Тема 18. Ідентифікація параметрів математичної моделі. Адекватність, чутливість, несуперечливість моделі

18.1. Постановка задачі ідентифікації моделей

У загальному випадку ***задача ідентифікації*** формулюється так: на основі результатів спостереження за вхідними і вихідними змінними системи потрібно побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель.

Основними етапами ідентифікації є такі [12]:

1. Вибір класу і структури моделі і мови її опису.
2. Вибір класу і типів вхідних впливів X.
3. Обґрунтування критеріїв схожості системи і моделі.
4. Вибір методу ідентифікації і розробка відповідних алгоритмів оцінювання параметрів моделі.
5. Перевірка адекватності отриманої в результаті ідентифікації моделі.

Залежно від обсягу апріорної інформації про клас і структуру системи відрізняють задачі ідентифікації в широкому і вузькому розумінні.

Задача ідентифікації в широкому розумінні виконується в умовах апріорної невизначеності структури моделі системи ("чорний ящик"). Клас і структура математичної моделі вибираються на основі результатів теоретичного аналізу з використанням загальних закономірностей процесів, які протікають у системі, або на основі загальної інформації про подібні системи. У цьому випадку для побудови математичної моделі можна використовувати непараметричні методи. Вони розроблені для тих ситуацій, що досить часто виникають на практиці, коли дослідник нічого не знає про параметри досліджуваної системи (звідси і назва методів – ***непараметричні***).

Задача ідентифікації у вузькому розумінні полягає в оцінюванні параметрів і станів системи, якщо відома структура моделі ("сірий ящик"). Задачею ідентифікації є кількісне оцінювання певних параметрів моделі. Для цього використовується параметрична ідентифікація математичної моделі. Прикладами таких моделей можуть бути диференціальні і різницеві рівняння, моделі типу "вхід – стан – вихід".

На рис. 4.1 зображена загальна схема ідентифікації моделі (оцінювання параметрів моделі). Вхідні впливи X на систему і модель однакові, виходи системи Y_S і моделі Y_M в загальному випадку відрізняються. Для їх порівняння потрібно сформувати критерій схожості і мінімізувати його, тобто настроїти модель.

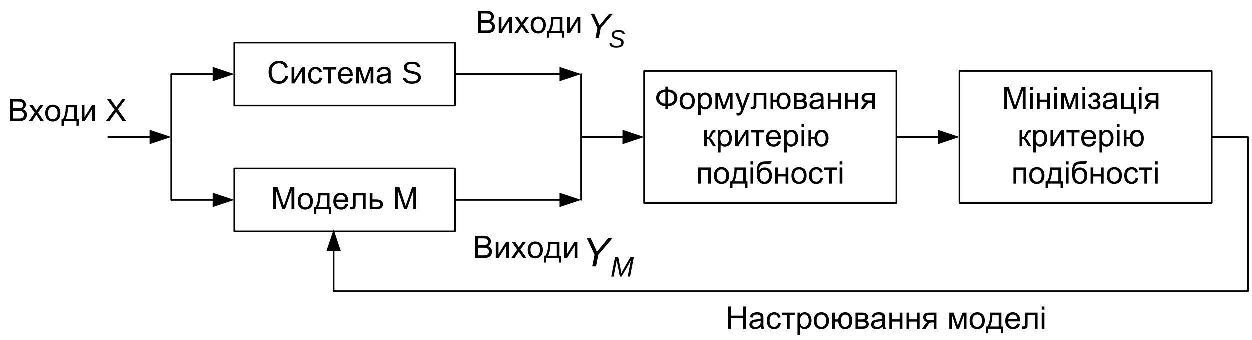

Рис. 4.1. **Загальна схема ідентифікації моделі**

Прикладами моделей, створених на основі експериментальних даних, можуть бути моделі авторегресії різних порядків, ковзного середнього і моделі типу "вхід – вихід", побудовані за допомогою методу найменших квадратів.

18.2. Основні етапи розв'язання задачі ідентифікації та їх взаємозв’язок

Взаємозв’язок основних етапів розв’язання задачі ідентифікації можна проілюструвати такою схемою (рис. 4.2).

Метод найменших квадратів для ідентифікації параметрів моделі

Найбільш відомим та досить ефективним методом розв'язання задачі ідентифікації параметрів моделі є ***метод найменших квадратів***.

Задача ідентифікації параметрів моделі типу "вхід – вихід" в загальному вигляді формулюється таким чином.

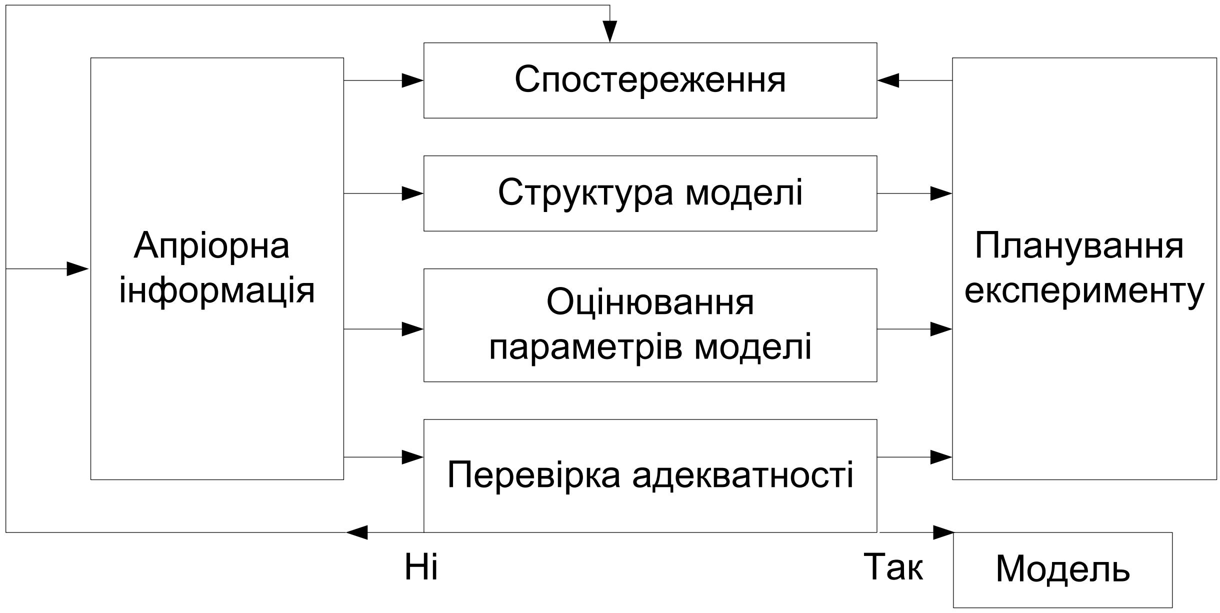

Рис. 4.2. **Схема взаємозв'язку основних етапів розв'язання задачі ідентифікації**

Нехай деяка система описується вхідними x і вихідними y змінними (тобто відповідає схемі, зображеній на рис. 3.5) і яким-небудь чином обрана структура моделі (тобто вид залежності y від x):

$$y = G(x;a) + e, \tag{4.1}$$

де $a \in R^k$, $a = (a_1, a_2, \ldots a_k)^T$ – деякі параметри моделі; e – помилка моделі (враховуючи й випадкові помилки в даних експерименту).

Необхідно на основі результатів спостереження за вхідними й вихідними змінними системи (даних експерименту) знайти оцінку параметрів моделі, тобто побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель.

Метод найменших квадратів для розв'язання цієї задачі полягає в наступному. Розглянемо випадок, коли вхідних змінних x може бути декілька ($x \in R^m$), а вихідна змінна y одна ($y \in R^1$). Нехай є дані n експериментів $(x^i, y_i), i = \overline{1,n}$, причому значення y_i містять випадкову помилку. Уводиться функція (від параметрів a) виду:

$$\Phi(a) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - G(x^i;a) \right]^2, \tag{4.2}$$

яку можна розглядати як міру відхилення моделі $G(x;a)$ від даних експерименту $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тоді оцінку параметрів a моделі $G(x;a)$

можна визначити з умови найменшого відхилення $G(x;a)$ від даних експерименту, тобто оцінка параметрів a знаходиться як точка, у якій функція $\Phi(a)$ досягає по $a \in R^k$ мінімального значення (точка мінімуму).

18.3. Поняття адекватності, сталості та чутливості моделі, формальні способи їх перевірки

Оцінка якості моделі є завершальним етапом її розробки й переслідує дві цілі [10]:

1) перевірити відповідність моделі її призначенню (цілям дослідження);

2) оцінити ймовірність і статистичні характеристики результатів, отриманих при проведенні експериментів з моделлю.

При аналітичному моделюванні ймовірність результатів визначається двома основними факторами:

1) конкретним вибором математичного апарату, використовуваного для опису досліджуваної системи;

2) методичною помилкою, властивою даному математичному методу.

При імітаційному моделюванні на ймовірність результатів впливає цілий ряд додаткових факторів, основними з яких є:

моделювання випадкових факторів, засноване на використанні датчиків випадкових чисел, які можуть вносити "перекручування" у поводження моделі;

наявність нестаціонарного режиму роботи моделі;

використання декількох різнотипних математичних методів у рамках однієї моделі;

залежність результатів моделювання від плану експериментів;

необхідність синхронізації роботи окремих компонентів моделі.

Придатність імітаційної моделі для рішення завдань дослідження характеризується тим, у якій мірі вона має так звані ***цільові властивості***. Основними з них є:

адекватність;

сталість;

чутливість.

Нижче розглянуті деякі способи проведення оцінки якості моделі за кожним з них.

Оцінка адекватності моделі. У загальному випадку під адекватністю розуміють ступінь відповідності моделі тому реальному явищу або об'єкту, для опису якого вона будується.

Разом з тим, створювана модель орієнтована, як правило, на дослідження певної підмножини властивостей цього об'єкта. Тому можна вважати, що адекватність моделі визначається ступенем її відповідності не стільки реальному об'єкту, скільки цілям дослідження. Найбільшою мірою це твердження справедливо щодо моделей проектованих систем (тобто в ситуаціях, коли реальна система взагалі не існує).

Проте в багатьох випадках корисно мати формальне підтвердження (або обґрунтування) адекватності розробленої моделі. Один з найпоширеніших способів такого обґрунтування – використання методів математичної статистики. Суть цих методів полягає в перевірці висунутих гіпотез (у цьому випадку – про адекватність моделі) на основі деяких статистичних критеріїв.

Процедура оцінки адекватності моделі заснована на порівнянні вимірів на реальній системі й результатів експериментів на моделі й може проводитися різними способами. Найпоширеніші з них:

за середніми значеннями відгуків (виходів) моделі й системи;

за дисперсіями відхилень відгуків моделі від середнього значення відгуків системи;

за максимальним значенням відносних відхилень відгуків моделі від відгуків системи.

Названі способи оцінки досить близькі між собою по суті, тому обмежимося розглядом першого з них.

При цьому способі перевіряється гіпотеза про близькість середнього значення спостережуваної змінної моделі y середньому значенню відгуку реальної системи y^*.

У результаті N_0 експериментів на реальній системі одержують множину значень (вибірку) вихідної змінної y^*. Виконавши N_M експериментів на моделі, також одержують множину значень спостережуваної змінної y.

Потім обчислюються оцінки математичного очікування й дисперсії відгуків моделі й системи, після чого висувається гіпотеза про близькість середніх значень y^* й y (у статистичному сенсі). Основою для перевірки гіпотези є t-статистика (розподіл Стьюдента). Її значення, обчислене за результатами випробувань, порівнюється із критичним значенням $t_{кр}$, узятим з довідкової таблиці. Якщо виконується нерівність $t \le t_{кр}$, то гіпотеза приймається.

Оцінка сталості моделі. При оцінці адекватності моделі як існуючої, так і проектованої системи реально може бути використана лише обмежена підмножина всіх можливих значень вхідних параметрів (робочого навантаження й зовнішнього середовища). У зв'язку із цим для обґрунтування вірогідності одержуваних результатів моделювання велике значення має перевірка сталості моделі. У теорії моделювання це поняття трактується в такий спосіб.

Сталість моделі – це її здатність зберігати адекватність при дослідженні ефективності системи на всьому можливому діапазоні робочого навантаження, а також при внесенні змін у конфігурацію системи.

Яким чином може бути оцінена сталість моделі? Універсальної процедури перевірки сталості моделі не існує. Розроблювач змушений вдаватися до методів "для даного випадку", частковим тестам і здоровому глузду. Часто буває корисна апостеріорна перевірка. Вона полягає в порівнянні результатів моделювання й результатів вимірів на системі після внесення в неї змін. Якщо результати моделювання прийнятні, упевненість у стійкості моделі зростає.

У загальному випадку можна стверджувати, що чим ближче структура моделі структурі системи й чим вище ступінь деталізації, тим більша сталість моделі.

Сталість результатів моделювання може бути також оцінена методами математичної статистики. Для перевірки гіпотези про сталість результатів може бути використаний критерій Уїлкоксона.

Критерій Уїлкоксона служить для перевірки того, чи відносяться дві вибірки до однієї й тієї ж генеральної сукупності (тобто чи володіють вони тією самою статистичною ознакою).

При статистичній оцінці стійкості моделі відповідна гіпотеза може бути сформульована в такий спосіб: при зміні вхідного (робочого) навантаження або структури імітаційної моделі закон розподілу результатів моделювання залишається незмінним.

Перевірку зазначеної гіпотези H проводять при таких вихідних даних: є дві вибірки $X = (x_1, ..., x_n)$ і $Y = (y_1, ..., y_m)$, отримані для різних значень робочого навантаження; щодо законів розподілу X і Y ніяких припущень не робиться.

Значення обох вибірок упорядковуються разом за зростанням. Потім аналізується взаємне розташування x_i й y_j. У випадку $y_j < x_i$ говорять, що пари значень (x_i, y_j) утворять інверсію.

Наприклад, нехай для $n = m = 3$ після упорядкування вийшла така послідовність значень: $y_1, x_2, y_3, x_1, y_2, x_3$; тоді маємо інверсії: (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_1, y_3), (x_3, y_3), (x_3, y_2).

Підраховують повне число інверсій U. Якщо гіпотеза вірна, то U не повинне сильно відхилятися від свого математичного очікування M:

$$M = \frac{n \cdot m}{2}.$$

Від гіпотези відмовляються, якщо $|U - M| > \Delta U_{кр}$, де $\Delta U_{кр}$ визначають за таблицею для заданого рівня значущості.

Оцінка чутливості імітаційної моделі. Очевидно, що сталість є позитивною властивістю моделі. Однак якщо зміна вхідних впливів або параметрів моделі (у деякому заданому діапазоні) не відбивається на значеннях вихідних параметрів, то користь від такої моделі невелика. У зв'язку з цим виникає завдання оцінювання чутливості моделі до зміни параметрів робочого навантаження й внутрішніх параметрів самої системи.

Таку оцінку проводять за кожним параметром (змінною) x_k окремо. Заснована вона на тому, що зазвичай діапазон можливих змін параметра відомий. Одна з найпростіших і розповсюджених процедур оцінювання полягає в наступному:

1. Обчислюється величина відносного середнього збільшення параметра x_k:

$$\Delta x_k = \frac{2(x_{k\,max} - x_{k\,min})}{x_{k\,max} + x_{k\,min}} \cdot 100\%.$$

2. Проводиться пара модельних експериментів при значеннях $x_k = x_{k\,max}$ й $x_k = x_{k\,min}$ і середніх фіксованих значеннях інших параметрів. Визначаються значення відгуку моделі $y_1 = f(x_{k\,max})$ і $y_2 = f(x_{k\,min})$.

3. Обчислюється відносне збільшення спостережуваної змінної y:

$$\Delta y_k = \frac{2(y_1 - y_2)}{y_1 + y_2} \cdot 100\%.$$

У результаті для k -го параметра моделі мають пари значень (Δx_k, Δy_k), що характеризують чутливість моделі за цим параметром.

Аналогічно формуються пари для інших параметрів моделі, які утворять множину $\{\Delta x_k, \Delta y_k\}$.

Дані, отримані при оцінці чутливості моделі, можуть бути використані, зокрема, при плануванні експериментів. А саме, більша увага має приділятися тим параметрам, за якими модель є більш чутливою.

18.4. Поняття несуперечливості моделі

Несуперечливість – властивість, що полягає в тому, що не кожна формула цієї системи доказова в ній. Формальні системи, що мають цю властивість, називаються несуперечливими, або ***формально несуперечливими***. Інакше формальна система називається ***суперечливою***, або ***несумісною***. Для широкого класу формальних систем, мова яких містить знак заперечення "$\neg$" несуперечність еквівалентна властивості: "не існує такої формули ϕ, що ϕ і $\neg\phi$ обидві доказові". Клас формул даної формальної системи називається несуперечливим, якщо не всяка формула цієї системи виводиться з даного класу. Формальна система називається ***змістовно несуперечливою***, якщо існує модель, в якій істинні всі теореми цієї системи. Оскільки модель це теж система, то поняття суперечливості і несуперечливості застосовне і до неї.

Суперечливі визначення об'єктів і суперечливі моделі іноді виникають у результаті абсолютизації локальних властивостей реально існуючих об'єктів. Інша можлива причина появи суперечливих моделей – наявність різних неузгоджених джерел інформації, яка служить основою моделювання.

Висновки

1. Задача ідентифікації в широкому розумінні виконується в умовах апріорної невизначеності структури моделі системи ("чорний ящик").
2. Задача ідентифікації у вузькому розумінні полягає в оцінюванні параметрів і станів системи, якщо відома структура моделі ("сірий ящик").

3. Найбільш відомим та досить ефективним методом розв'язання задачі ідентифікації параметрів моделі є метод найменших квадратів.

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте завдання ідентифікації в широкому та вузькому розумінні для задачі про водопостачання.
2. У чому полягає метод найменших квадратів для розв'язання задачі ідентифікації параметрів моделі?
3. Назвіть основні цільові властивості імітаційної моделі.