Лабораторна робота № 9
Чисельні методи розв’язання задач лінійного програмування

9.1. Мета роботи

Вивчення чисельних методів лінійного програмування для розв’язання практичних задач, придбання навичок використання цих методів для розв’язання задач лінійного програмування із застосуванням математичних пакетів.

9.2. Методичні вказівки по організації самостійної роботи

По темі лабораторної роботи студент повинен: *знати* загальне формулювання задачі лінійного програмування; *уміти* розв’язувати цю задачу з використанням математичних пакетів [5].

Задача лінійного програмування в **загальній формі** записується у вигляді:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x \in X} \tag{9.1}$$

при обмеженнях

$$X = \{x : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1, m_1},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{m_1 + 1, m},\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\} \tag{9.2}$$

,

де $c_j \in R^1, j = \overline{1,n}$, $a_{ij} \in R^1, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$; $b_i \in R^1$, $i = \overline{1,m}$ – задані.

Основним чисельним методом розв'язання задач лінійного програмування є так званий **симплекс-метод**. Його теоретичні і обчислювальні аспекти добре розроблені. Є безліч стандартних програм, що реалізовують симплекс-метод.

В математичному пакеті R є функція ***solveLP***, що розв'язує задачу лінійного програмування. Вона належить до бібліотеки ***linprog***. Наведемо її опис.

Description

This function will optimize the linear function `c%*%x` subject to the constraints `A%*%x <= b`, and `x >= 0`. Either maximization or minimization is possible, but the default is minimization.

Usage

```
solveLP( cvec, bvec, Amat, maximum = FALSE)
```

Arguments

cvec	vector of length `n` which gives the coefficients of the objective function.
bvec	vector of length `m` giving the right hand side of the <= constraints.
Amat	An `m` by `n` matrix of coefficients for the <= type of constraints.
maximum	A logical flag which specifies minimization if `FALSE` (default) and maximization otherwise.

9.3. Контрольні приклади

Завдання 1. Розв’язати задачу лінійного програмування

$$f(x) = 200x_1 + 6000x_2 + 3000x_3 - 200x_4 \to \max_x$$

при обмеженнях:

$$
\begin{aligned}
&800x_1 + 6000x_2 + 1000x_3 + 400x_4 \le 13800 \\
&50x_1 + 3x_2 + 150x_3 + 100x_4 \ge 600 \\
&10x_1 + 10x_2 + 75x_3 + 100x_4 \ge 300 \\
&150x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 5x_4 \ge 550 \\
&x \ge 0
\end{aligned}
$$

Розв'язання. Задаємо початкові дані задачі та використовуємо функцію ***solveLP*** :

.

```
cf = c(200, 6000, 3000, -200)
A1 = c(800, 6000, 1000, 400)
b1 = 13800
vitx = c(50, 3, 150, 100)
vity = c(10, 10, 75, 100)
vitz = c(150, 35, 75, 5)
A2 = rbind(vitx, vity, vitz)
b2 = c(600, 300, 550)

library(linprog)
A = rbind(A1, -A2)
b = c(b1, -b2)
A
b
res = solveLP(cf, b, A, maximum=TRUE)
res
```

Функція ***solveLP*** надає наступний результат:

```
Iterations in phase 1: 3
Iterations in phase 2: 4
Solution
   opt
1  0.0
2  0.0
3 13.8
4  0.0

Basic Variables
       opt
3     13.8
S 2 1470.0
S 3  735.0
S 4  485.0

Constraints
  actual dir  bvec free dual dual.reg
1  13800  <= 13800    0    3  6466.67
2  -2070  <=  -600 1470    0  1470.00
3  -1035  <=  -300  735    0   735.00
4  -1035  <=  -550  485    0   485.00
```

Отримуємо розв'язок:

$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 13.8; \quad x_4 = 0.$

Як видно, отриманий розв'язок лежить на межі допустимої множини, при цьому активним є 1-ше обмеження. Останні обмеження є пасивними, тобто суттєвого впливу не мають.

Завдання 2. Треба спланувати на добу оптимальний раціон бідного студента с точки зору мінімуму матеріальних затрат, але виконання добових норм споживання білків, жирів, вуглеводів та калорій. Тобто треба визначити кількість пакетиків по 100 грам різних круп (пшеничної, гречаної, манної та рисової), що задовільнять виконання норм споживання. Необхідні дані наведені в таблиці:

	Пакетики, 100 г						
	Крупа пшенична	Крупа гречана	Крупа манна	Крупа рисова		Добова норма, г	
						Min	max
Білки, г	11.5	12.6	10.30	70.00		90	150
Жири, г	3.3	3.3	1.0	1.00		103	158
Вуглеводи, г	67.00	63.00	68.00	72.00		400	500
Калорійність, Ккал	348.00	335.00	328.00	330.00		2600	3000
Ціна за 100 г, грн	0.63	1.76	0.80	1.72			

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 кількість пакетиків пшеничної, гречаної, манної та рисової груп послідовно. Тоді ціна всіх пакетиків буде дорівнювати $0.63x_1 + 1.76x_2 + 0.8x_3 + 1.72x_4$, добова норма споживання білка -- $11.5x_1 + 12.6x_2 + 10.3x_3 + 70x_4$, добова норма споживання жирів -- $3.3x_1 + 3.3x_2 + 1.0x_3 + 1.0x_4$, добова норма споживання вуглеводів -- $67x_1 + 63x_2 + 68x_3 + 72x_4$, добова норма споживання калорій -- $348x_1 + 335x_2 + 328x_3 + 330x_4$. Таким чином, задача мінімізації затрат на покупку їжі, за умов виконання мінімальних норм споживання білків, жирів, вуглеводів та калорій, зводиться до розв'язання задачі лінійного програмування:

$$f(x) = 0.63x_1 + 1.76x_2 + 0.8x_3 + 1.72x_4 \to \min_x$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned}
&11.5x_1 + 12.6x_2 + 10.3x_3 + 70x_4 \geq 90 \\
&3.3x_1 + 3.3x_2 + 1.0x_3 + 1.0x_4 \geq 103 \\
&67x_1 + 63x_2 + 68x_3 + 72x_4 \geq 400 \\
&348x_1 + 335x_2 + 328x_3 + 330x_4 \geq 2600 \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Розв’яжемо цю задачу з використанням функції ***solveLP*** :

```
#Суточна норма
DNmin = c(90., 103., 400., 2600)

#Ціна
cf = c(0.63, 1.76, 0.8, 1.72)

#Вміст білка і т.д. в крупах
vit1 = c(11.5, 12.6, 10.3, 70)
vit2 = c(3.3, 3.3, 1.0, 1.0)
vit3 = c(67.0, 63.0, 68.0, 72.0)
vit4 = c(348., 335., 328., 330.)
A = rbind(vit1, vit2, vit3, vit4)

#Формування обмежень типу Ax <= b
A = -A
b = -DNmin

cf
A
b

library(linprog)
res = solveLP(cf, b, A, maximum=FALSE)
res
```

Функція ***solveLP*** надає наступний результат:

```
Results of Linear Programming / Linear Optimization

Objective function (Minimum): 19.6636

Iterations in phase 1: 4
Iterations in phase 2: 1
Solution
      opt
1 31.2121
2  0.0000
3  0.0000
4  0.0000

Basic Variables
          opt
1     31.2121
S 1  268.9394
S 3 1691.2121
S 4 8261.8182

Constraints
      actual dir  bvec     free     dual dual.reg
1   -358.939  <=   -90  268.939 0.000000  268.939
2   -103.000  <=  -103    0.000 0.190909      Inf
3  -2091.212  <=  -400 1691.212 0.000000 1691.212
4 -10861.818  <= -2600 8261.818 0.000000 8261.818
```

Отримуємо розв’язок:

$x_1 = 31.2121; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0.$

Тобто, оптимальним буде план: їсти тільки крупу пшеничну у кількості 31 пакетик на день. При цьому буде достатньо 19.66 гривен на добу.

9.4. Варіанти індивідуальних завдань

Варіанти 1-5. (Транспортна задача).

З трьох холодильників $A_i, i = \overline{1,3}$, що вміщають морожену рибу в кількостях a_i т, необхідно останню доставити в п'ять магазинів $B_j, j = \overline{1,5}$ рибу в кількості b_j т. Вартості перевезення 1т риби з холодильника A_i в магазин B_j задані у вигляді матриці $C=(c_{ij})$ розмірності 3х5.

Написати математичну модель задачі та спланувати перевезення так, щоб їх загальна вартість була мінімальною. Під плануванням перевезення розуміється визначення x_{ij} - кількість т риби, що перевозиться з холодильника (постачальника) A_i в магазин (споживач) B_j.

Початкові дані по варіантам:

Варіант	a_i	b_j	C			
1	(320; 280; 250)	(150; 140; 110; 230; 220)	$\begin{matrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{matrix}$			
2	(250; 380; 220)	(120; 140; 140; 210; 240)	$\begin{matrix} 21 & 22 & 17 & 16 & 25 \\ 26 & 15 & 17 & 19 & 25 \\ 5 & 10 & 10 & 11 & 7 \end{matrix}$			

3	(420; 210; 220)	(130; 130; 160; 190; 240)	22 23 21 16 24 24 15 17 19 28 7 11 11 9 8			
4	(500; 300; 100)	(150; 350; 200; 100; 100)	3 3 5 3 1 4 3 2 4 5 3 7 5 4 2			
5	(320; 260; 270)	(110; 140; 170; 180; 250)	26 23 21 16 24 22 15 17 19 28 7 11 11 79 8			

Варіанти 6. (Задача оптимального розподілу ресурсів).

Транспортне господарство має можливість придбати не більше 19 тритонних автомашин і не більше 17 п'ятитонних. Відпускна ціна тритонної вантажівки - 400000 грн., п'ятитонної - 500000 грн. Господарство може виділити для придбання автомашин 14100 тисяч грн. Скільки потрібно придбати автомашин, щоб їх сумарна вантажопідйомність була максимальною?

Варіанти 7.

Серед ненегативних чисел ***x*** та ***y***, що задовільняють умовам: $x + y \le 1$; $x - 4y \ge -2$, знайти такі, для яких різниця $x - y)$ приймає найменьше значення. Скласти математичну модель задачі.

Варіанти 8.

Серед ненегативних чисел ***x*** та ***y***, що задовільняють умовам: $-2x-6y \le 6$; $-x+2y \le 6$; $x \le 3$, знайти такі, для яких сума $x+y)$ приймає найбільше значення. Скласти математичну модель задачі.

Варіанти 9. (Задача оптимального розподілу ресурсів)

Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовується токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в табл. 1. У ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Тип обладнання	Витрати часу (верстато-години) на обробку одного виробу кожного виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (години)
	A	*B*	*C*	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Сварочне	7	4	5	240
Шлифовальне	4	6	7	360
Прибуток (грн.)	100	140	120	

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Варіанти 10. (Задача оптимального планування).

Продукцією міського молочного заводу є молоко, кефір і сметана, розфасовані в пляшки. На виробництво 1 т молока, кефіру й сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т молока та кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 годин. Всього для виробництва продукції з незбираного молока завод може використовувати 136000 кг молока. Основне обладнання може бути зайнято протягом 21,4 машино-годин, а автомати по розфасовці сметани - протягом 16,25 годин. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру й сметани відповідно дорівнює 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості слід щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Варіанти 11-15. (Задача оптимального розкрою).

На швейній фабриці тканина може бути розкроєна декількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при *j*-му варианті розкрою $j=\overline{1,n})$ зі 100 м^2 ткани виробляється b_{ij} деталей *i*-го виду $i=\overline{1,m})$, а величина відходів при даному варіанті розкрою дорівнює c_j м^2. Знаючи, що деталей *i*-го виду треба виробляти B_i штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано необхідну кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі. Під оптимальним розкроєм розуміється визначення x_j - сотен м^2 ткани для *j*-го варианту розкрою, що забезпечують мінімальні загальні відходи.

Початкові дані по варіантам:

Варіант	c_j	B_i	b_{ij}			
1	(1.4; 0.1; 2.1;0.1)	(240; 200; 120; 140)	1 4 0 1 1 0 4 0 1 0 0 3 1 1 0 3			
2	(0.2; 0; 0.9;0.7;0.2;0.5;0)	(600; 720; 900)	3 2 2 1 1 0 0 0 1 0 1 0 2 1 0 0 1 1 3 1 3			
3	(0.4; 0.3; 0.1;0;0.1;0.2)	(155; 190; 300)	0 2 1 3 1 0 1 1 0 0 2 0 1 0 1 0 0 2			
4	(1.3; 0.2; 2.1;0.1)	(230; 210; 125; 134)	1 4 0 1 1 0 4 0 1 0 0 3 1 1 0 3			
5	(0.4; 0.3; 0.1;0;0.1;0.2)	(150; 200; 300)	0 2 2 4 1 0 1 1 0 0 2 0 1 0 1 0 0 2			