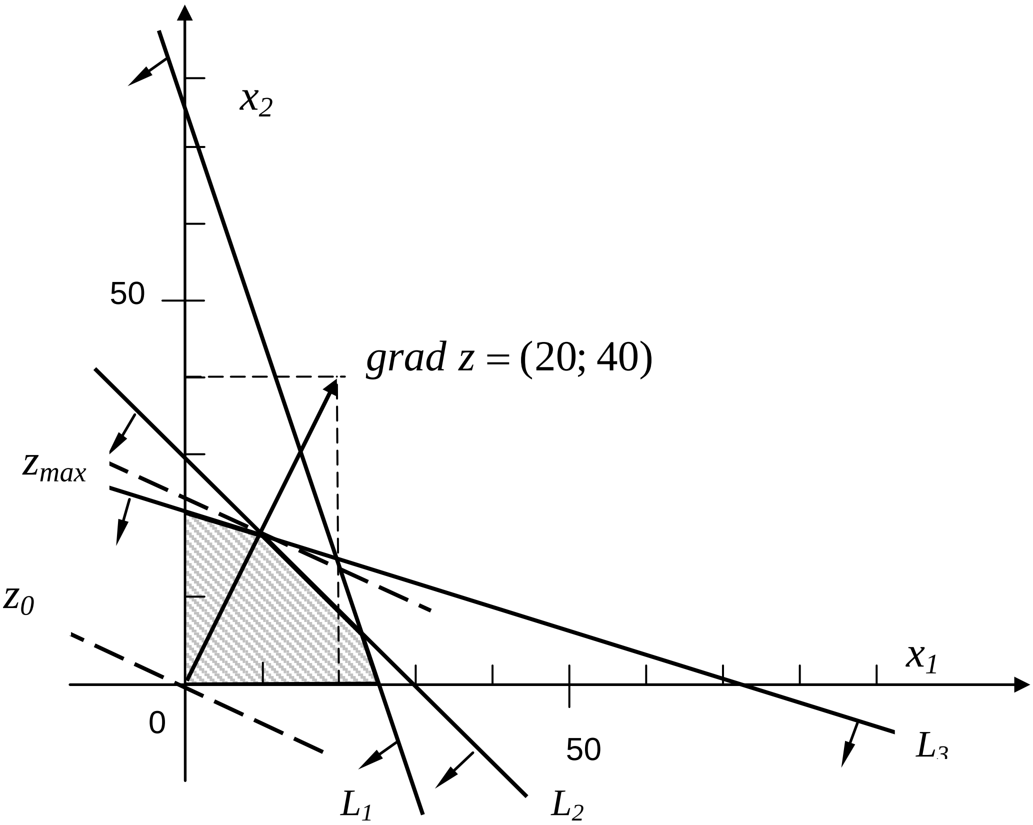


Рис. 5. **Графічне розв'язання задачі**

Отже, маємо оптимальний план $\mathbf{X}_{опт.} = (12; 18)$, якому відповідає максимальне значення цільової функції:

$$z_{\max} = z(\mathbf{X}_{опт.}) = 20 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 960.$$

Таким чином, підприємство повинне випускати 12 одиниць продукції $A$ та 18 одиниць продукції $B$, при цьому прибуток підприємства буде максимальним і складатиме 960 умовних одиниць.

Розв'яжемо задачу симплексним методом. Основна система обмежень надана у вигляді нерівностей. Перетворимо ці нерівності в рівняння, додавши в лівій частині кожної нерівності додаткові змінні $x_3$, $x_4$ та $x_5$, відносно яких також виконується вимога невід'ємності. Крім того, введемо цільову функцію $z(-\mathbf{X})$, яку будемо досліджувати на мінімум. Додаткові змінні входять до цільової функції з нульовими коефіцієнтами. Отже, математична модель задачі набуває вигляд:

$$z_1 = -20x_1 - 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 & = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \quad + x_4 & = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \quad\quad + x_5 & = 252, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Видно, що додаткові змінні утворюють базис, якому відповідає вихідний опорний план $\mathbf{X}_0 = (0; 0; 300; 120; 252)$. Заповнюємо симплексну таблицю( табл.4):

Таблиця 4

| № п./п рядка | Базис | $\vec{C}_{баз.}$ | $c_j$ | -20 | -40 | 0 | 0 | 0 | Примітки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\vec{P}_0$ | $\vec{P}_1$ | $\vec{P}_2$ | $\vec{P}_3$ | $\vec{P}_4$ | $\vec{P}_5$ | |
| I | $\vec{P}_3$ | 0 | 300 | 12 | 4 | 1 | 0 | 0 | |
| II | $\vec{P}_4$ | 0 | 120 | 4 | 4 | 0 | 1 | 0 | |
| III | $\vec{P}_5$ | 0 | 252 | 3 | 12 | 0 | 0 | 1 | |
| $z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\Delta_j = z_j - c_j$ | | | | 20 | 40 | 0 | 0 | 0 | $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0.$ |

План $\mathbf{X}_0$ не є оптимальним, оскільки він має дві додатні оцінки. Найбільша з них відповідає вектору $\vec{P}_2$, отже, його вводимо до базису.

Обчисливши симплексне відношення для вектора $\vec{P}_2$

$$\Theta = \min\left\{\frac{300}{4}; \frac{120}{4}; \frac{252}{12}\right\} = 21,$$

знаходимо, що з базиса треба вивести вектор $\vec{P}_5$. Отримуємо нову симплексну таблицю (у примітках указані дії над рядками) ( табл. 5):

Таблиця 5

| № рядка | Базис | $\vec{C}_{баз.}$ | $c_j$ | -20 | -40 | 0 | 0 | 0 | Примітки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\vec{P}_0$ | $\vec{P}_1$ | $\vec{P}_2$ | $\vec{P}_3$ | $\vec{P}_4$ | $\vec{P}_5$ | |
| IV | $\vec{P}_3$ | 0 | 216 | 11 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | I + (-4) · IV |
| V | $\vec{P}_4$ | 0 | 36 | 3 | 0 | 0 | 1 | -1/3 | II + (-4) · IV |
| VI | $\vec{P}_2$ | -20 | 21 | 1/4 | 1 | 0 | 0 | 1/12 | III : 12 |
| $z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$ | | | -840 | -10 | -40 | 0 | 0 | -10/3 | |
| $\Delta_j = z_j - c_j$ | | | | 10 | 0 | 0 | 0 | -10/3 | $\Delta_1 > 0$ |

Новому опорному плану $\mathbf{X}_1 = (0; 21; 216; 36; 0)$ відповідає цільова функція $z(-\mathbf{X}_1) = -840$. План не є оптимальним, оскільки має додатну оцінку. Отже, вводимо в базис вектор $\vec{P}_1$. За симплексним відношенням

$$\Theta = \min\left\{\frac{216}{11}; \frac{36}{3}; \frac{21}{1/4}\right\} = 12$$

із базиса треба вивести вектор $\vec{P}_4$. Після ітерації отримаємо табл. 6:

Таблиця 6

| № п/п рядка | Базис | $\vec{C}_{баз.}$ | $c_j$ | -20 | -40 | 0 | 0 | 0 | Примітки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\vec{P}_0$ | $\vec{P}_1$ | $\vec{P}_2$ | $\vec{P}_3$ | $\vec{P}_4$ | $\vec{P}_5$ | |
| VII | $\vec{P}_3$ | 0 | 84 | 0 | 0 | 1 | -11/3 | 8/9 | IV + (-11) · VIII |
| VIII | $\vec{P}_1$ | -40 | 12 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | -1/9 | V: 3 |
| IX | $\vec{P}_2$ | -20 | 18 | 0 | 1 | 0 | -1/12 | 1/9 | VI + (-1/4) · VIII |
| $z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$ | | | -960 | -20 | -40 | 0 | -10/3 | -20/3 | |
| $\Delta_j = z_j - c_j$ | | | | 0 | 0 | 0 | -10/3 | -20/3 | $\Delta_j \le 0$ |

План $\mathbf{X}_2 = (12; 18; 84; 0; 0)$ є оптимальним, оскільки всі його оцінки недодатні. Цьому плану відповідає найменше значення цільової функції, яке дорівнює $z(-\mathbf{X}_2) = -960$. Відповідно, $z_{\max} = z(\mathbf{X}_2) = 960$. Це співпадає з результатами графічного розв'язання задачі.

**Відповідь***:* підприємство матиме найбільший прибуток, що складає 960 умовних одиниць, якщо з наявних запасів сировини випускатиме 12 одиниць продукції $A$ та 18 одиниць продукції $B$. При цьому сировина 2-го та 3-го видів буде витрачена, а залишок сировини 1-го виду становитиме 84 одиниці.

**Завдання 11.** Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників $A_1$, $A_2$ і $A_3$ до споживачів $B_1$, $B_2$, $B_3$ і $B_4$, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими. Запаси вантажу задані матрицею $\mathbf{A} = (180; 400; 280)$, потреби споживачів – матрицею $\mathbf{B} = (240; 320; 120; 180)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $\mathbf{C} = \left(c_{ij}\right)_{3x4}$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Загальні запаси вантажу всіх постачальників становлять: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 280 = 860$. Це дорівнює загальним потребам усіх споживачів: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860$. Отже, транспортна задача є закритою.

Запишемо вихідні дані задачі у вигляді таблиці й складемо вихідний опорний план перевезень за методом північно-західного кута. Згідно з цим методом першою заповнюється клітинка, що має індекси $i = 1$, $j = 1$.

Порівнявши запаси постачальника $A_1$ і потреби споживача $B_1$, визначаємо, що обсяг постачання до цієї клітинки становить 180 одиниць. Оскільки постачальник $A_1$ вичерпав свої можливості, а споживачеві $B_1$ потрібно ще 60 одиниць, то наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 1$, направивши туди необхідні 60 одиниць вантажу. Тепер потреби споживача $B_1$ задовольнили у повному обсязі, а запас постачальника $A_2$ зменшився до 340 одиниць. Наступною заповнюємо клітинку $i=2$, $j=2$. Відповідно до потреб споживача $B_2$ направляємо туди 320 одиниць вантажу. Оскільки у постачальника $A_2$ залишилося ще 20 одиниць, поставимо цей вантаж до клітинки $i=2$, $j=3$. Тепер постачальник $A_2$ вичерпав свої можливості, але споживачеві $B_3$ необхідні ще 100 одиниць. Візьмемо цей вантаж у постачальника $A_3$, тобто робимо поставку такого обсягу до клітинки $i=3$, $j=3$. У постачальника $A_3$ лишилося ще 180 одиниць, але рівно стільки необхідно споживачеві $B_4$. Поставимо ці 180 одиниць до клітинки $i=3$, $j=4$. Отже, весь вантаж було розподілено та потреби всіх споживачів задовольнили. Маємо вихідний опорний план $\mathbf{X}_0$, який надано в табл. 7:

Таблиця 7

| Поста-чальники | Споживачі | | | | Запаси, $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 22<br>180 | 15 | 40 | 18 | 180 |
| $A_2$ | 9<br>60 | 12<br>320 | 32<br>20 | 16 | 400 |
| $A_3$ | 11 | 38 | 10<br>100 | 14<br>180 | 280 |
| Потреби, $b_j$ | 240 | 320 | 120 | 180 | 860 = =860 |

За вихідним опорним планом вартість перевезень становить:

$$z(\mathbf{X}_0) = 22\cdot180 + 9\cdot60 + 12\cdot320 + 32\cdot20 + 10\cdot100 + 14\cdot180 = 12500.$$

Цей план є невиродженим, оскільки кількість заповнених клітинок таблиці становить $m+n-1=6$, де $m$ – кількість постачальників ($m=3$), $n$ – кількість споживачів ($n=4$). Отже, кількість заповнених клітинок дорівнює числу базисних невідомих.

Перевіримо за методом потенціалів, чи є вихідний план оптимальним. З цією метою кожному постачальнику поставимо у відповідність потенціал $U_i$, а споживачеві – потенціал $V_j$. Значення потенціалів визначаємо за умов, що для кожної заповненої клітинки таблиці перевезень сума потенціалів постачальника та споживача дорівнює вартості перевезень одиниці вантажу між цими учасниками, тобто $U_i + V_j = c_{ij}$. Отже, для базисних клітинок отримуємо систему з 6-ти рівнянь, яка містить сім невідомих:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 22, \\ U_2 + V_1 = 9, \\ U_2 + V_2 = 12, \\ U_2 + V_3 = 32, \\ U_3 + V_3 = 10, \\ U_3 + V_4 = 14. \end{cases}$$

Така система має нескінчену множину розв'язків. Знайдемо будь-який частинний розв'язок. Вибираємо довільно значення одного з потенціалів. Нехай $U_1 = 0$, тоді з системи рівнянь знаходимо значення потенціалів усіх інших учасників: $V_1 = 22$, $U_2 = -13$, $V_2 = 25$, $V_3 = 45$, $U_3 = -35$, $V_4 = 49$. Тепер перевіряємо, чи виконується для всіх вільних клітинок таблиці перевезень умова: $U_i + V_j \le c_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$, тобто чи є оцінки усіх вільних клітинок $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - c_{ij}$ не додатними.

Складемо таблицю потенціалів таким чином. До кожної клітинки таблиці, яка відповідає базисним змінним, ставимо значення $c_{ij}$, а для вільних клітинок у правому верхньому куті вказуємо вартість перевезення одиниці вантажу за цією клітинкою $c_{ij}$, а у лівому нижньому куті – суму потенціалів учасників перевезень за цією клітинкою $U_i + V_j$ .

Отримаємо таблицю потенціалів( табл. 8):

Таблиця 8

| $U_i$ \ $V_j$ | $V_1 = 22$ | $V_2 = 25$ | $V_3 = 45$ | $V_4 = 49$ |
|---|---|---|---|---|
| $U_1 = 0$ | 22 | 15<br>25 | 40<br>45 | 18<br>49 |
| $U_2 = -13$ | 9 | 12 | 32 | 16<br>36 |
| $U_3 = -35$ | 11<br>-13 | 38<br>-10 | 10 | 14 |

Оскільки в таблиці є чотири клітинки з додатною оцінкою: $\Delta_{12} = 10$, $\Delta_{13} = 5$, $\Delta_{14} = 31$, $\Delta_{24} = 20$, то план **X**$_0$ не є оптимальним. Його можна покращити, перерозподіливши вантаж. Найбільшою є додатна оцінка $\Delta = \max\{10; 5; 31; 20\} = 31$, яка відповідає клітинці $i = 1$, $j = 4$, і туди зробимо поставку. У таблиці перевезень, яка становить план **X**$_0$, побудуємо замкнутий цикл перерозподілу (вказано пунктиром) ( табл.9):

Таблиця 9

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| План **X**$_0$ | -Θ<br>180 | | | +Θ |
| | +Θ<br>60 | 320 | -Θ<br>20 | |
| | | | +Θ<br>100 | -Θ<br>180 |

Починаючи із знака «+», яким позначимо клітинку з найбільшою додатною оцінкою, розставимо по черзі знаки «-» та «+» в усіх кутах (поворотах). Кількість вантажу, що потрібно перерозподілити за цим циклом, визначаємо як найменшу з поставок, які відповідають «від'ємним» кутам циклу: $\Theta = \min\{180; 20; 180\} = 20$. Згідно зі знаками, що проставлені в кутах циклу, перерозподілимо 20 одиниць вантажу й отримаємо новий опорний план $\mathbf{X}_1$, при переході до якого загальна вартість перевезень повинна зменшитися на величину $\Delta z = \Delta \cdot \Theta = 31 \cdot 20 = 620$, тобто цільова функція повинна дорівнювати $z(\mathbf{X}_1) = 12500 - 620 = 11880$( табл.10).

Перевіримо, чи є план $\mathbf{X}_1$ оптимальним. Для цього складемо відповідно йому таблицю потенціалів (табл.11):

Таблиця 10

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| План $\mathbf{X}_1$ | $-\Theta$<br>160 | $+\Theta$ | | 20 |
| | $+\Theta$<br>80 | $-\Theta$<br>320 | | |
| | | | 120 | 160 |

Таблиця 11

| $U_i$ \ $V_j$ | $V_1 = 22$ | $V_2 = 25$ | $V_3 = 14$ | $V_4 = 18$ |
|---|---|---|---|---|
| $U_1 = 0$ | 22 | 15<br>25 | 40<br>14 | 18 |
| $U_2 = -13$ | 9 | 12 | 32<br>1 | 16<br>5 |
| $U_3 = -4$ | 11<br>18 | 38<br>21 | 10 | 14 |

План $\mathbf{X}_1$ не є оптимальним, оскільки має додатні оцінки $\Delta_{12} = 10$ і $\Delta_{31} = 8$. Визначаємо, що $\Delta = \max\{10; 8\} = 10$, отже, необхідно зробити поставку до клітинки $i = 1$, $j = 2$. Цикл перерозподілу вказано пунктиром у таблиці перевезень за планом $\mathbf{X}_1$. За цим циклом перерозподіляємо вантаж у кількості: $\Theta = \min\{160; 320\} = 160$. Складаємо новий план $\mathbf{X}_2$ та перевіряємо його на оптимальність. Відповідні дії наведені у табл.12,13 :

Таблиця 12

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| План $X_2$ | | 160 | | 20 |
| | 240 | 160 | | |
| | | | 120 | 160 |

Таблиця 13

| $U_i$ \ $V_j$ | $V_1 = 12$ | $V_2 = 15$ | $V_3 = 14$ | $V_4 = 18$ |
|---|---|---|---|---|
| $U_1 = 0$ | 12 / 22 | 15 | 14 / 40 | 18 |
| $U_2 = -3$ | 9 | 12 | 11 / 32 | 15 / 16 |
| $U_3 = -4$ | 8 / 11 | 11 / 38 | 10 | 14 |

За планом $\mathbf{X}_2$ загальна вартість перевезень повинна становити:

$$z(\mathbf{X}_2) = 11880 - 10 \cdot 160 = 10280.$$

Оскільки всі оцінки є недодатними, то план $\mathbf{X}_2$ оптимальний. Загальна вартість перевезень за цим планом мінімальна й дорівнює:

$$z_{\min} = z(\mathbf{X}_2) = 160 \cdot 15 + 20 \cdot 18 + 240 \cdot 9 + 160 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 14 = 10280.$$

***Відповідь:*** загальна вартість перевезень мінімальна за планом:

$$\mathbf{X}_{опт.} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 18 \\ 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$