Лабораторна робота №14. Дослідження імітаційних моделей

Мета: вивчення способів проведення експериментів з динамічними стохастичними моделями із застосуванням комп’ютера.

Теоретична частина

За темою лабораторної роботи студент повинен: *знати,* що таке динамічна стохастична модель та закони розподілу випадкових величин; *вміти* оцінювати закон розподілу випадкової величини за вибіркою її значень [6; 10], розв'язувати нелінійні рівняння та інше із застосуванням процедур математичного пакета R.

Практична частина

Задача [6]. Нехай на деякому підприємстві для водопостачання використовується резервуар, об'єм якого становить W тисяч літрів. Рівень споживання води – V_C тисяч літрів за добу, а швидкість наповнення резервуара насосами – V_H тисяч літрів за добу. Необхідно знайти час T, за який буде заповнено резервуар (спочатку пустий), при умовах:

1) рівень споживання та швидкість наповнення резервуара V_H – постійні ($V_C = 480$ тис. л/доб., $V_H = 500$ тис. л/доб., $W = 1\,000$ тис. л);

2) рівень споживання води на підприємстві має ймовірнісний характер і змінюється згідно з рівномірним розподілом імовірності в межах $V_C \pm \Delta V_C$ ($\Delta V_C = 50$ тис. л/доб.). Більш того, можливі перебої в роботі насосів під час подавання води, тобто швидкість наповнення резервуара розподілена за рівномірним законом із середнім значенням V_H та середнім відхиленням ΔV_H ($\Delta V_H = 50$ тис. л/доб.).

Розв'язання за умови 1

Оскільки рівень споживання V_C та швидкість наповнення резервуара V_H постійні, то час заповнення резервуара буде дорівнювати:

$$T = W / (V_H - V_C) \,. \tag{7.1}$$

Виконаємо завдання з використанням пакета R*:*

C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\МС\от ИГ\R\Exaple 7_1.R - P...

```
# Вводимо відправні данні
Wr = 1000
VC = 480
VH = 500
# Обчислюємо час, за який буде заповнено резервуар
T = Wr/(VH - VC)
T
```

R Console

```
> # Вводимо відправні данні
> Wr = 1000
> VC = 480
> VH = 500
> # Обчислюємо час, за який буде заповнено резервуар
> T = Wr/(VH - VC)
> T
[1] 50
```

Як видно, заповнення резервуара при незмінних рівнях споживання V_C та швидкості наповнення резервуара V_H відбудеться через 50 діб.

Розв'язання за умови 2

Розв'язок задачі знайдемо шляхом побудови імітаційної моделі.

Позначимо через:

t_i – моменти модельного часу, що змінюється з постійним кроком Δt. Тобто:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t \quad (i = 1,2,\ldots), \quad t_0 = 0;$$

V_{Hi} – поточну швидкість наповнення резервуара в моменти t_i;

V_{Ci} – поточний рівень споживання в моменти t_i;

W_i – поточний стан резервуара в моменти t_i.

Тоді:

$$W_i = W_{i-1} + (V_{Hi} - V_{Ci})\Delta t. \qquad (7.2)$$

Оскільки рівень споживання води та швидкість наповнення резервуара мають імовірнісний характер, то у деякий момент часу t_i поточні значення V_{Ci}, V_{Hi} можуть бути змодельовані за допомогою генератора псевдовипадкових чисел рівномірного розподілу на відрізку [0,1]:

$$V_{Ci} = V_C - \Delta V_C + 2\Delta V_C r_i\,,\; V_{Hi} = V_H - \Delta V_H + 2\Delta V_C r_i^{/}\,.$$

Імітаційна модель (7.2) є стохастичною, тому для оцінки часу T заповнення резервуара треба виконати кілька прогонів моделі. Один прогін моделі (процес моделювання) закінчується, якщо на деякому кроці i виконується умова $W_i \geq W$. Точність результату залежить від значення Δt. Після кожного прогону моделі отримаємо випадкові значення T_j, де j – номер прогону $(j = 1, 2, 3, ...)$.

Виконаємо завдання з використанням пакета R.

Один прогін моделі реалізуємо процедурою:

C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\МС\от ИГ\R\Exaple 7_1.R ...

```
# Процедура, що реалізує прогін моделі
ProgonMod = function(dt, Wr, VH, dVH, VC, dVC){
      t = c(100)
      W = c(100)
      i = 1
      t[i] = 0
      W[i] = 0
      while(W[i] < Wr){
            i = i + 1
            t[i] = t[i-1] + dt
            VHi = (VH - dVH) + 2*dVH*runif(1, 0, 1)
            VCi = (VC - dVC) + 2*dVC*runif(1, 0, 1)
            W[i] = W[i-1] + (VHi - VCi)*dt
      }
      return(list(i=i, t=t, W=W))
}
```

Виконаємо спочатку один прогін моделі з $\Delta t = 1$:

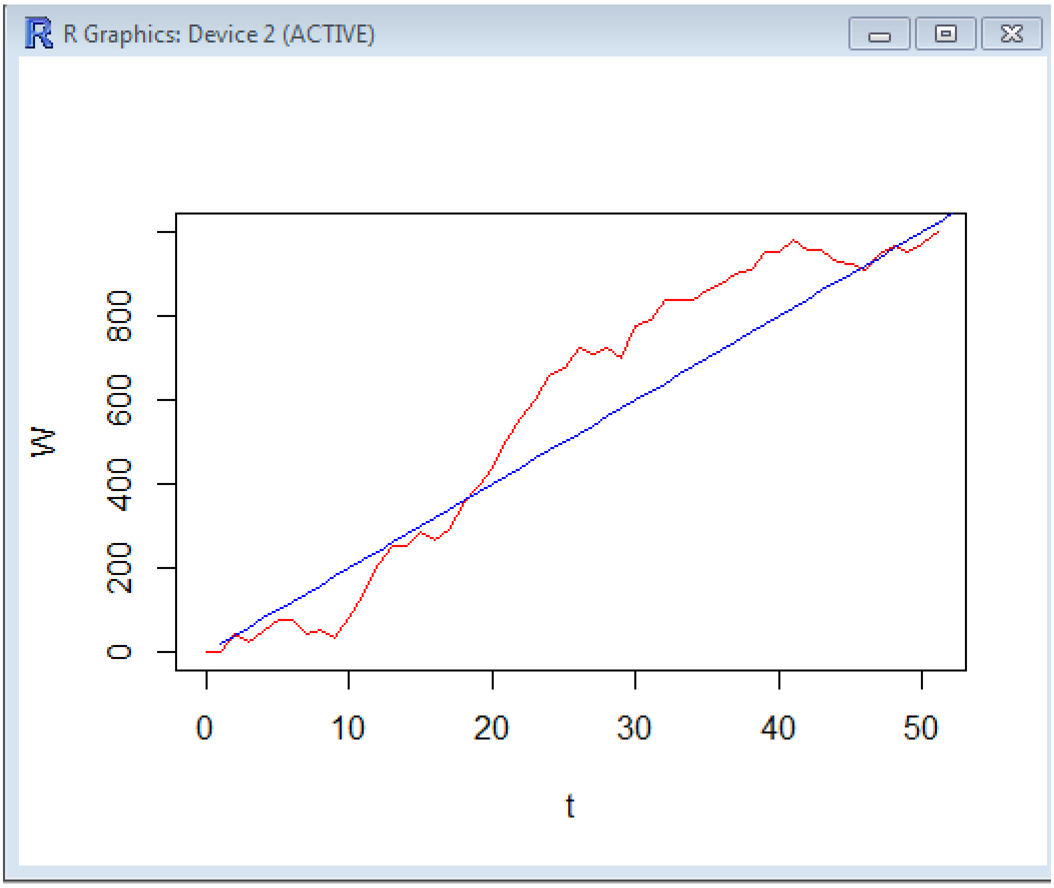
C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\МС\от ИГ\R\Exapl...

```
# Доповнимо відправні данні
dVC = 50
dVH = 10
dt = 1

res = ProgonMod(dt, Wr, VH, dVH, VC, dVC)
res
i = res$i
t = res$t
W = res$W
```

```
> res = ProgonMod(dt, Wr, VH, dVH, VC, dVC)
> res
$i
[1] 52

$t
 [1]  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 1$
[26] 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 4$
[51] 50 51

$W
 [1]    0.000000    1.979839   41.201926   22.637430   49.50928$
 [7]   78.912632   44.682851   53.750333   32.711514   79.37787$
[13]  209.112828  251.397143  254.415191  284.136855  268.47804$
[19]  355.889192  397.417750  439.151022  503.889723  558.08591$
[25]  657.196816  678.090621  725.258165  708.327208  722.88847$
[31]  775.039929  791.781430  835.515050  837.953544  838.32340$
[37]  877.523317  901.478914  908.917334  952.833063  953.65788$
[43]  957.049854  958.051317  926.608540  923.535088  909.25991$
[49]  964.867072  950.302178  971.546561 1001.261911
```

Як видно з результатів одного прогону моделі, заповнення резервуара відбудеться через 52 доби. При цьому графік заповнення резервуара, порівняно з детермінованим випадком, має вигляд:

```
plot(t, W, type="l", col="red")

F = function(t){
       (VH - VC)*t
}

# Обчислюємо 100 точок на відрізку [0,tmax]
a = 0; b = t[i]; m = 100
h = (b-a)/(m-1)
t1 = c(1:m)
for(i in 1:m){
       t1[i] = a + h*(i-1)
}
W1 = F(t1)
lines(t1,W1, col="blue")      # додаємо ще лінію
```



Виповнимо тепер 100 прогонів моделі:

C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\МС\от ИГ\R\Exaple 7_1.R - ...

```
N = 100
Tp = c(1:N)
for(j in 1:N){
      res = ProgonMod(dt, Wr, VH, dVH, VC, dVC)
      Tp[j] = res$t[res$i]
}
Tpmean = mean(Tp)
Tpmean
TpDisp = var(Tp)
Tpsd = sqrt(TpDisp)
Tpsd
```

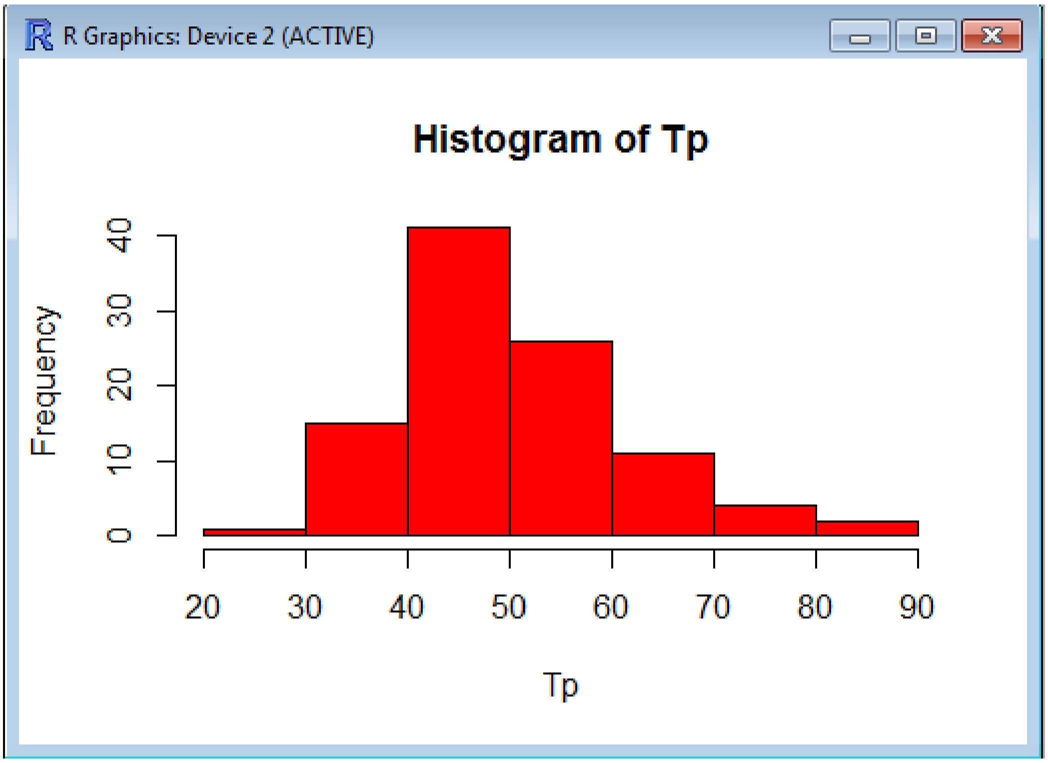
```
> N = 100
> Tp = c(1:N)
> for(j in 1:N){
+ res = ProgonMod(dt, Wr, VH, dVH, VC, dVC)
+ Tp[j] = res$t[res$i]
+ }
> Tpmean = mean(Tp)
> Tpmean
[1] 52.82
> TpDisp = var(Tp)
> Tpsd = sqrt(TpDisp)
> Tpsd
[1] 10.61482
```

Як видно з результатів прогонів імітаційної моделі, заповнення резервуара може відбутися за різний час T_j, але у середньому десь через $T_{cp} = 52.82$ діб (≈ 50 діб).

Знайдемо тепер ΔT (точність оцінювання T), при якому з рівнем довіри $\alpha = 0.95$ можна буде гарантувати, що у 95 випадках із 100 час заповнення резервуара буде знаходитись у межах $T_{cp} \pm \Delta T$.

Для цього оцінимо закон розподілу для T_j:

```
hist(Tp, col="red")
```



З вигляду гістограми можна зробити висновок, що закон розподілу можливо нормальний з параметрами $\mu = T_{cp}$, $\sigma = S$. Перевіримо цю гіпотезу за критерієм Пірсона з рівнем значущості $\alpha = 0.95$:

C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\MC\от ИГ\R\Exaple 7_1.R - Редактор R

```
V = Tp
Vmean = Tpmean
Vsd = Tpsd

m = 10
h = (max(V)- min(V))/m
int = c(1:(m+1))
for(i in 1:(m+1)){
	int[i] = min(V) + (i-1)*h
}

n = c(1:m)
p = c(1:m)
for(i in 1:m){
	p[i] = pnorm(int[i+1], Vmean, Vsd) - pnorm(int[i], Vmean, Vsd)
	n[i] = 0
	for(j in 1:N){
		if((V[j] >= int[i]) && (V[j] < int[i+1])){
			n[i] = n[i] + 1
		}
	}
}

HiSq = 0
for(i in 1:m){
	HiSq = HiSq + (n[i]-N*p[i])^2/(N*p[i])
}
HiSq

alfa = 0.95
HiSqAlfa = qchisq(alfa, m-1)
HiSqAlfa
```

R Console

```
> HiSq = 0
> for(i in 1:m){
+ HiSq = HiSq + (n[i]-N*p[i])^2/(N*p[i])
+ }
> HiSq
[1] 9.54587
>
> alfa = 0.95
> HiSqAlfa = qchisq(alfa, m-1)
> HiSqAlfa
[1] 16.91898
>
```

Тобто гіпотеза підтверджується. Тому вірогідність того, що час заповнення резервуара буде у межах $[T_{cp} - \Delta T, T_{cp} + \Delta T]$ для деякого ΔT, обчислюється функцією:

C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\MC\от ИГ\R\Exaple 7_1.R - Редактор R

```
Palfa = function(dT){
      pnorm(Tpmean+dT, Tpmean, Tpsd) - pnorm(Tpmean-dT, Tpmean, Tpsd)
}
```

Знайдемо ΔT з рівняння $P\alpha(\Delta T) = \alpha$ за допомогою процедури ***uniroot*** пакета R:

C:\Users\Viktor.Zadachyn\Documents\MC\от ИГ\R\Exaple 7_1.R - Редактор R

```
alfa = 0.95
Froot = function(dT){
      Palfa(dT) - alfa
}
Froot(0)
Froot(30)

rc = uniroot(Froot, lower=0, upper=30)
rc$root
```

R Console

```
> alfa = 0.95
> Froot = function(dT){
+ Palfa(dT) - alfa
+ }
> Froot(0)
[1] -0.95
> Froot(30)
[1] 0.04706517
>
> rc = uniroot(Froot, lower=0, upper=30)
> rc$root
[1] 19.76776
```

Таким чином, $\Delta T = 19.77$ діб.

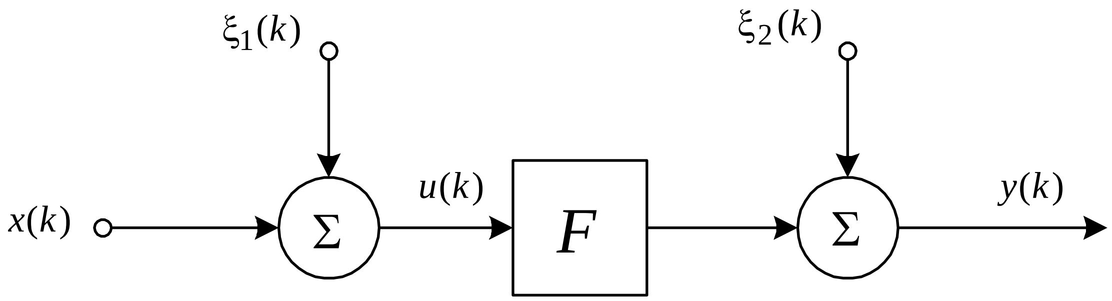
Індивідуальні завдання

Варіант 1. Оцінити з рівнем довіри 95%, на скільки часу вистачить бензину на бензоколонці, якщо: запас його дорівнює 5 000 літрів, автомобілі під'їжджають приблизно кожні 30 ± 10 хвилин і заправляються по 15 ± 10 літрів.

Варіант 2. Оцінити з рівнем довіри 99%, на скільки діб вистачить газу на підприємстві, якщо: запас його в газосховищах дорівнює 17 000 м^3, рівень споживання газу – 200 ± 20 м^3 на добу, рівень власного видобутку газу (з відходів) – 60 ± 5 м^3 на добу.

Варіанти 3 –12 мають наступний загальний вид.

Розглянемо деяку дискретну систему, схема якої має вигляд:



Тут k – дискретний час, що приймає послідовні значення з ряду натуральних чисел, $x(k)$ – вхідний сигнал (може бути векторним), $\xi_1(k)$, $\xi_2(k)$ – випадкові сигнали (або перешкоди), $u(k)$ – проміжний сигнал (може бути векторним), $y(k)$ – вихідний сигнал.

Характеристики сигналів $x(k)$, $\xi_1(k)$, $\xi_2(k)$, а також вид передаточної функції F, вказані в індивідуальних завданнях. Необхідно провести чисельне моделювання цієї системи, тобто сформувати вхідні та вихідні вектори сигналів x, y та побудувати їх графіки.

Індивідуальні завдання:

3. $x(k) = \sin\frac{k}{10} + \frac{30}{k+10}\sin k$, $\xi_1(k) = N(0, 0.2)$, $\xi_2(k) = N(0.5; 2)$,
$F(k) = 0.6u(k) + 0.4u(k-1)$, $k = 1...500$.

4. $x(k) = [\sqrt{k/10}; \sin(k/20)]$, $\xi_1(k) = U(-0.35, 0.45)$, $\xi_2(k) = 0$,
$F(k) = \cos\left(u_1(k)u_2(k)\right)$, $k = 1...600$.

5. $x(k) = [u(k-1), \sin(k)]$, $\xi_1(k) = N(0; 0.35)$, $\xi_2(k) = N(0.1; 0.2)$,
$F(k) = 1/(1 - e^{-u_1(k)u_2(k)})$, $k = 1...500$.

6. $x(k) = \sin(2\pi k/250)$, $\xi_1(k) = N(0, 0.15)$, $\xi_2(k) = U(-0.1, 0.45)$,
$F(k) = 0.6\sin(\pi u(k)) + 0.3\sin(3\pi u(k)) + 0.1\sin(5\pi u(k))$, $k = 1...500$.

7. $x(k) = [y(k-1), y(k-2), y(k-3), \sin(2\pi k/250), \sin(2\pi(k\text{-}1)/250)]$,
$\xi_1(k) = N(0, 0.05)$, $\xi_2(k) = 0$,
$F(k) = (u_1(k)u_2(k)u_3(k)u_5(k)(u_3(k)-1) + u_4(k))/(1 + u_3^2(k) + u_2^2(k))$, $k = 1...1000$.

8. $x(k) = \sin(2\pi k/250)$, $\xi_1(k) = U(-0.2, 0.2)$, $\xi_2(k) = 0$,

$$F(k) = \begin{cases} 2u(k)/(2-1)+1/(2-1), u(k) < -0.5 \\ -2*0.5/(2-1)+1/(2-1), -0.5 \le u(k) < -0.5 \\ 2u(k)/(2-1)+1/(2-1), 0.5 \le u(k) \end{cases}, \; k = 1...500.$$

Фактично, дана функція являє собою так звану «зону нечутливості», добре відому та достатньо неприємну особливість багатьох об'єктів управління. Загальна формула такої функції має наступний вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 2x/(2-L) + L/(2-L), \; u < S \\ 2S/(2-L) + L/(2-L), \; S \le u < S + L \\ 2x/(2-L) - L/(2-L), \; S + L \le u \end{cases},$$

де S - початок зони нечутливості, а L - її ширина. В тому випадку, коли значення сигналу знаходиться в цій зоні, вихід функції – константа. В даному конкретному випадку $F(k)$ – лінійна функція з зоною нечутливості від -0.5 до 0.5.

9. $x(k) = 0.5\sin(2\pi k/250) + 0.5\sin(2\pi k/25)$, $\xi_1(k) = U(-0.05, 0.05)$, $\xi_2(k) = N(0.1, 0.35)$, $F(k) = 0.6\sin(\pi u(k)) + 0.3\sin(3\pi u(k)) + 0.1\sin(5\pi u(k))$, $k = 1...750$.
10. $x(k) = [\lg(k), arctg(k)]$, $\xi_1(k) = N(0.1, 0.25)$, $\xi_2(k) = 0$, $F(k) = \cos(u_1(k) + u_2(k))$, $k = 1...500$.
11. $x(k) = [y(k-1), y(k-2), y(k-3), \sin(2\pi k/250), \sin(2\pi(k-1)/250)]$, $\xi_1(k) = 0$, $\xi_2(k) = U(-0.1, 0.1)$, $F(k) = (u_1(k)u_2(k)u_3(k)u_5(k)(u_3(k)-1)+u_4(k))/(1+u_3^2(k)+u_2^2(k))$, $k = 1...1000$.
12. $x(k) = [\sin(2\pi k/30), \sin(2\pi k/40)]$, $\xi_1(k) = N(0, 0.2)$, $\xi_2(k) = U(-0.01, 0.01)$, $F(k) = Exp[-(u(k)-[1\ 1])(u(k)-[1\ 1])'/200)]$, $k = 1...500$.