Тема 17. Основні види моделювання. Формальні методи побудови моделей

17.1. Основні види моделювання

Єдина класифікація видів моделювання неможлива через багатозначність поняття моделі в науці, техніці, суспільстві. Найбільш широко відомими видами моделювання є ***математичне*** (аналітичне), ***імітаційне*** і ***статистичне***. На жаль, різні джерела по-різному трактують ці поняття.

Для ***аналітичного (математичного) моделювання*** характерне те, що процеси функціонування елементів системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень. При цьому слід зазначити, що під час використання аналітичних моделей багато що залежить від способу подання як моделі, так і результатів моделювання.

Розглянемо простий приклад. Нехай на деякому підприємстві для водопостачання використовується резервуар, об'єм якого W тисяч літрів. Рівень споживання – V_C тисяч літрів на добу, а швидкість заповнення резервуара – $V_З$ тисяч літрів на добу. Необхідно знайти час T, за який буде заповнений резервуар. Схема цієї системи зображена на рис. 3.1, де резервуар позначений прямокутником, а вхідний і вихідний потоки – стрілками з "вентилями", які регулюють ці потоки. Хмари позначають необмежені потоки. Такі ідеограми широко використовуються під час побудови моделей неперервних процесів.

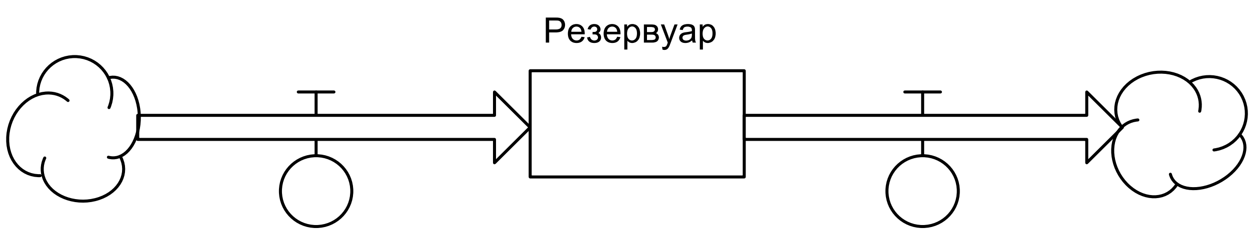

Рис. 3.1. **Схема системи водопостачання**

Знайдемо час заповнення резервуара:

$$T = \frac{W}{V_З - V_C}. \tag{3.1}$$

Ця математична модель процесу наповнення резервуару вельми ідеалізується, оскільки всі її параметри вважаються незмінними в часі і зовнішні впливи на систему не враховуються. Завдяки такій ідеалізації маємо дуже просту модель, яка дає можливість розв’язати задачу аналітично. Проте за допомогою такої моделі можна отримати відповідь лише на одне конкретне питання – за який час буде заповнений резервуар.

Якщо задачу про водопостачання наблизити до реальності, то при побудові моделі необхідно враховувати, що потреби підприємства у водопостачанні постійно змінюються, більш того, можливі перебої в роботі насосів під час подачі води.

Розв'язок (3.1) задачі можна записати як

$$W = (V_З - V_C)T\ .$$

Позначило через $W(t)$ об'єм води в резервуарі в деякий момент часу t, тоді

$$W(t) = (V_З - V_C)t\ , \tag{3.2}$$

тобто пошук T зводиться до розв'язання рівняння $W(t) = W$ або $(V_З - V_C)t = W$.

За рахунок неявного запису отримана придатна для дослідження й аналізу реальних процесів математична модель (3.2). Час заповнення резервуара об'ємом W залежить від параметрів моделі $V_З$, V_C. Використання цієї моделі дає можливість вивчити співвідношення між величинами V_C і $V_З$, задаючи різні початкові значення для них, і будуючи графік наповнення резервуара (рис. 3.2).

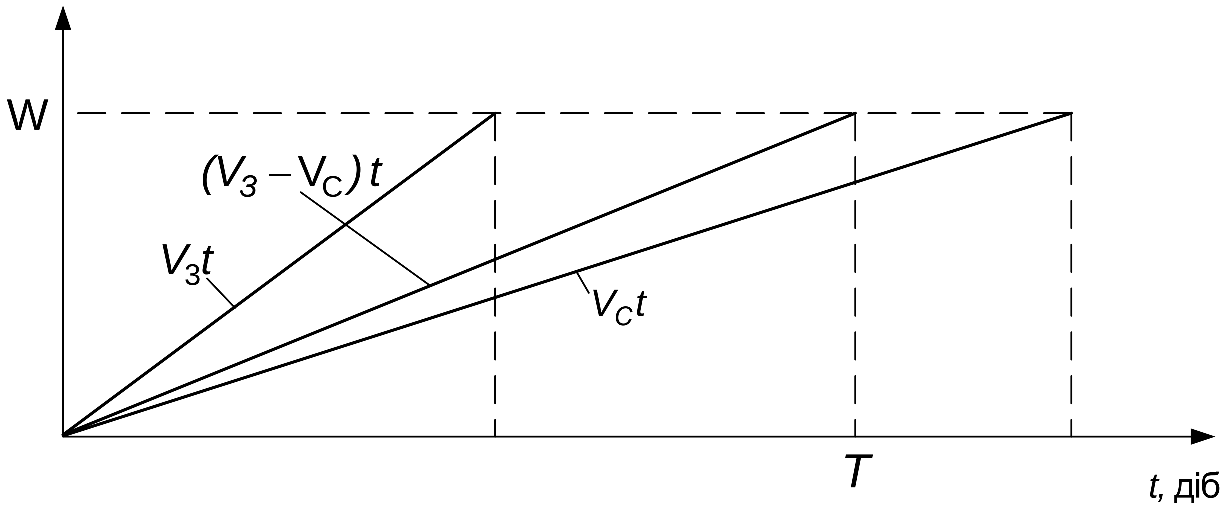

Рис. 3.2. **Графік заповнення резервуара**

Реалізувати цю модель можна і за допомогою чисельних методів. Змінюючи у формулі (3.2) значення t від 0 з деяким кроком Δt до такого, при якому виконуватиметься рівність $W(t) = W$, отримаємо динамічну характеристику заповнення резервуару. Чим менше крок Δt, тим точніше отримаємо результат, але тим довше розв'язуватиметься задача моделювання.

Термін "моделювання" відповідає англійському слову "modeling", тобто побудові моделі і її аналізу. Англійський термін "simulation" відповідає прийнятому терміну "імітаційне моделювання", але часто вони використовуються разом, коли мова йде про технологічні або системні етапи моделювання, пов'язані з прийняттям рішень за допомогою моделей.

Імітаційне моделювання – це метод конструювання моделі системи і проведення експериментів. Проте під таке визначення підпадають майже всі види моделювання. Тому потрібно виділити суттєві особливості імітаційного моделювання.

Перш за все, слід ввести в модель **структуру** системи, тобто загальний опис елементів і зв'язків між ними, потім визначити засоби відтворення в моделі поведінки системи. Переважно поведінку системи описують за допомогою її станів і моментів переходів між ними. Стан системи у момент часу t визначають як множину значень певних параметрів (змінних) системи в один і той же момент часу t. Будь-яку зміну цих значень можна розглядати як перехід до іншого стану. І, нарешті, імітаційна модель повинна відображати властивості середовища, в якому функціонує досліджувана система. Зовнішнє середовище задають вхідними впливами на модель.

Вся інформація про імітаційну модель взагалі має логіко-математичний характер і подається у вигляді сукупності алгоритмів, які описують процес функціонування системи. Отже, більшою мірою імітаційною моделлю є її програмна реалізація на комп'ютері, а імітаційне моделювання зводиться до проведення експериментів з моделлю шляхом багаторазового прогону програми з деякою множиною даних – середовищем системи. Під час імітаційного моделювання можуть бути задіяні не лише програмні засоби, але і технічні засоби, люди та реальні системи.

З математичної точки зору імітаційну модель можна розглядати як сукупність рівнянь, які розв'язують з використанням чисельних методів у разі кожної зміни модельного часу. Окремі рівняння можуть бути простими, але їх кількість і частота розв'язання – дуже великими. Розв'язання таких рівнянь під час імітаційного моделювання означає встановлення хронологічної послідовності подій, які виникають у системі і відображають послідовність її станів. Таким чином, імітаційна модель функціонує так само, як система.

Якщо повернутися до процесу наповнення резервуара (рис. 3.1), то за допомогою імітаційної моделі весь процес можна відтворити з використанням рівняння (3.2). Позначимо через W_i поточний стан резервуара, що відтворюється в певні моменти t_i модельного часу, який змінюється з постійним кроком Δt:

$$W_i = (V_З - V_С)\,t_i\,, \tag{3.3}$$

де $t_i = t_{i-1} + \Delta t\ (i = 1, 2, \ldots)$, $t_0 = 0$.

Модель (3.3) є детермінованою. Процес моделювання закінчується, якщо на деякому кроці виконується умова $W_i \geq W$, тобто розв'язок отримуємо за один прогін імітаційної моделі (3.3). Точність результату при цьому залежатиме від значення Δt (рис. 3.3).

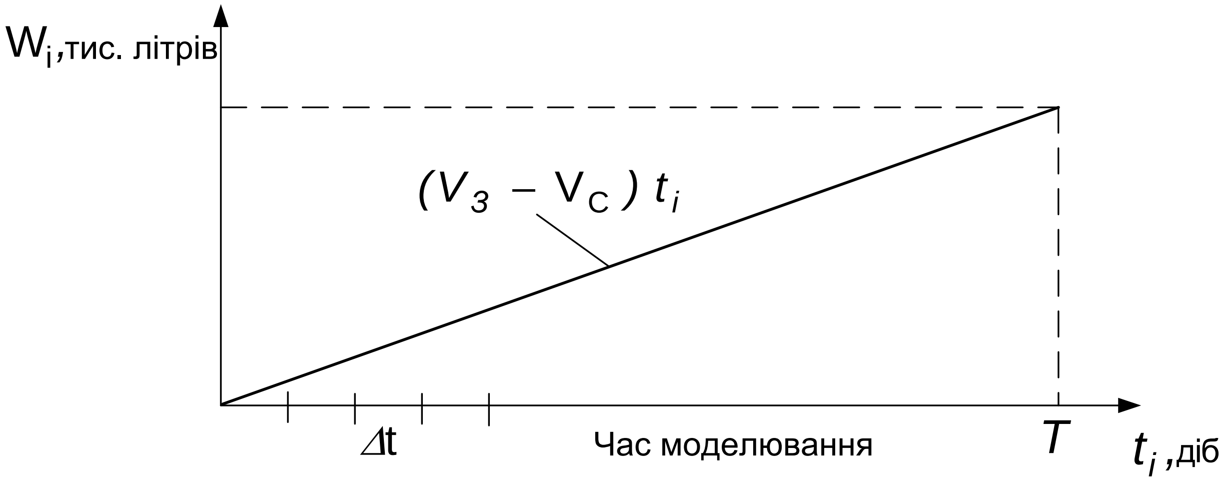

Рис. 3.3. **Динамічна характеристика наповнення резервуара**

За наявності в моделі випадкових факторів виникає необхідність статистичного оцінювання результатів моделювання, яке виконується за допомогою метода ***статистичного моделювання*** (методу Монте-Карло). Статистичне моделювання є самостійним видом моделювання, яке включається в імітаційне моделювання лише за необхідності моделювання ймовірнісних систем і процесів.

Побудуємо реальнішу модель системи, яка розглядалася вище. Припустимо, що рівень споживання води на підприємстві має імовірнісний характер і змінюється згідно з рівномірним розподілом ймовірності в межах $V_C \pm \Delta V_C$. Модель (3.3) тоді перепишемо у вигляді

$$W_i = (V_З - V_{Ci})\, t_i, \tag{3.4}$$

де V_{Ci} – рівень споживання води на підприємстві в деякий момент часу t_i. При цьому V_{Ci} буде визначатися як

$$V_{Ci} = V_C - \Delta V_C + 2\Delta V_C r_i, \tag{3.5}$$

де r_i – випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі [0; 1].

Результати роботи імітаційної стохастичної моделі (3.4) – (3.5) наведені на рис. 3.4. У цьому випадку після кожного прогону моделі отримаємо випадкові значення T_j, де j – номер прогону, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Відзначимо, що для кожного прогону потрібно генерувати свою послідовність випадкових чисел r_i. Як видно на рис. 3.4, отримані значення T_j будуть відрізнятися від середнього значення T, знайденого за допомого детермінованої моделі (3.1). Таким чином, щоб оцінити час T наповнення резервуара, треба задати точність оцінювання $\varepsilon = \Delta T$ і довірчу ймовірність α. Зазвичай $\alpha = 0.95$, тобто гарантується, що в 95 випадках із 100 середнє значення часу T буде знаходитися в межах $T \pm \Delta T$.

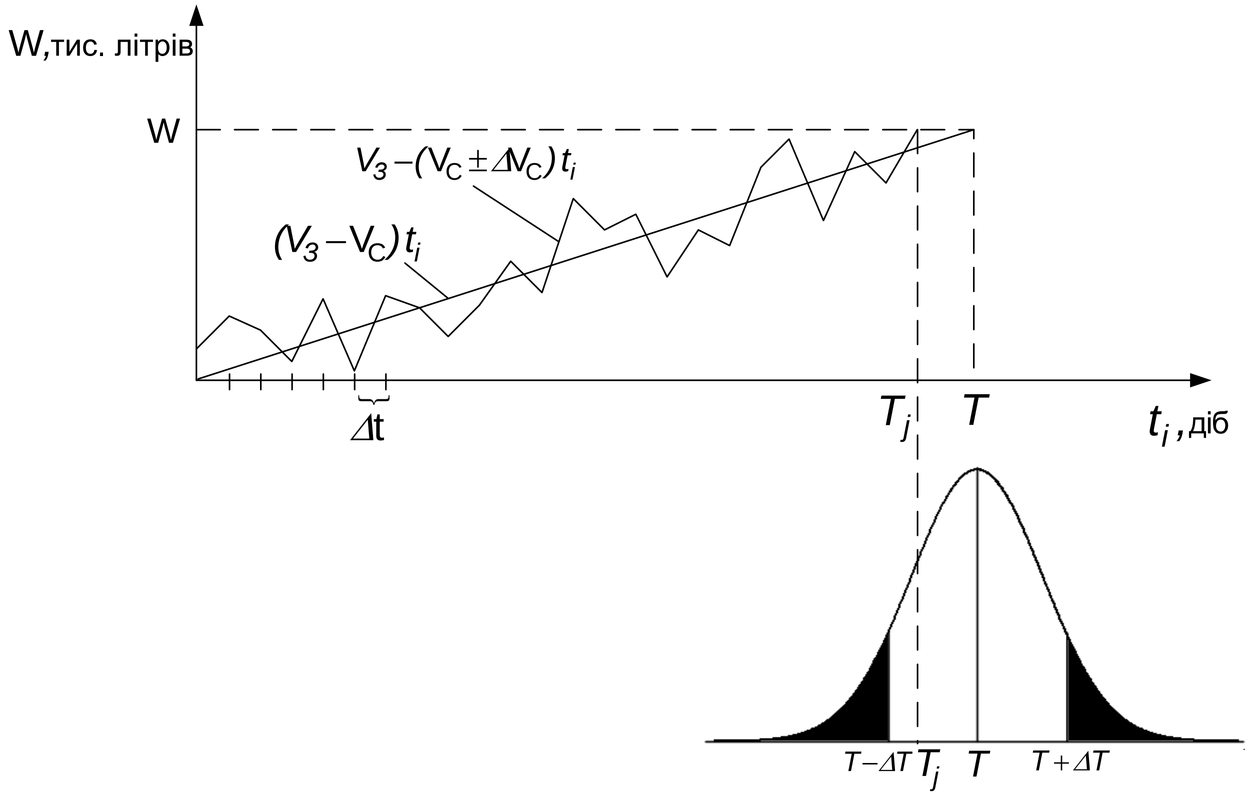

Рис. 3.4. **Графік реалізації стохастичної моделі**

З вищенаведеного прикладу видно, що статистичне моделювання використовується при імітаційному моделюванні лише за необхідності врахування випадкових факторів.

17.2. Декомпозиція систем та простір станів

Як правило, під час побудови моделі система спрощується, тобто проводиться її декомпозиція (розділення на підсистеми). Якщо систему задати множиною відношень n-го порядку $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то загальний метод декомпозиції можна описати за допомогою операції добутку відношень. Відношення R є добутком відношень R_1 і R_2, якщо виконується умова

$$(Y\,R\,X) \leftrightarrow [(Y\,R_1\,X) \cap (Y\,R_2\,X)],$$

де X, Y, Z – деякі множини. Завдання дослідника полягає у визначенні відношень R_1 і R_2.

Якщо ці відношення знайдені, то систему можна розглядати як сукупність двох підсистем:

$$R_1[x_1, x_2, \ldots, x_j, Z] \text{ і } R_2[Z, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n],$$

де $x_j \in X,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

У літературі [12] вказано, що відношення n-го порядку можна розкласти на $n-2$ тривимірних відношень. З погляду дослідження систем найважливішим є наслідок цієї теореми, пов'язаний з введенням поняття стану системи. Розглянемо систему, яка задається відношенням

$$Y \cdot R \cdot X(t). \tag{3.6}$$

Другий елемент відношення, $X(t)$, є функцією часу, тобто деякою множиною. Припустимо, що множина $X(t)$ скінченна і містить n елементів.

Згідно з наслідком теореми відношення (3.6) має порядок $n+1$ і не може бути розкладене на відношення нижче третього порядку. Нехай елементи $X(t)$ впорядковані в часі:

$$X(t) = [x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)].$$

Тоді відношення (3.6) має вигляд

$$Y \cdot R \cdot [x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)].$$

Розглянемо підмножину всіх елементів $x(t)$ з індексом, більшим ніж j:

$$X^j(t) = [x(t_{j+1}), x(t_{j+2}), \ldots, x(t_n)].$$

Відношення (3.6) буде еквівалентним відношенню

$$Y \cdot R \cdot [X^j(t), X^{jr}(t)],$$

де $X^{jr}(t)$ складається з членів $x(t)$, які залишились:

$$X^{jr}(t)=[x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_j)].$$

Якщо представити відношення R у вигляді добутку відношень R_1 і R_2, то система складатиметься з двох підсистем:

$$R_1[X^j(t),Z^j] \text{ і } R_2[Z^j,X^{jr}(t)]. \tag{3.7}$$

Терм Y залежить тільки від проміжного терма Z^j; і не залежить від елементів $x(t_j)$, в яких індекс менше ніж j. Можна стверджувати, що елемент Z^j описує **стан системи**. Якщо система розділена на дві підсистеми відповідно до виразу (3.7), то терм Y залежить тільки від стану системи в момент $\tau=t_j$ і всіх майбутніх елементів x і не залежить від всіх попередніх елементів. Стан системи у момент часу τ називається початковим станом і позначається через $z_0(\tau)$. Наведені міркування справедливі і для нескінченних множин.

Таким чином, під час моделювання системи або процесу немає необхідності запам'ятовувати всі стани системи до моменту часу τ, тобто алгоритм моделювання "забуває", що було раніше. Якщо реалізувати алгоритм за допомогою комп'ютера, то не потрібно зберігати всі відтворення в пам'яті. Винятком є необхідність анімаційного або графічного відтворення станів системи в часі і можливість її "програвання" у прямому і зворотному напрямах.

Якщо потрібно зменшити порядок відношення системи шляхом усунення залежності від будь-яких елементів певної підмножини X^r, то нове відношення повинне бути хоча б тривимірним, трьома термами його є входи X, виходи Y і стани Z. Рівняння

$$z(t>\tau)=z(z(\tau);x(\tau,t)) \tag{3.8}$$

називатимемо рівнянням станів системи, а функцію z – перехідною функцією станів системи. Таким чином, вхідні впливи X перетворюються на виходи системи Y за допомогою рівняння станів (3.6), і саму систему S можна представити у вигляді "чорного ящика", зображеного на рис. 3.5, де зовнішні відношення зв'язують елементи системи із зовнішнім середовищем за допомогою входів системи. При проведенні досліджень над системою можна впливати на її входи і спостерігати за її виходами. Вхідні змінні, які дослідник може змінювати, проводячи експеримент, називаються управляючими змінними, а ті, які неможливо змінювати, – спостережуваними змінними. Під час моделювання звісно можна змінювати всі вхідні змінні.

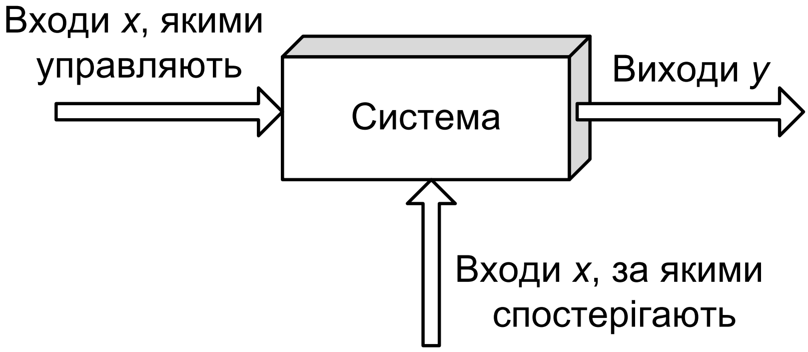

Рис. 3.5. **Кібернетична модель системи**

Розглядаючи простір станів, або фазовий простір, і зміни станів системи в часі, можна описати її поведінку (функціонування). Поняття стану вже давно є одним з найважливіших в техніці. У теорії систем стан системи визначається як точка фазового простору, який містить всю інформацію про передісторію системи, суттєву для визначення її поведінки в майбутньому. Через стани системи можна пов'язати виходи системи з її входами.

У разі введення множини T як цілком впорядкованої множини додатних дійсних чисел t, які визначають перебіг часу, пара елементів (t,z), де $t \in T$, $z \in Z$, називають ***станом*** або ***фазою*** системи S, а множина $T \times Z$ – просторо-станом або ***фазовим простором*** системи, де $\times$ – декартовий добуток. Перехідна функція z або її графік у просторі станів визначає поведінку системи або її ***траєкторію руху у фазовому просторі*** на певному проміжку часу $t \in [\tau,t)$. Поняття простору станів не повинне викликати труднощів. Можна уявити звичайний простір, в якому не три, а довільна кількість осей координат, а стан – це точка в цьому просторі, який характеризує об'єкт у поточний або довільний момент часу подібно тому, як координати звичайного простору характеризують просторове розташування. Під фазовим простором розуміється простір, в якому визначені не лише статичні координати точки, координати її положення, але і міститься вся інформація, потрібна для визначення її поведінки в майбутньому.

Важливість поняття стану полягає в можливості, використовуючи його як деякий параметр, пов'язати з кожним значенням вхідних змінних єдине значення вихідних змінних. Якщо зміна станів системи відбувається неперервно в часі, то динамічна система належить до класу неперервних систем. Якщо ж функція (3.8) визначена на дискретній множині моментів часу t, то розглядають клас дискретних динамічних систем. В окремому випадку дискретні моменти часу можуть задаватися у момент настання деяких подій, які призводять до зміни станів системи.

Отже, щоб відтворити функціонування системи або, іншими словами, її траєкторію у фазовому просторі, потрібно задати рівняння станів системи (3.8). Під час моделювання системи таке рівняння називають також ***функцією дії***. Цю функцію можна задати в явному вигляді, наприклад за допомогою диференціального рівняння, або у вигляді алгоритму моделювання, який визначає стан системи в кожен момент часу t, або шляхом задавання таблиці станів, як це робиться, наприклад, для дискретних автоматів.

Таким чином, ***процес***, який під час моделювання системи описує її функціонування, визначається послідовністю станів, зв'язок між якими задається функцією дії і початковим станом системи. Тобто, послідовність розташованих у порядку збільшення часу пар $(z(t), x[\tau, t))$ визначає процес і описує поведінку системи.

У разі побудови моделей динамічних систем ці системи описуються у вигляді множини деяких ***реалій*** (рис. 3.6), які можна описувати і моделювати за допомогою властивостей, що змінюють стани системи. Зміна станів системи спричиняє ***події***, яким відповідають певні **умови**. Виникнення певних умов призводить до ***дій***, які утворюють конкретні ***процеси***.

Рис. 3.6. **Схема опису динамічних систем**

Процес можна також розглядати як послідовність взаємопов'язаних дій за умови визначення початку і закінчення дії.

17.3. Формальні методи побудови моделей

Розглядаючи сфери застосування моделей, можна констатувати, що за допомогою моделі можна досягти ***двох основних цілей**: **описової***, якщо модель призначена для пояснення і кращого розуміння об'єкта, або ***приписуючої***, коли модель дає можливість передбачити або відтворити характеристики об'єкта чи визначити його поведінку. Таким чином, ***модель є описовою***, якщо вона призначена зображати поведінку (функціонування) або властивості існуючої чи типової системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, який дає можливість знайомити потенційних покупців з фізичними і робочими характеристиками комп'ютера). Протилежність – ***приписуюча модель***, яка відображає необхідну поведінку або властивості запропонованої системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, представлений постачальникові комп'ютерів, з фізичними і робочими характеристиками потрібного замовникові комп'ютера).

Приписуюча модель може бути описовою, але не навпаки. Тому існує різний ступінь корисності моделей, які використовуються в технічних і соціальних науках. Це значною мірою залежить від методів і засобів, застосовуваних під час побудови моделей, а також від кінцевої мети. У соціальних науках моделі призначені для пояснення існуючих систем, а в техніці вони є допоміжними засобами для створення нових або досконаліших моделей. Модель, яка придатна для досягнення цілей розробки системи, повинна також пояснювати (тлумачити) її.

При побудові моделей застосовуються фундаментальні закони природи, варіаційні принципи, аналогії, ієрархічні ланцюжки. Процес створення моделі включає такі етапи.

1. Словесно-смисловий опис об'єкта або явища – формулювання описової моделі, призначеної для сприяння кращому розумінню об'єкта моделювання.

2. Числове вираження модельованої реальності для виявлення кількісної міри і меж відповідних якостей; з цією метою ведеться математико-статистична обробка емпіричних даних, пропонується кількісне формулювання якісно встановлених фактів і узагальнень.

3. Перехід до вибору або формулювання моделей явищ і процесів (варіаційного принципу, аналогії і т. п.) і його запису у формалізованій

формі; це рівень структурних теоретичних схем, таких, як системи масового обслуговування, мережі Петрі, скінченні або імовірнісні автомати, діаграми фонд-потік тощо.

4. Завершення формулювання моделі її "оснащенням" – задавання початкового стану і параметрів об'єкта.

5. Вивчення моделі за допомогою доступних методів (зокрема із застосуванням різних підходів і обчислювальних методів).

У результаті дослідження моделі досягається поставлена мета. У цьому випадку повинна бути встановлена всіма можливими способами (шляхом порівняння з практикою, порівнянням з іншими підходами) її адекватність, тобто відповідність об'єкта сформульованим умовам.

При побудові моделей зазвичай використовують такі формальні підходи: кібернетичний, системна динаміка, теоретико-множинний.

17.3.1. Кібернетичний підхід

Систему можна вивчати й аналізувати, змінюючи вхідні впливи і спостерігаючи за виходами. Це кібернетичний підхід, згідно з яким система розглядається як "чорний ящик". Метод "чорного ящика" широко використовується під час моделювання систем, коли для дослідника важливо отримати інформацію про поведінку системи, а не про її будову. Дослідник не може зробити однозначний висновок про структуру "чорного ящика", спостерігаючи лише за його входами і виходами, оскільки поведінка модельованої системи нічим не відрізняється від поведінки ізоморфних їй систем.

Для побудови моделі використовуються методи **теорії ідентифікації** (див. підрозділ 4.1).

17.3.2. Системна динаміка

Для формального представлення моделей неперервних систем Дж. Форрестер у 1960 році запропонував підхід, названий **системною динамікою**, який дає можливість будувати моделі динамічних взаємозв'язаних систем за допомогою причинних діаграм циклів і схем виду "фонд-потік". Він же запропонував для чисельного моделювання таких систем мову Динамо. Модель будується як система диференціально-різницевих рівнянь, а мова Динамо дає можливість автоматизувати процес їх написання. Практично всі сучасні засоби неперервного і неперервно-дискретного моделювання базуються на цій мові для побудови моделей. На відміну від математичного розв'язання системи таких рівнянь у замкнутому вигляді використовується чисельне розв'язання з дискретним кроком часу, що дає можливість моделювати на деякому проміжку часу динамічні зміни фондів, пов'язаних з точкою часу, і потоків. Фонди і потоки пов'язані між собою через змінні [12].

Фонд можна трактувати як деяку кількість чого-небудь, що вимірюється в певних одиницях (наприклад, фізичних, грошових та ін.). Фонди можуть акумулювати одиниці фонду. Краще всього їх представляти як резервуари, ресурси або буфера. Фонди поповнюються через вхідні потоки і спорожняються через вихідні. Як буфер фонд може використовуватися для забезпечення балансування швидкості накопичення і витрачання (наприклад, в задачі про водопостачання, яке розглядалася в підрозділі 3.1).

Потік – це процес, що протікає неперервно в часі, оцінити який можна в деяких кількісних одиницях за певний проміжок часу. Залежно від характеристики використання потоки діляться на: обмежені і необмежені, одно- і двонаправлені, конвертовані і неконвертовані. Потік, як правило, обмежується фондом. Потоком можна керувати, тобто збільшувати або зменшувати його інтенсивність за допомогою деяких виразів алгебри.

Існує багато різних способів пов'язувати в динамічних моделях причини і наслідки, не розглядаючи конкретні методи. В їх основі лежить декілька підходів. Розглянемо три з них, наведених на рис. 3.7.

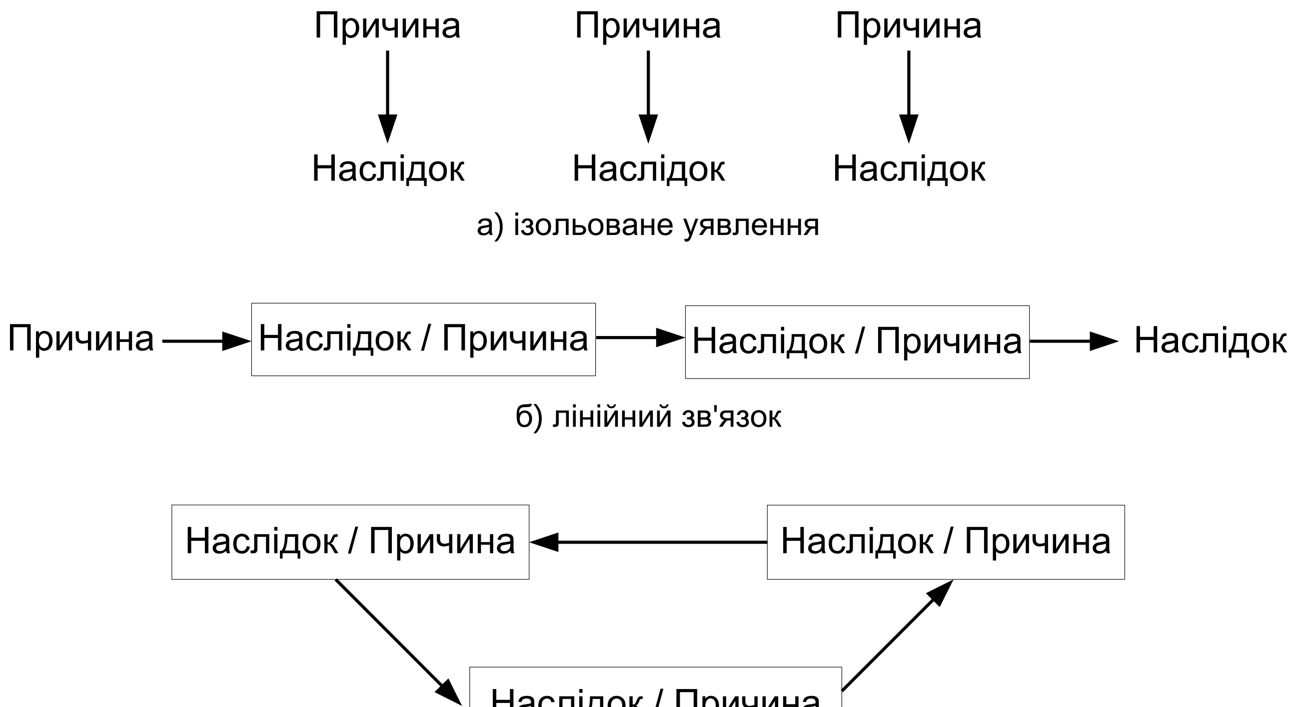

Рис. 3.7. **Три підходи до пов'язування причин і наслідків для побудови моделі**

Перший підхід (**ізольоване уявлення**) полягає в тому, що наслідок виникає з деякої причини і взаємозв'язок між різними причинами відсутній. Такий підхід, наприклад, використовують економісти під час розрахунків. Як правило, для цього застосовують статичні і статистичні моделі.

Другий підхід (**лінійний зв'язок**) передбачає, що між причинами і наслідками існує лінійний зв'язок у вигляді ланцюжка. Такий підхід підтримують інженери і науковці, які вважають, що всі події у всесвіті залежать одна від одної. Маючи достатню кількість інформації, можна побудувати залежності в часі для всіх подій у майбутньому. Системні мислителі, які застосовують цю парадигму, користуються діаграмами впливу і моделями лінійних рівнянь та вважають, що завжди можна логічно прослідкувати, "що є на вході і що буде на виході".

Згідно з третім підходом (**причинний цикл**) всесвіт розглядається як система з зворотними зв'язками, тобто ланцюжки причин і наслідків циклічно пов'язані між собою. Таке уявлення підтримують кібернетики, прибічники нелінійної динаміки і хаосу. Вони вважають, що всесвіт значною мірою хаотичний, і передбачити майбутнє, враховуючи його минуле, неможливо. Ці системні мислителі використовують циклічні причинні моделі, нелінійні рівняння в кінцевих різницях. Часто поведінка таких моделей далека від реальності й інтуїтивного уявлення і може бути де в чому неочікуваною для дослідника.

На рис. 3.8 зображена проста причинна циклічна модель для деякої популяції, яка має два цикли. Лівий цикл, додатній, свідчить про приріст популяції в разі збільшення народжуваності, яка у свою чергу збільшує народжуваність. Правий цикл, від’ємний, свідчить про зменшення популяції в разі збільшення смертності, яка у свою чергу зменшує смертність. Такі пари причинних циклів можуть використовуватися під час побудови складніших динамічних моделей.

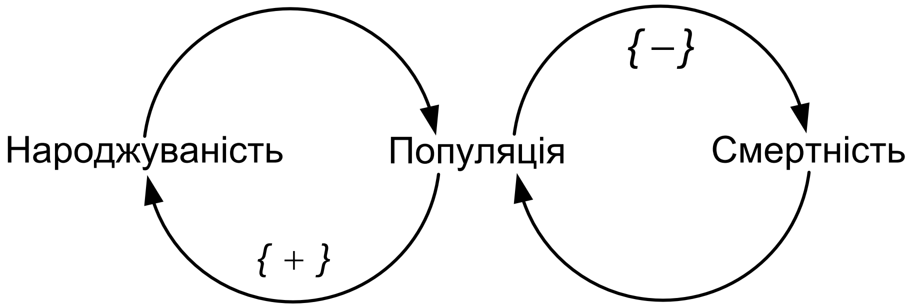

Рис. 3.8. **Найпростіша причинна модель циклу популяції**

Побудова складних динамічних моделей з використанням причинних циклів включає такі етапи.

1. Абстрагування від фізичної структури системи.

2. Концентрація на процесах для визначення траєкторій, за якими система починає і закінчує працювати.

3. Використання простих диференциіально-різницевих рівнянь для опису процесів у системі:

– $\dfrac{dx}{dt} = kx$ – показникова функція, яка визначає швидкість зміни фонда в часі, де x – фонд (для прикладу з водопостачанням – це швидкість наповнення резервуара);

– $\dfrac{dx}{dt} = ax - bx^2$ – сигмаїдальна, або логістична, крива, або S-*крива*;

або системи рівнянь:

– $\dfrac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 x^2 - k_3 y$;

– $\dfrac{dy}{dt} = k_4 y - k_5 y^2 - k_6 x$

(наприклад, x – кількість травоїдних тварин, y – кількість хижаків).

Такі системи рівнянь відомі як рівняння Ланкастера. Їх можна використовувати для дослідження складних взаємозв'язків, конкуренції або конфліктів.

За допомогою комп'ютерів подібні рівняння можна представити в чисельному вигляді. Для цього використовують прості рівняння рекурсії:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

$$\frac{x(n+1) - x(n)}{dt} = f(x(n)),$$

$$x(n+1) = dt \cdot f(x(n)) + x(n).$$

Якщо описати дані рівняння словами, то наступний рівень дорівнюватиме попередньому плюс невелика зміна впродовж короткого проміжку часу. У такий спосіб можна будувати складні динамічні моделі за допомогою створення простих блоків у вигляді відношень і рівнів. У сучасних пакетах моделювання цей процес запису рівнянь автоматизований із застосуванням ідеографічних схем (див. рис.

3.7).Причинні діаграми циклів дають можливість вести ***якісне*** моделювання, а діаграми "фонд-потік" – ***кількісне***. Щоб пояснити явище, необхідно знайти "причини" його виникнення. Припустимо, що така причина визначена і наслідок може спостерігатися кожного разу, коли ця причина присутня. Якщо описують ці концепції системного мислення звичайними словами, то використовують слова або фрази "оскільки", "завдяки тому, що", "якщо ..., то" та ін. З погляду математики, якщо розглядають функціональну концепцію з однією незалежною змінною, ця змінна – ***причина***, а залежна змінна – ***наслідок***.

У разі кількісного моделювання таких систем, модельовані об'єкти – це об'єкти, параметри яких можна виміряти і між якими існують функціональні залежності. Якщо розглядати систему "хижаки-зайці", то в кількісній моделі знищення хижаками деяких зайців – це не знищення тварин, а зменшення їх кількості. Тобто в системі є суттєва різниця між зайцями як тваринами і їх кількістю. Наприклад, вовк може знищити зайців, але кількість вовків не може знищити щось, а може тільки вплинути на кількість зайців.

Вище приведені моделі динамічних систем широко використовуються для побудови спеціальних засобів моделювання – мов і пакетів неперервного та неперервно-дискретного імітаційного моделювання.

17.3.3. Теоретико-множинний підхід

Згідно з теоретико-множинним підходом формальна модель динамічної системи має такий вигляд [12]:

$$M = \left(T, X, Y, Z, z(t), P\right), \tag{3.9}$$

де T – модельний час; X, Y – множина значень відповідно вхідних і вихідних змінних; Z – простір станів моделі; $z(t)$ – функція станів, $t \in T$; P – множина процесів, яка визначається як множина впорядкованих у часі пар елементів $p = \left(x, z[\tau, t)\right)$, де $t \in T$, а τ – початковий момент модельного часу для процесу $p \in P$. Таке визначення задає модель системи у вигляді схеми процесів, в якій множина процесів може існувати паралельно в модельному часі T.

Вважається, що деяка подія з множини подій C зумовлює зміну стану системи, якщо починається певний процес $p_i \in P$ або закінчується деякий процес $p_j \in P$. У протилежному випадку стан системи не змінюється. Тоді можна задати ***подієву*** схему моделі:

$$M = (T, X, Y, Z, z(t), C), \qquad (3.10)$$

де C – множина подій, яки визначається як множина впорядкованих у часі пар елементів $c = (j, d[\tau, t_j))$, де $c \in C$, $d[\tau, t_j]$ – функція дії для процесу $p_j \in P$; $t \in T$, а τ – початковий момент модельного часу T. У цій схемі процес моделювання описується як послідовність подій, які відбуваються в моделі.

Припустимо, що завдяки виконанню деякої умови u з множини U почне виконуватися певна дія $d[\tau, t_j]$ з множини D для деякого процесу $p_j \in P$. Тоді можна задати модель системи у вигляді ***схеми дій***:

$$M = (T, X, Y, Z, z(t), D). \qquad (3.11)$$

У цій схемі процес моделювання описується як перевірка всіх умов у разі кожної зміни модельного часу, щоб знайти умову, яка розпочне певну дію з множини D. Зміна часу t може відбуватися з постійним або змінюваним від події до події кроком.

Схеми моделей (3.9) – (3.11) широко застосовуються під час побудови алгоритмів моделювання і мов дискретного імітаційного моделювання.

Якщо припустити, що виконання деякої множини процесів P може привести до зміни станів $z \in Z$ і виникнення нових процесів, що послужить причиною появи деякої множини ситуацій L, тобто $z(t): P_z \to L$, то отримаємо **ситуаційну** або **причинно-наслідкову** схему:

$$M = (T, X, Y, Z, z(t), L). \qquad (3.12)$$

У ній потрібно описати множину ситуацій і множину правил (алгоритмів), за якими визначають виконуваний процес. Поведінка моделі в таких системах зображується у вигляді ланцюга

{ситуація} $\to${правило} $\to$ {процес}.

Якщо модель здатна конструювати нові правила на основі тих, що існують, то вона перетворюється на модель зі штучним інтелектом.

Під час ситуаційного моделювання, як правило, повний опис всіх можливих ситуацій замінюється деякою множиною узагальнених ситуацій, кожна з яких з певною мірою ймовірності відтворює один з можливих станів системи. Для кожної ситуації існує набір правил дії. Вибір того або іншого правила може здійснюватися за деяким критерієму або за допомогою таблиць прийняття рішень, а в простіших випадках – згідно з заданою ймовірністю. Моделювання виконується шляхом програвання різних ситуацій за певним сценарієм, яким в окремому випадку може бути алгоритм моделювання. Таким чином, створюють різні ігри, наприклад ділові, військові, економічні, розважальні. ***Гра*** – це спрощене відтворення реального процесу, яке переважно використовується для навчання, прийняття рішень, проведення досліджень або розваг.

Визначити систему можна не тільки як сукупність елементів, але і як сукупність відношень, спостерігаючи за їх змінами. Перш за все, це стосується взаємодії між різними динамічними системами, кожна з яких досить складна. Прикладом можуть бути екологічні і соціальні системи. Під час вивчення таких систем дослідник, базуючись на системному аналізі, вивчає й описує впливи однієї системи на іншу.

Висновки

1. Імітаційне моделювання – це метод конструювання моделі системи та проведення експериментів над моделлю.
2. Статистичне моделювання використовується при імітаційному моделюванні якщо є потреба врахування випадкових факторів.

Контрольні запитання та завдання

1. Порівняйте числовий метод розв'язання задачі про водопостачання з методом імітаційного моделювання. Що є між ними спільного?
2. Покажіть, яким чином можна провести декомпозицію для нескінченних множин (див. підрозділ 3.2).
3. Яким чином задається час моделювання в задачах про водопостачання? Чи можливо так задати час моделювання для цієї задачі, щоб він залежав від деяких подій? Наведіть приклади моделювання таких подій.

Дайте ситуаційний опис переходу пішоходом дороги. Розгляньте всі можливі ситуації.