Тема 21. Моделі розрахункових процесів і управління. Динамічні моделі, P-, Q-, F-, A-схеми. Мережні моделі

21.1. Поняття типової математичної схеми моделі

Початковою інформацією при побудові математичних моделей процесів функціонування систем служать дані про призначення і умови роботи досліджуваної (проектованої) системи S. Ця інформація визначає основну мету моделювання системи S і дозволяє сформулювати вимоги до математичної моделі M, що розробляється. Причому рівень абстрагування залежить від кола тих питань, на які дослідник системи хоче отримати відповідь за допомогою моделі, і якоюсь мірою визначає вибір математичної схеми [11, 12].

Введення поняття математична схема дозволяє розглядати математикові не як метод розрахунку, а як метод мислення, як засіб формулювання понять, що є найбільш важливим при переході від словесного опису системи до формального подання процесу її функціонування у вигляді деякої математичної моделі (аналітичної або імітаційної). При користуванні математичною схемою насамперед дослідника системи S має цікавити питання про адекватність відображення у вигляді конкретних схем реальних процесів у досліджуваній системі, а не можливість отримання відповіді (результату розв'язання) на конкретне питання дослідження. Наприклад, подання процесу функціонування інформаційно-обчислювальної системи колективного користування у вигляді мережі схем масового обслуговування дає можливість добре описати процеси, що відбуваються в системі, але при складних законах вхідних потоків і потоків обслуговування не дає можливості отримання результатів в явному вигляді [11].

Математичну схему можна визначити як ланку (концептуальну модель) при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування системи з урахуванням дії зовнішнього середовища, тобто має місце ланцюжок "описова модель – математична схема – математична (аналітична або (і) імітаційна) модель".

21.2. Загальний вид математичної моделі системи

Кожна конкретна система S характеризується набором властивостей, під якими розуміються величини, що відображають поведінку модельованого об'єкта (реальної системи) і враховують умови її функціонування у взаємодії з зовнішнім середовищем (системою) E. При побудові математичної моделі системи необхідно вирішити питання про її повноту. Повнота моделі регулюється, в основному, вибором межі "система S – середовище E". Також має бути вирішене завдання спрощення моделі, яка допомагає виділити основні властивості системи, відкинувши другорядні. Причому віднесення властивостей системи до основних або другорядних суттєво залежить від мети моделювання системи (наприклад, аналіз імовірнісно-часових характеристик процесу функціонування системи, синтез структури системи і т. д.). Модель об'єкта моделювання, тобто системи, можна представити у вигляді множини величин, що описують процес функціонування реальної системи і створюють у загальному випадку такі підмножини [11]:сукупність ***вхідних дій*** на систему (якими, як правило, управляють)

$$x \in X \subset R^{n_X},$$

сукупність ***дій зовнішнього середовища*** (за якими спостерігають)

$$v \in V \subset R^{n_V},$$

сукупність ***внутрішніх (власних) параметрів*** системи

$$h \in H \subset R^{n_H},$$

сукупність ***вихідних характеристик*** системи

$$y \in Y \subset R^{n_Y}.$$

Причому в перелічених підмножинах можна виділити керовані і некеровані змінні. У загальному випадку x, v, h, y є елементами непересічних підмножин і містять як детерміновані, так і стохастичні складові.

При моделюванні системи S вхідні дії, дії зовнішнього середовища E і внутрішні параметри системи є ***незалежними (екзогенними) змінними***, які у векторній формі мають відповідно вигляд: $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n_X}(t))^T$; $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n_V}(t))^T$;

$h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_{n_H}(t))^T$, а вихідні характеристики системи є ***залежними (ендогенними) змінними*** і у векторній формі мають вигляд $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n_Y}(t))^T$.

Процес функціонування системи S описується в часі оператором F_S, який у загальному випадку перетворить незалежні змінні в залежні відповідно до співвідношень виду

$$y(t) = F_S(x, v, h, t). \tag{6.1}$$

Сукупність залежностей вихідних характеристик системи від часу $y_i(t)$ для всіх $i = \overline{1, n_Y}$ називається ***вихідною траєкторією*** $y(t)$. Залежність (6.1) називається ***законом функціонування системи*** S і позначається F_S. У загальному випадку закон функціонування системи F_S може бути заданий у вигляді: функції, функціонала, логічних умов, в алгоритмічній і табличній формах або у вигляді словесного правила відповідності.

Дуже важливим для опису і дослідження системи S є поняття ***алгоритму функціонування*** A_S, під яким розуміється метод отримання вихідних характеристик $y(t)$ з урахуванням вхідних дій $x(t)$, дій зовнішнього середовища $v(t)$ і власних параметрів системи $h(t)$. Очевидно, що один і той же закон функціонування F_S системи S може бути реалізований різними способами, тобто за допомогою множини різних алгоритмів функціонування A_S.

Співвідношення (6.1) є математичним описом поведінки об'єкта (системи) моделювання в часі t, тобто відображають його динамічні властивості. Тому математичні моделі такого виду прийнято називати динамічними ***моделями*** (системами) [11].

Для ***статичних моделей*** математична модель (6.1) є відображенням між двома підмножинами властивостей модельованого об'єкта Y і $\{X, V, H\}$, що у векторній формі може бути записано як

$$y = f(x, v, h). \tag{6.2}$$

Співвідношення (6.1) і (6.2) можуть бути задані різними способами: аналітично (за допомогою формул), графічно, таблично і т. д. Такі співвідношення у ряді випадків можуть бути отримані через властивості системи S у конкретні моменти часу, які називаються станами. Стан системи S характеризується векторами

$$z = z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{n_Z}(t))^T .$$

Якщо розглядати процес функціонування системи S як послідовну зміну станів $z^1(t), z^2(t), \ldots, z^k(t)$ (де $z^j(t) \in R^{n_Z}$ $\forall j = \overline{1,k}$), то вони можуть бути інтерпретовані як координати точки в n_Z-вимірному фазовому просторі. Причому кожній реалізації процесу відповідатиме деяка фазова траєкторія. Сукупність всіх можливих значень станів $\{z^k\}$ називається ***простором станів*** об'єкта моделювання Z, тобто $z^k \in Z, Z \subset R^{n_Z}$ [11, 12].

Стани системи S у момент часу t^*, $t_0 < t^* \le T$ (t_0 – початковий момент часу, T – кінцевий момент часу), повністю визначаються початковими умовами $z^0 = z(t_0) \in Z$, вхідними впливами $x(t)$, внутрішніми параметрами $h(t)$ і впливами зовнішнього середовища $v(t)$, які мали місце за проміжок часу $t^* - t_0$, за допомогою двох векторних рівнянь:

$$z(t) = \Phi(z^0, x, v, h, t), \tag{6.3}$$

$$y(t) = F(z, t). \tag{6.4}$$

Перше рівняння по початковому стану z^0 і незалежним змінним x, v, h визначає вектор-функцію, а друге по отриманому значенню станів $z(t)$ – залежні змінні на виході системи $y(t)$. Таким чином, ланцюжок рівнянь об'єкта "вхід – стани – вихід" дозволяє визначити характеристики системи

$$y(t) = F[\Phi(z^0, x, v, h, t)]. \tag{6.5}$$

У загальному випадку час у моделі системи S може розглядатися на інтервалі моделювання $(0, T)$ (тобто $t_0 = 0$) як неперервний, так і дискретний, тобто квантований на відрізки довжиною Δt часових одиниць кожен, коли $T = m\Delta t$, де m – кількість інтервалів дискретизації.

Таким чином, під ***математичною моделлю об'єкта*** (системи) розуміють скінченну підмножину змінних $\{x(t), v(t), h(t)\}$ разом з математичними зв'язками між ними і характеристиками $y(t)$ [11, 12].

Якщо математичний опис об'єкта моделювання не містить елементів випадковості або вони не враховуються, тобто якщо можна вважати, що в цьому випадку стохастичні дії зовнішнього середовища $v(t)$ і стохастичні внутрішні параметри $h(t)$ відсутні, то модель називається детермінованою в тому сенсі, що характеристики однозначно визначаються детермінованими вхідними впливами:

$$y(t) = f(x, t). \tag{6.6}$$

Очевидно, що детермінована модель є окремим випадком стохастичної моделі.

Наведені математичні співвідношеннями є математичними схемами загального виду і дозволяють описати широкий клас систем. Проте у практиці моделювання об'єктів у галузі системотехніки і системного аналізу на початкових етапах дослідження системи раціональніше використовувати ***типові математичні схеми***: диференціальні рівняння, скінченні й імовірнісні автомати, системи масового обслуговування і т. д. [11, 12].

Не маючи такого ступеня спільності, як розглянуті моделі, типові математичні схеми мають переваги простоти і наглядності, але при суттєвому звуженні можливостей застосування. Як детерміновані моделі, коли при дослідженні випадкові фактори не враховуються, для представлення систем, що функціонують у неперервному часі, використовуються диференціальні, інтегральні, інтегродиференціальні й інші рівняння, а для представлення систем, що функціонують у дискретному часі, – скінченні автомати і кінцево-різницеві схеми. Як стохастичні моделі (при врахуванні випадкових факторів) для представлення систем з дискретним часом використовуються імовірнісні автомати, а для представлення систем з неперервним часом – системи масового обслуговування і т. д.

Перелічені типові математичні схеми, природно, не можуть претендувати на можливість опису на їх базі всіх процесів, що відбуваються у великих інформаційно-управляючих системах, до яких належать АСУ. Для таких систем у ряді випадків перспективнішим є застосування агрегативних моделей [11].

Агрегативні моделі (системи) дозволяють описати широке коло об'єктів дослідження з відображенням системного характеру цих об'єктів. Саме при агрегативном описі складний об'єкт (система) розчленовується на скінченне число частин (підсистем), зберігаючи при цьому зв'язки, що забезпечують взаємодію частин.

Таким чином, при побудові математичних моделей процесів функціонування систем можна виділити такі основні підходи: неперервно-детермінований (наприклад, диференціальні рівняння); дискретно-детермінований (скінченні автомати); дискретно-стохастичний (імовірнісні автомати); неперервно-стохастичний (системи масового обслуговування); узагальнений або універсальний (агрегативні системи).

Математичні схеми, що розглядаються в наступних розділах, повинні допомогти оперувати різними підходами у практичній роботі при моделюванні конкретних систем.

21.3. Неперервно-детерміновані моделі (D-схеми)

Розглянемо особливості неперервно-детермінованого підходу на прикладі використання як математичних моделей диференціальних рівнянь [11]. ***Диференціальними рівняннями*** називаються такі рівняння, в яких невідомими будуть функції однієї або декількох змінних, причому в рівняння входять не тільки самі функції, але і їх похідні різних порядків. Якщо невідомі – функції багатьох змінних, то рівняння називаються ***рівняннями в частинних похідних***, інакше при розгляді функцій тільки однієї незалежної змінної рівняння називаються ***звичайними диференціальними рівняннями*** [1].

Зазвичай у таких математичних моделях незалежною змінною, від якої залежать невідомі шукані функції, служить час t. Тоді математичне співвідношення для детермінованих систем (6.6) в загальному вигляді буде

$$y' = f(y,t),\ \ y(t_0) = y_0, \tag{6.7}$$

де $y' = \dfrac{\partial y}{\partial t}$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^T$ і $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n_v})^T$ – n-вимірні вектори; $f(y,t)$ – вектор-функція, яка визначена на деякій $(n+1)$-вимірній ($y \in R^n, t \in R^1$) множині і є неперервною.

Оскільки математичні схеми такого виду відображають динаміку системи, що вивчається, тобто її поведінка в часі, то вони називаються ***D-схемами*** (англ. dynamic).

Найбільш важливе для системотехніки застосування *D-схем* як математичного апарату в теорії автоматичного управління [11]. Для ілюстрації особливостей побудови і застосування *D-схем* розглянемо простий приклад формалізації процесу функціонування двох елементарних систем різної фізичної природи: механічної S_M (коливання маятника, рис. 6.1, а) і електричної S_K (коливальний контур рис. 6.1, б) [11].

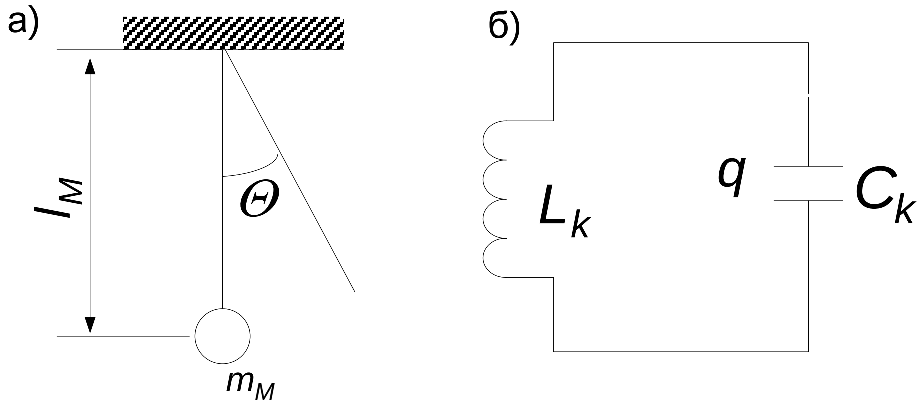

Рис. 6.1. **Елементарні схеми**

Процес малих коливань маятника описується звичайним диференціальним рівнянням

$$m_M \cdot l_M \frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + m_M \cdot g \cdot l_M \cdot \Theta(t) = 0,$$

де m_M, l_M – маса і довжина підвісу маятника; g – прискорення вільного падіння; $\Theta(t)$ – кут відхилення маятника у момент часу t.

З цього рівняння вільного коливання маятника можна знайти оцінки характеристик, що цікавлять дослідника. Наприклад, період коливання маятника:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l_M}{g}}.$$

Аналогічно, процеси в електричному коливальному контурі описуються звичайним диференціальним рівнянням:

$$L_K \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C_K} = 0,$$

де L_K, C_K – індуктивність і ємкість конденсатора; $q(t)$ – заряд конденсатора в момент часу t.

З цього рівняння можна отримати різні оцінки характеристик процесу в коливальному контурі. Наприклад, період електричних коливань:

$$\mathrm{T_K} = 2\pi\sqrt{L_K C_K}\,.$$

Очевидно, що ввівши позначення $h_0 = m_M\, l_M^2 = L_K$, $h_1 = 0$, $h_2 = m_M g\, l_M = \frac{l}{C_K}$, $\Theta(t) = q(t) = z(t)$, отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку, яке описує поведінку цієї замкнутої системи:

$$h_0 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dz(t)}{dt} + h_2 z(t) = 0, \tag{6.8}$$

де h_0, h_1, h_2 – параметри системи; $z(t)$ – стан системи у момент часу t .

Таким чином, поведінка цих двох об'єктів може бути досліджена на основі загальної математичної моделі (6.8). Крім того, необхідно відзначити, що поведінка однієї з систем може бути проаналізована за допомогою іншої. Наприклад, поведінка маятника (системи S_M) може бути вивчена за допомогою електричного коливального контура (системи S_K).

Якщо система S (тобто маятник або контур), що вивчається, взаємодіє з зовнішнім середовищем E, то з'являється вхідна дія $x(t)$ (зовнішня сила для маятника і джерело енергії для контура) і неперервно-детермінована модель такої системи матиме вигляд:

$$h_0 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dz(t)}{dt} + h_2 z(t) = x(t).$$

З точки зору загальної схеми математичної моделі (див. підрозділ 6.2) $x(t)$ є вхідним (управляючим) впливом, а стан системи S у даному випадку можна розглядати як вихідну характеристику $y(t)$, тобто вважати, що вихідна змінна $y(t)$ співпадає зі станом системи $z(t)$ в кожен момент часу, тобто $y(t) = z(t)$.

При розв'язанні задач системотехніки важливе значення мають проблеми управління великими системами. Слід звернути увагу на системи автоматичного управління – окремий випадок динамічних систем, описуваних *D-схемами* і виділених в окремий клас моделей через їх практичну специфіку [11].

Описуючи процеси автоматичного управління, дотримуються зазвичай представлення реального об'єкта у вигляді двох систем: управляючої і управляємої (об'єкта управління). Структура багатовимірної системи автоматичного управління загального виду представлена на рис. 6.2, де позначені **незалежні** (ендогенні) **змінні**: $x(t)$ – вектор вхідних (задаваних) впливів; $v(t)$ – вектор збуджуючих впливів; $h'(t)$ – вектор сигналів помилки; $h''(t)$ – вектор управляючих впливів; **залежні** (екзогенні) **змінні**: $z(t)$ – вектор станів системи S; $y(t)$ – вектор вихідних змінних (зазвичай $y(t) = z(t)$).

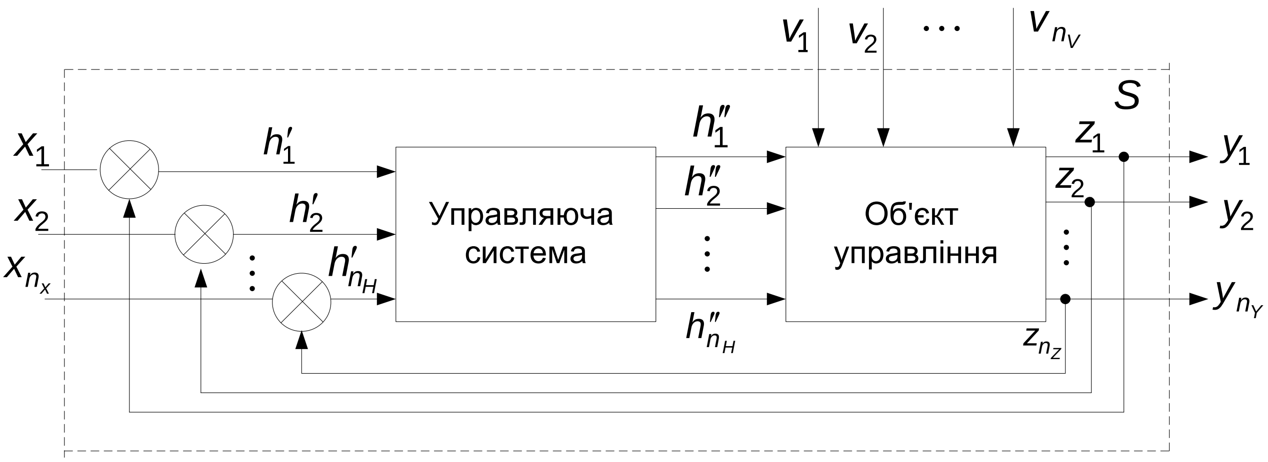

Рис. 6.2. **Структура системи автоматичного управління**

Сучасна управляюча система – це сукупність програмно-технічних засобів, що забезпечують досягнення об'єктом управління певної мети. Наскільки точно об'єкт управління досягає заданої мети, можна судити для одновимірної системи за координатою стану $y(t)$. Різниця між заданим $y_{зад}(t)$ і дійсним $y(t)$ законами зміни управляємої величини є помилка управління $h'(t) = y_{зад}(t) - y(t)$.

Системи, для яких помилки управління $h'(t) = 0$ у всі моменти часу, називаються ідеальними. На практиці реалізація ідеальних систем неможлива. Таким чином, помилка $h'(t)$ – необхідна складова автоматичного управління, заснованого на принципі заперечного зворотного зв'язку, оскільки для приведення у відповідність вихідної змінної $y(t)$ її заданому значенню використовується інформація про відхилення між ними. Завданням системи автоматичного управління є зміна змінної $y(t)$ згідно з заданим законом з певною точністю (з допустимою помилкою). При проектуванні й експлуатації систем автоматичного управління необхідно вибрати такі параметри системи S, які забезпечили б необхідну точність управління, а також стійкість системи в перехідному процесі [11].

Якщо система стала, то представляє практичний інтерес поведінка системи в часі, максимальне відхилення регульованої змінної $y(t)$ в перехідному процесі, час перехідного процесу і т. п. Висновки про властивості систем автоматичного управління різних класів можна зробити за видом диференціальних рівнянь, що приблизно описують процеси в системах. Порядок диференціального рівняння і значення його коефіцієнтів цілком визначаються статичними і динамічними параметрами системи S.

Таким чином, використання ***D-схем*** дозволяє формалізувати процес функціонування неперервно-детермінованих систем S й оцінити їх основні характеристики, застосовуючи аналітичний або імітаційний підхід, реалізований у вигляді відповідної мови для моделювання неперервних систем, або такий, що використовує аналогові і гібридні засоби обчислювальної техніки.

21.4. Дискретно-детерміновані моделі (F-схеми)

Особливості дискретно-детермінованого підходу на етапі формалізації процесу функціонування систем розглянемо на прикладі використання як математичного апарата теорії автоматів. ***Теорія автоматів*** – це розділ теоретичної кібернетики, в якому вивчаються математичні моделі – автомати. На основі цієї теорії система представляється у вигляді автомата, що переробляє дискретну інформацію і змінює свої внутрішні стани лише в допустимі моменти часу. Поняття автомат варіюється залежно від характеру систем, що конкретно вивчаються, від прийнятого рівня абстракції і доцільного ступеня спільності [7].

Автомат можна представити як деякий пристрій (чорний ящик), на який подаються вхідні сигнали і знімаються вихідні і який може мати деякі внутрішні стани. ***Скінченним автоматом*** називається автомат, у якого множина внутрішніх станів і вхідних сигналів (а, отже, і множина вихідних сигналів) є скінченними множинами.

Абстрактно скінченний автомат можна представити як математичну схему (***F-схему***), що характеризується шістьма елементами:

– скінченною множиною X вхідних сигналів (вхідним алфавітом);

– скінченною множиною Y вихідних сигналів (вихідним алфавітом);

– скінченною множиною Z внутрішніх станів (внутрішнім алфавітом або алфавітом станів);

– початковим станом $z_0 \in Z$;

– функцією переходів $\phi(z,x)$;

– функцією виходів $\varphi(z,x)$.

Автомат, що задається ***F-схемою***: $F = \langle Z, X, Y, \phi, \varphi, z_0 \rangle$, функціонує в дискретному автоматному часі, моментами якого є такти, тобто рівні інтервали часу, що примикають один до одного, кожному з яких відповідають постійні значення вхідного і вихідного сигналів та внутрішні стани. Позначимо стан, а також вхідний і вихідний сигнали, що відповідають t-му такту при $t = 0,1,2,\ldots$, через $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$. При цьому, за умовою, $z(0) = z_0$, а $z(t) \in Z$, $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$.

Абстрактний скінченний автомат має один вхідний ($X \subset R^1$) й один вихідний канали ($Y \subset R^1$). У кожен момент $t = 0,1,2,\ldots$ дискретного часу *F-автомат* перебуває в певному стані $z(t)$ з множини Z станів автомата, причому в початковий момент часу $t = 0$ він завжди перебуває в початковому стані $z(0) = z_0$. У момент t, будучи в стані $z(t)$, автомат здатний сприйняти на вхідному каналі сигнал $x(t) \in X$ і видати на вихідному каналі сигнал $y(t) = \psi[z(t), x(t)]$, переходячи в стан $z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)]$, $z(t) \in Z$, $y(t) \in Y$. Абстрактний скінченний автомат реалізує деяке відображення множини слів вхідного алфавіту X на множину слів вихідного алфавіту Y. Іншими словами, якщо на вхід скінченного автомата, встановленого в початковий стан z_0, подавати в деякій послідовності літери вхідного алфавіту $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$,..., тобто вхідне слово, то на виході автомата будуть послідовно з'являтися літери вихідного алфавіту $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$,..., утворюючи вихідне слово.

Таким чином, робота скінченного автомата відбувається за такою схемою: у кожному t-му такті на вхід автомата, що перебуває в стані $z(t)$, подається деякий сигнал $x(t)$, на який він реагує переходом в ($t+1$)-му такті в новий стан $z(t+1)$ і видачею деякого вихідного сигналу. Сказане вище можна описати такими рівняннями: для *F-автомата* першого роду, що називається також автоматом Мілі,

$$z(t+1)=\varphi[z(t),x(t)],\quad t=0,1,2,\ldots, \tag{6.9}$$

$$y(t)=\psi[z(t),x(t)],\ t=0,1,2,\ldots, \tag{6.10}$$

для *F-автомата* другого роду

$$z(t+1)=\varphi[z(t),x(t)],\quad t=0,1,2,\ldots, \tag{6.11}$$

$$y(t)=\psi[z(t),x(t-1)],\quad t=1,2,3,\ldots. \tag{6.12}$$

Автомат другого роду, для якого

$$y(t)=\psi[z(t)],\quad t=0,1,2,\ldots, \tag{6.13}$$

тобто функція виходів не залежить від вхідної змінної $x(t)$, називається автоматом Мура.

Таким чином, рівняння (6.9) – (6.13), що повністю задають ***F-автомат***, є окремим випадком рівнянь (6.3) і (6.4), коли система S детермінована і на її єдиний вхід надходить дискретний сигнал X.

За кількістю станів розрізняють скінченні автомати з пам'яттю і без пам'яті. Автомати з пам'яттю мають більше одного стану, а автомати без пам'яті (комбінаційні або логічні схеми) мають лише один стан. При цьому, згідно з (6.10), робота комбінаційної схеми полягає в тому, що вона ставить у відповідність кожному вхідному сигналу $x(t)$ певний вихідний сигнал $y(t)$, тобто реалізує логічну функцію виду:

$$y(t)=\psi[x(t)],\quad t=0,1,2,\ldots.$$

Ця функція називається булевою, якщо алфавіти X і Y, яким належать значення сигналів x і y, складаються з двох літер.

За характером відліку дискретного часу скінченні автомати поділяються на ***синхронні*** і ***асинхронні***. У синхронних *F-автоматах* моменти часу, в які автомат "зчитує" вхідні сигнали, визначаються примусово синхронізуючими сигналами. Після чергового синхронізуючого сигналу з урахуванням "зчитаного" і відповідно до рівнянь (6.9) – (6.13) відбувається перехід у новий стан і видача сигналу на виході, після чого автомат може сприймати наступне значення вхідного сигналу. Таким чином, реакція автомата на кожне значення вхідного сигналу закінчується за один такт, тривалість якого визначається інтервалом між сусідніми синхронізуючими сигналами. Асинхронний *F-автомат* зчитує вхідний сигнал неперервно і тому, реагуючи на достатньо довгий вхідний сигнал постійної величини x, він може, як випливає з (6.9) – (6.13), кілька разів змінювати стан, видаючи відповідне число вихідних сигналів, поки не перейде у сталий, який вже не може бути змінений даним вхідним.

Щоб задати скінченний *F-автомат*, необхідно описати всі елементи множини $F = \langle Z, X, Y, \phi, \varphi, z_0 \rangle$, тобто вхідний, внутрішній і вихідний алфавіти, а також функції переходів і виходів. Причому серед множини станів необхідно виділити стан z_0, в якому автомат перебував у момент часу $t = 0$. Існують декілька способів задавання роботи F-автоматів, але найчастіше використовуються табличний, графічний і матричний.

Найпростіший табличний спосіб задавання скінченного автомата заснований на використанні таблиць переходів і виходів, рядки яких відповідають вхідним сигналам автомата, а стовпці – його станам. При цьому зазвичай перший зліва стовпець відповідає початковому стану z_0. На перетині i-го рядка і k-го стовпця таблиці переходів поміщається відповідне значення $\varphi(z_k, x_i)$ функції переходів, а в таблиці виходів – відповідне значення $\psi(z_k, x_i)$ функції виходів. Для *F-автомата* Мура обидві таблиці можна поєднати, отримавши так звану відмічену таблицю переходів, в якій над кожним станом z_k автомата, що позначає стовпець таблиці, стоїть відповідний цьому стану, згідно з (6.10), вихідний сигнал $\psi(z_i)$.

Опис роботи *F-автомата* Мілі таблицями переходів ψ і виходів φ ілюструється табл. 6.1, а опис *F-автомата* Мура – таблицею переходів (табл. 6.2).

Таблиця 6.1

Таблиця переходів F-автомата Мілі

x_i	z_k			
	z_0	z_1	…	z_K

Переходи				
x_1	$\varphi(z_0,x_1)$	$\varphi(z_1,x_1)$	…	$\varphi(z_K,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0,x_2)$	$\varphi(z_1,x_2)$	…	$\varphi(z_K,x_2)$
…	…	…	…	…
x_i	$\varphi(z_0,x_i)$	$\varphi(z_1,x_i)$	…	$\varphi(z_K,x_i)$
Виходи				
x_1	$\psi(z_0,x_1)$	$\psi(z_1,x_1)$	…	$\psi(z_K,x_1)$
x_2	$\psi(z_0,x_2)$	$\psi(z_1,x_2)$	…	$\psi(z_K,x_2)$
…	…	…	…	…
x_i	$\psi(z_0,x_i)$	$\psi(z_1,x_i)$	…	$\psi(z_K,x_i)$

Таблиця 6.2

Таблиця переходів F-автомата Мура

x_i	$\psi(z_k)$			
	$\psi(z_0)$	$\psi(z_1)$	…	$\psi(z_K)$
	z_0	z_1	…	z_K
x_1	$\varphi(z_0,x_1)$	$\varphi(z_1,x_1)$	…	$\varphi(z_K,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0,x_2)$	$\varphi(z_1,x_2)$	…	$\varphi(z_K,x_2)$
…	…	…	…	…
x_i	$\varphi(z_0,x_i)$	$\varphi(z_1,x_i)$	…	$\varphi(z_K,x_i)$

При другому способі задавання скінченного автомата використовується поняття направленого графа. Граф автомата є набором вершин, що відповідають різним станам автомата, і дуг, що з'єднують вершини графа і відповідають тим чи іншим переходам автомата. Якщо вхідний сигнал x_k спричиняє перехід із стану z_i у стан z_j, то на графі автомата дуга, що з'єднує вершину z_i з вершиною z_j, позначається x_k. Для того щоб задати функцію виходів, дуги графа необхідно позначити відповідними вихідними сигналами. Для автоматів Мілі ця розмітка виконується так: якщо вхідний сигнал x_k діє на стан z_i, то, згідно зі сказаним, отримується дуга, що виходить з z_i і позначена x_k; цю дугу додатково позначають вихідним сигналом $y = \psi(z_i, x_k)$. Для автомата Мура аналогічна розмітка графа така: якщо вхідний сигнал x_k, діючи на деякий стан автомата, спричиняє перехід у стан z_j, то дугу, направлену в z_j і позначену x_k, додатково позначають вихідним сигналом $y=\psi(z_j,x_k)$.

На рис. 6.3 а, б, наведені задані раніше таблицями *F-автомати* Мілі $F1$ і Мура $F2$ відповідно.

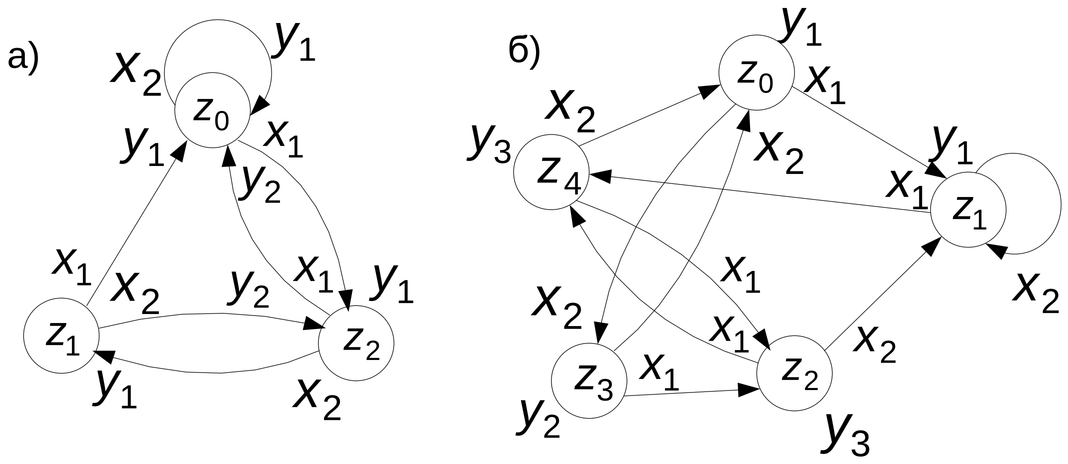

Рис. 6.3. **Графи автоматів Мілі (а) і Мура (б)**

При розв'язанні задач моделювання систем часто зручнішою формою є матричне задавання скінченного автомата.

Таким чином, поняття *F-автомата* в дискретно-детермінованому підході до дослідження на моделях властивостей об'єктів є математичною абстракцією, зручною для опису широкого класу процесів функціонування реальних об'єктів в автоматизованих системах управління. В якості таких об'єктів в першу чергу слід назвати елементи і вузли ЕОМ, пристрої контролю, регулювання й управління, системи часової і просторової комутації в техніці обміну інформацією тощо. Для всіх перерахованих об'єктів характерна наявність дискретних станів і дискретний характер роботи в часі, тобто їх опис за допомогою ***F-схем*** є ефективним. Але широта їх застосування не означає універсальності цих математичних схем. Наприклад, цей підхід не придатний для опису процесів прийняття рішень, процесів у динамічних системах з наявністю перехідних процесів і стохастичних елементів.

21.5. Дискретно-стохастичні моделі (Р-схеми)

Розглянемо особливості побудови математичних схем при дискретно-стохастичному підході до формалізації процесу функціонування досліджуваної системи S. Оскільки сутність дискретизації часу при цьому підході залишається аналогічною розглянутим у підрозділі 6.4 скінченним автоматам, то вплив фактора стохастичності прослідкуємо також на різновиді таких автоматів, а саме на імовірнісних (стохастичних) автоматах [11].

У загальному вигляді ***імовірнісний автомат*** можна визначити як дискретний потактовий перетворювач інформації з пам'яттю, функціонування якого в кожному такті залежить тільки від стану пам'яті в ньому і може бути описане статистично.

Застосування схем імовірнісних автоматів (***Р-схем***) має важливе значення для розробки методів проектування дискретних систем, що проявляють статистично закономірну випадкову поведінку, для з'ясування алгоритмічних можливостей таких систем і обґрунтування меж доцільності їх використання, а також для розв’язання задач синтезу за вибраним критерієм дискретних стохастичних систем, що задовольняють заданим обмеженням.

Введемо математичне поняття ***Р-автомата***, використовуючи поняття, введені для ***F-автомата***. Розглянемо множину G, елементами якої є всілякі пари (x_i, z_s), де x_i і z_s – елементи вхідної підмножини X і підмножини станів Z відповідно. Якщо існують дві такі функції φ і ψ, що з їх допомогою здійснюються відображення $G \to Z$ і $G \to Y$, то говорять, що $F = \langle Z, X, Y, \phi, \varphi \rangle$ визначає автомат детермінованого типу.

Введемо в розгляд більш загальну математичну схему. Нехай Φ – множина всіляких пар виду (z_k, y_i), де y_i – елемент вихідної підмножини Y. Зажадаємо, щоб будь-який елемент множини G індукував на множині Φ деякий закон розподілу такого вигляду:

Елементи з F (x_i, z_s)	(z_1, y_1)	(z_1, y_2)	$\cdots$	(z_K, y_{J-1})	(z_K, y_J)
	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	$b_{K(J-1)}$	b_{KJ}

При цьому

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} b_{kj} = 1,$$

де b_{kj} – ймовірність переходу автомата в стан z_k і появи на виході сигналу y_i, якщо він був у стані z_s і на його вхід у цей момент часу надійшов сигнал x_i. Кількість таких розподілів, представлених у вигляді таблиць, дорівнює кількості елементів множини G. Позначимо множину цих таблиць через B. Тоді четвірка елементів $P = \langle Z, X, Y, B \rangle$ називається ймовірнісним автоматом (***Р-автоматом***).

21.6. Неперервно-стохастичні моделі (Q-схеми)

Особливості неперервно-стохастичного підходу розглянемо на прикладі використання в якості типових математичних схем ***систем масового обслуговування (СМО)***, які називатимемо ***Q-схемами***. Системи масового обслуговування є класом математичних схем, розроблених у теорії масового обслуговування і різних застосуваннях для формалізації процесів функціонування систем, які за своєю суттю є процесами обслуговування.

Як процес обслуговування можуть бути представлені різні по своїй фізичній природі процеси функціонування економічних, виробничих, технічних й інших систем, наприклад: потоки постачань продукції деякому підприємству, потоки деталей і комплектуючих виробів на складальному конвеєрі цеху, заявки на обробку інформації ЕОМ від віддалених терміналів і т. д. При цьому характерною для роботи таких об'єктів є випадкова поява заявок (вимог) на обслуговування і завершення обслуговування у випадкові моменти часу, тобто стохастичний характер процесу їх функціонування.

Таким чином, функціонування будь-якої СМО полягає в обслуговуванні потоку вимог, які одна за одною або групами надходять до неї в деякі, як правило, випадкові моменти часу. Вимоги, які надійшли до СМО, обробляються протягом певного часу, після чого залишають систему.

Зупинимося на основних поняттях масового обслуговування, необхідних для використання ***Q-схем*** як при аналітичному, так і при імітаційному підходах.

У будь-якому елементарному акті обслуговування можна виділити дві основні складові: очікування обслуговування заявкою і саме обслуговування заявки. Це можна зобразити у вигляді деякого i-го приладу обслуговування Π_i (рис. 6.4), що складається з накопичувача заявок H_i, в якому може одночасно перебувати $l_i = 0$, L_i^H заявок, де L_i^H – місткість l-го накопичувача і канала обслуговування заявок (або просто канала) K_i На кожен елемент приладу обслуговування Π_i надходять потоки подій, в накопичувач H_i – потік заявок w_i, на канал K_i – потік обслуговувань u_i і.

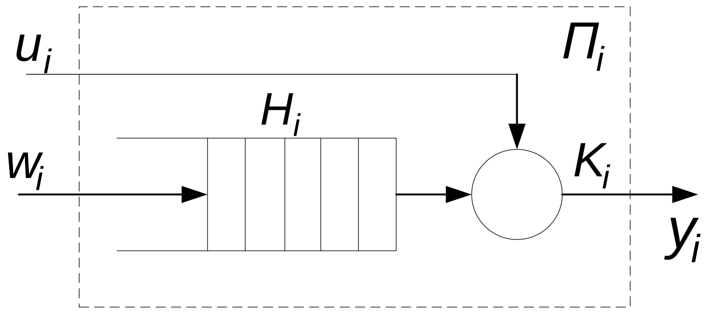

Рис. 6.4. **Прилад обслуговування заявок**

Потоком подій називається послідовність подій, що відбуваються одна за одною в якісь випадкові моменти часу. Розрізняють потоки однорідних і неоднорідних подій. ***Потік подій*** називається ***однорідним***, якщо він характеризується тільки моментами надходження цих подій (збуджуючими моментами) і задається послідовністю $\{t_n\} = \{0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_n\}$, де t_n – момент надходження n-ї події (невід'ємне дійсне число). Однорідний потік подій також може бути заданий у вигляді послідовності проміжків часу між n-ю і $(n-1)$-ю подіями $\{\tau_n\}$, яка однозначно пов'язана з послідовністю збуджуючих моментів $\{t_n\}$, де $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n \ge 1$, $t_0 = 0$, тобто $\tau_1 = t_1$.

Потоком неоднорідних подій називається послідовність $\{t_n, f_n\}$, де $\{t_n\}$ – збуджуючі моменти; f_n – набір ознак події. Наприклад, стосовно процесу обслуговування для неоднорідного потоку заявок може бути задана приналежність до того або іншого джерела заявок, наявність пріоритету, можливість обслуговування тим або іншим типом каналу і т. п. [11].

У будь-якій системі обслуговування передбачена наявність ***пристроїв для обслуговування*** (інші назви: ***прилади для обслуговування, сервери, канали***) і ***вимог*** (інші назви: ***заявки, виклики, клієнти***), які потребують обслуговування. Правила або алгоритми взаємодії пристроїв і вимог називатимемо ***дисциплінами поставлення в чергу*** та ***обслуговуванням***.

Для кожної СМО задається режим роботи. Слід відзначити, що для вимоги може бути потрібно кілька обслуговувань одним або кількома пристроями. Зазвичай термін *"пристрій для обслуговування"* (англійською — "server") використовується для відносно простих моделей, в яких кожна вимога може обслуговуватись тільки одним пристроєм. Якщо ж вимоги обслуговуються кількома пристроями в певній послідовності, переміщаючись за заданим маршрутом, то має місце "мережа обслуговування" (англійською — "queueing network"). Іншими словами, мережа – це складна СМО.

Зазвичай за допомогою методів теорії масового обслуговування розв'язують задачі з проектування та експлуатації однотипних елементів обслуговування – наприклад, розраховують кількість контрольно-пропускного обладнання, місць для ремонту, бензоколонок, обслуговуючого персоналу, ліній зв'язку, одиниць обладнання обчислювальної техніки тощо.

Окремим типом завдань у теорії масового обслуговування є визначення місць накопичування вимог у системі обслуговування, наприклад визначення місць на стелажах на складі або в багатоповерховому гаражі, кількості пристроїв введення-виведення інформації комп'ютера, кількості місць у палатах шпиталю та ін.

Найчастіше ефективність функціонування будь-якої СМО визначається за такими показниками [12]:

– середня кількість вимог, які система може обслужити за одиницю часу;

– середній відсоток вимог, які не були обслужені;

– ймовірність того, що вимогу, яка надійшла до системи, буде прийнято для обслуговування;

– середній час очікування вимоги в черзі;

– закон розподілу часу очікування;

– середня кількість вимог у черзі;

– закон розподілу числа вимог у черзі;

– коефіцієнт завантаження пристрою для обслуговування;

– середня кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням.

Щоб визначити ці параметри, потрібно охарактеризувати СМО, тобто описати та задати такі характеристики:

– вхідний потік вимог (вимоги, які надходять до системи для обслуговування);

– дисципліни постановки вимог у чергу та вибору вимог із неї;

– правила, за якими здійснюється обслуговування;

– вихідний потік вимог (вимоги, які залишають систему);

– режими роботи системи.

Більш детально СМО та їх характеристики будуть розглянуті в підрозділі 9.3.

21.7. Узагальнені моделі (А-схеми)

Найбільш відомим загальним підходом до формального опису процесів функціонування систем є підхід, запропонований Н. П. Бусленко. Цей підхід дозволяє описувати поведінку неперервних і дискретних, детермінованих і стохастичних систем, тобто порівняно з розглянутими раніше є узагальненим (універсальним) і базується на понятті ***агрегативної системи*** (англ. aggregate system), що є формальною схемою загального вигляду, яку називатимемо ***А-схемою*** [11].

Аналіз існуючих засобів моделювання систем і завдань, що вирішуються за допомогою метода моделювання на ЕОМ, неминуче призводить до висновку, що комплексне вирішення проблем, які виникають у процесі створення і машинної реалізації моделі, можливо лише у випадку, якщо моделюючі системи мають у своїй основі єдину нормальну математичну схему, тобто ***А-схему***. Така схема повинна одночасно виконувати декілька функцій: бути адекватним математичним описом об'єкта моделювання, тобто системи S, служити основою для побудови алгоритмів і програм при комп'ютерній реалізації моделі M, дозволяти у спрощеному варіанті (для окремих випадків) проводити аналітичні дослідження.

Наведені вимоги певною мірою суперечливі. Проте у рамках узагальненого підходу на основі ***А-схем*** вдається знайти між ними деякий компроміс.

За традицією, що встановилася в математиці взагалі і у прикладній математиці зокрема, при агрегативному підході спочатку дається формальне визначення об'єкта моделювання – агрегативної системи, яка є математичною схемою, що відображає системний характер об'єктів, які вивчаються. При агрегативному описі складний об'єкт (система) розбивається на скінченну кількість частин (підсистем), зберігаючи при цьому зв'язки, що забезпечують їх взаємодію. Якщо деякі з отриманих підсистем виявляються у свою чергу ще досить складними, то процес їх розбиття триває до тих пір, поки не утворяться підсистеми, які в умовах даного завдання моделювання можуть вважатися зручними для математичного опису. Унаслідок такої декомпозиції складна система представляється у вигляді багаторівневої конструкції з взаємозв'язаних елементів, об'єднаних у підсистеми різних рівнів [11].

Як елемент ***А-схеми*** виступає агрегат, а зв'язок між агрегатами (усередині системи S і з зовнішнім середовищем E) здійснюється за допомогою оператора спряження R. Очевидно, що агрегат сам може розглядатися як ***А-схема***, тобто може розбиватися на елементи (агрегати) наступного рівня.

Будь-який агрегат характеризується такими множинами: моментів часу T, вхідних X і вихідних Y сигналів, станів Z в кожен момент часу t. Стан агрегата у момент часу $t \in T$ позначається як $z(t) \in Z$, а вхідні і вихідні сигнали, як $x(t) \in X$ і $y(t) \in Y$ відповідно [11].

Вважатимемо, що перехід агрегата із стану $z(t_1)$ в стан $z(t_2) \neq z(t_1)$ відбувається за малий інтервал часу, тобто має місце стрибок δz. Переходи агрегата з стану $z(t_1)$ в $z(t_2)$ визначаються власними (внутрішніми) параметрами самого агрегата $h(t) \in H$ і вхідними сигналами $x(t) \in X$.

У початковий момент часу t_0 стани z мають значення, що дорівнюють z^0, тобто $z^0 = z(t_0)$, що задаються законом розподілу процеса $z(t)$ в момент часу t_0, а саме $L[z(t_0)]$. Припустимо, що процес функціонування агрегата у випадку впливу вхідного сигналу x_n описується випадковим оператором V. Тоді в момент $t_n \in T$ надходження в агрегат вхідного сигналу x_n можна визначити стан

$$z(t_n + 0) = V[t_n, z(t_n), x_n].$$

Позначимо напівінтервал часу $t_1 < t \leq t_2$ як $(t_1, t_2]$, а напівінтервал $t_1 \leq t < t_2$ як $[t_1, t_2)$. Якщо інтервал часу (t_n, t_{n+1}) не містить жодного моменту надходження сигналів, то для $t \in (t_n, t_{n+1})$ стан агрегата визначається випадковим оператором U відповідно до співвідношення:

$$z(t) = U[t, t_n, z(t_n + 0)].$$

Сукупність випадкових операторів V і U розглядається як оператор переходів агрегата в нові стани. При цьому процес функціонування агрегата складається зі стрибків станів δz в моменти надходження вхідних сигналів x (оператор V) і змін станів між цими моментами t_n і t_{n+1} (оператор U). На оператор U не накладається ніяких обмежень, тому допустимі стрибки станів δz в моменти часу, які не є моментами надходження вхідних сигналів x. У подальшому моменти стрибків δz будемо називати особливими моментами часу t_δ. а стани $z(t_\delta)$ – особливими станами ***А-схеми***. Для опису стрибків станів δz в особливі моменти часу t_δ будемо використовувати випадковий оператор W, що є частковим випадком оператора U, тобто

$$z(t_\delta + 0) = W[t_\delta, z(t_\delta)] .$$

У множині станів Z виділяється така підмножина $Z^{(Y)}$, що якщо $z(t_\delta)$ досягає $Z^{(Y)}$, то цей стан є моментом видачі вихідного сигналу, що визначається оператором виходів:

$$y = G[t_\delta, z(t_\delta)] .$$

Таким чином, під ***агрегатом*** будемо розуміти будь-який об'єкт, що визначається впорядкованою сукупністю розглянутих множин T, X, Y, Z, $Z^{(Y)}$, H і випадкових операторів V, U, W, G.

Послідовність вхідних сигналів, розташованих у порядку їх надходження в ***А-схему***, називатимемо ***вхідним повідомленням*** або x***-повідомленням***. Послідовність вихідних сигналів, впорядковану відносно часу видачі, назвемо ***вихідним повідомленням*** або y***-повідомленням***.

Існує клас великих систем, які, зважаючи на їх складність, не можуть бути формалізовані у вигляді математичних схем одиночних агрегатів, тому їх формалізують деякою конструкцією з окремих агрегатів A_k, $k = \overline{1, N_A}$, яку назвемо агрегативною системою або ***А-схемою***. Для опису деякої реальної системи S у вигляді *А-схеми* необхідно мати опис як окремих агрегатів A_k, так і зв'язків між ними.

Приклад. Розглянемо *А-схему*, структура якої наведена на рис. 6.5 [11].

Функціонування *А-схеми* пов'язане з переробкою інформації, передача останньої на схемі показана стрілками. Уся інформація, що циркулює в *А-схемі*, поділяється на зовнішню і внутрішню. Зовнішня інформація надходить від зовнішніх об'єктів, що не є елементами схеми, яка розглядається, а внутрішня інформація виробляється агрегатами самої *А-схеми*. Обмін інформацією між *А-схемою* і зовнішнім середовищем E відбувається через агрегати A_k, які називаються полюсами *А-схеми*. При цьому розрізняють вхідні полюси *А-схеми*, що є агрегатами, на які надходять x-повідомлення (агрегати A_1, A_2, A_3), і вихідні полюси *А-схеми*, вихідна інформація яких є y-повідомленнями (агрегати A_1, A_3, A_4, A_5, A_6). Агрегати, що не є полюсами, називаються внутрішніми.

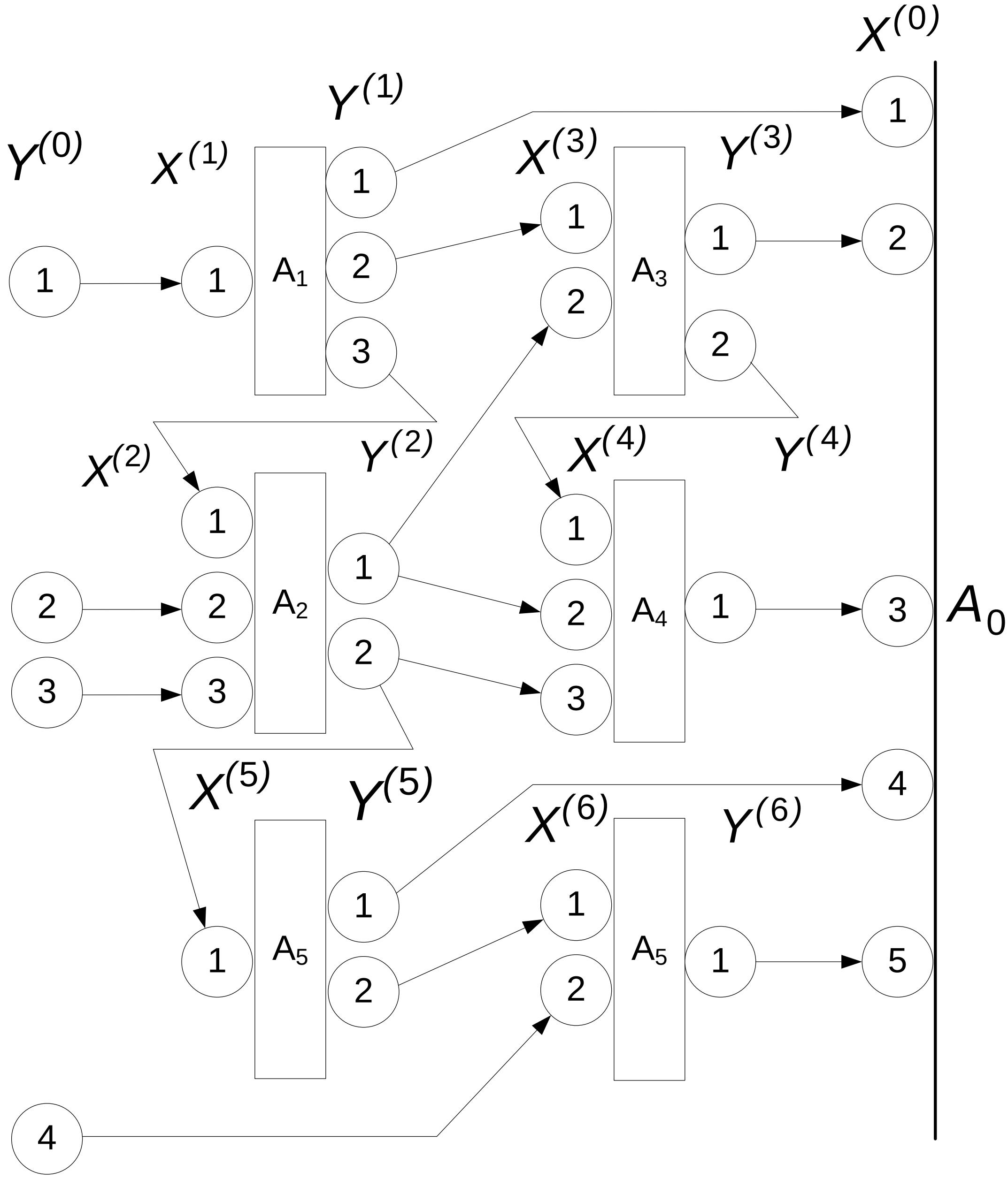

Рис. 6.5. **Структура агрегативної системи**

Кожний k-й агрегат *А-схеми* A_k має вхідні контакти, на які надходить сукупність елементарних сигналів $X_i^{(k)}(t), i = \overline{1, I_k}$, що одночасно виникають на вході елемента, і вихідні контакти, з яких знімається сукупність елементарних сигналів $Y_j^{(k)}(t), j = \overline{1, J_k}$. Таким чином, кожен агрегат *А-схеми* A_k має I_k вхідних і J_k вихідних контактів.

Опис окремого агрегата вже розглянуто, тому для побудови формального поняття *А-схеми* залишається вибрати достатньо зручні способи математичного опису взаємодії між агрегатами. Для цього введемо ряд припущень про закономірності функціонування *А-схем*, що добре узгоджуються з досвідом дослідження реальних складних систем [11]:

1) взаємодія між *А-схемою* і зовнішнім середовищем E, а також між окремими агрегатами всередині системи S здійснюється при передачі сигналів, причому взаємні впливи, що мають місце поза механізмом обміну сигналами, не враховуються;

2) для опису сигналу достатньо деякого скінченного набору характеристик;

3) елементарні сигнали миттєво передаються в *А-схемі* незалежно один від одного за елементарними каналами;

4) до вхідного контакту будь-якого елемента *А-схеми* підключається не більше одного елементарного каналу, до вихідного контакту – будь-яке скінченне число елементарних каналів за умови, що до входу одного і того ж елемента А-схеми направляється не більше ніж один із згаданих елементарних каналів.

Взаємодія *А-схеми* із зовнішнім середовищем E розглядається як обмін сигналами між зовнішнім середовищем E й елементами *А-схеми*. Відповідно до цього зовнішнє середовище E можна представити у вигляді фіктивного елемента системи A_0, вхід якого містить I_0 вхідних контактів $X_i^0(t), i = \overline{1, I_0}$, а вихід – J_0 вихідних контактів $Y_j^0(t), j = \overline{1, J_0}$. Сигнал, що видається *А-схемою* в зовнішнє середовище E, приймається елементом A_0 як вхідний сигнал, що складається з елементарних сигналів $X_i^0(t), i = \overline{1, I_0}$. Сигнал, що надходить в *А-схему* із зовнішнього середовища E, є вихідним сигналом елемента A_0 і складається з елементарних сигналів $Y_j^0(t), j = \overline{1, J_0}$.

Таким чином, подальше використання узагальненої типової математичної схеми моделювання, тобто *А-схеми*, у принципі не відрізняється від розглянутих раніше *D-, F-, P- і Q-схем*. Для окремого випадку, а саме для кусочно-лінійних агрегатів, результати можуть бути отримані аналітичним методом. У складніших випадках, коли застосування аналітичних методів неефективне або неможливе, удаються до імітаційного методу. Причому, представлення об'єкта моделювання у вигляді *A-схеми* може бути тим фундаментом, на якому базується побудова імітаційної системи і її зовнішнього та внутрішнього математичного забезпечення. Стандартна форма представлення досліджуваного об'єкта у вигляді *A-схеми* приводить до уніфікації не тільки алгоритмів імітації, але і до можливості застосовувати стандартні методи обробки й аналізу результатів моделювання системи S [11].

Висновки

1. Поняття математичної схеми дозволяє розглядати математику не як метод розрахунку, а як метод мислення.
2. Математична схема – це ланка при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування системи з урахуванням дії зовнішнього середовища.
3. Під математичною моделлю системи розуміють скінченну підмножину незалежних і залежних змінних разом з математичними зв'язками між ними.
4. У практиці моделювання об'єктів у галузі системотехніки і системного аналізу на початкових етапах дослідження системи раціонально використовувати типові математичні схеми.
5. Агрегативні моделі дозволяють описати широке коло об'єктів дослідження з відображенням системного характеру цих об'єктів.

Контрольні запитання та завдання

1. Що називається математичною схемою?
2. Які змінні в моделі системи є незалежними і залежними?
3. Що називається законом функціонування системи?
4. Що розуміється під алгоритмом функціонування системи?
5. Які умови й особливості використання при розробці моделей систем типових математичних схем?