Лабораторна робота № 8
Чисельні методи розв’язання задач умовної оптимізації

8.1. Мета роботи

Вивчення чисельних методів умовної оптимізації для практичного розв’язання задачі пошуку точки оптимуму функції декількох змінних з обмеженнями на змінні, придбання навичок використання цих методів для розв’язання задачі умовної оптимізації із застосуванням ЕОМ.

8.2. Методичні вказівки по організації самостійної роботи

По темі лабораторної роботи студент повинен: *знати* загальне формулювання задачі умовної оптимізації; *уміти* розв’язувати цю задачу з використанням чисельних методів умовної оптимізації [5].

Розглянемо нелінійну неперервну функцію $f(x)$ декількох змінних $x \in R^n$. Задача умовної оптимізації полягає в знаходженні точки $x^* \in X$, в якій функція $f(x)$ приймає мінімальне значення на деякій множині $X \subset R^n$. Коротко задача умовної оптимізації записується у вигляді:

$$f(x) \to \min,\ x \in X \qquad (12.1)$$

Якщо множину X можна записати у вигляді:

$$X = \{ x : g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, m1},\ h_i(x) \le 0,\ i = \overline{m1+1, m} \}, \qquad (12.2)$$

де $g_i(x)$, $h_i(x)$ – задані неперервні функції від x, то задача (12.1) називається **задачею нелінійного програмування**.

Розглянемо кілька чисельних методів розв’язання задачі (12.1) – (12.2).

<u>**Метод штрафних функцій (квадратичний штраф)**</u>. У методі вводиться штрафна функція:

$$\Phi(x,c) = f(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{m1} g_i^2(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=m1+1}^{m} [\max\{0, h_i(x)\}]^2,$$

де $c > 0$ – штрафний множник. При пошуку розв’язку задачі (12.1) – (12.2) методом штрафних функцій задаються початкове наближення розв’язку $x^0 \in R^n$, послідовність $\{c_k\}$, $k = 0,1,...,c_k \to \infty$ при $k \to \infty$, і бажана точність $\varepsilon > 0$ розв’язку задачі. На k-му кроці методу маємо поточне наближення розв’язку $x^k \in R^n$ й $c_k > 0$. Наступне наближення розв’язку $x^{k+1} \in R^n$ визначається як точка безумовного мінімуму функції $\Phi(x,c_k)$ по x.

Обчислення триває доти, поки $\left|\Phi(x^k,c_k) - f(x^k)\right| > \varepsilon$.

Достоїнством методу штрафних функцій є його висока швидкість збіжності для великого класу задач (12.1) – (12.2).

Недоліком методу штрафних функцій є необхідність постійного збільшення на кожній ітерації значення штрафного множника c_k, а це призводить до того, що функція $\Phi(x,c_k)$ стає погано обумовленою («яружною») і тому пошук її точки мінімуму сильно утрудняється.

<u>Метод модифікованої функції Лагранжа</u>. У методі вводиться модифікована функція Лагранжа:

$$M(x,y,c) = f(x) + \sum_{i=1}^{m1} y_i g_i(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{m1} g_i^2(x) + \frac{1}{2c}\left[\sum_{i=m1+1}^{m} (\max\{0, y_i + c h_i(x)\})^2 - \sum_{i=m1+1}^{m} y_i^2\right],$$

де $y \in R^m$ – множники Лагранжа, $c > 0$ – штрафний множник. При пошуку розв’язку задачі (12.1) – (12.2) методом модифікованої функції Лагранжа задаються початкове наближення $y^0 \in R^m$, початкове значення $c_0 > 0$, і бажана точність $\varepsilon > 0$ розв’язку задачі. На k-му кроці методу маємо поточне наближення $y^k \in R^m$ й $c_k > 0$, а також поточне наближення розв’язку $x^k \in R^n$. Наступне наближення розв’язку $x^{k+1} \in R^n$ визначається як точка безумовного мінімуму функції $M(x,y^k,c_k)$ по x, наступне наближення $y^{k+1} \in R^m$ перераховується за формулою:

$$y_i^{k+1} = y_i^k + c_k g_i(x^{k+1}),\ i = \overline{1,m1};$$

$$y_i^{k+1} = \max(0,\ y_i^k + c_k g_i(x^{k+1}))\quad,\ i = \overline{m1+1, m}.$$

Значення крокового множника c_{k+1} визначається залежно від ходу процесу: якщо пошук точки мінімуму функції $M(x, y^k, c_k)$ по x виявився утрудненим (тобто функція $M(x, y^k, c_k)$ стала «яружною» по x), то значення c_{k+1} береться меншим відносно c_k (наприклад, $c_{k+1} = \frac{2}{3} c_k$); якщо ж проблем не було, то значення c_{k+1} збільшується відносно c_k (наприклад, $c_{k+1} = 2c_k$).

Обчислення триває доти, поки $\left| M(x^k, y^k, c_k) - f(x^k) \right| > \varepsilon$.

Достоїнством методу модифікованої функції Лагранжа є його висока швидкість збіжності для великого класу задач (12.1) – (12.2).

8.3. Контрольний приклад

Завдання. Розв'язати задачу нелінійного програмування

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 16x_1 - 10x_2 \to \min_x$$

при обмеженнях:

$$x_1^2 - 6x_1 + 4x_2 - 11 \le 0$$
$$3x_2 - x_1 x_2 + e^{x_1 - 3} - 1 \le 0$$
$$0 \le x_1 \le 6,$$
$$0 \le x_2 \le 5$$

методом штрафних функцій з квадратичним штрафом з точністю 10^{-4}. Початкове наближення $x^0 = (10, 10)^T$.

Розв'язання. Вказана задача може бути записана в вигляді (12.1) – (12.2). при цьому $m1 = 0$, $m = 6$ оскільки подвійні нерівності мають бути записані парою одинарних. Визначимо цільову функцію та векторну функцію обмежень, що відповідають даній задачі нелінійного програмування:

.

```
FunC = function(x)
{
      return(x[1]^2 + x[2]^2 - 16*x[1] - 10*x[2])
}

Gcon = function(x)
{
      z = c(1:6)
      z[1] = x[1]^2 - 6*x[1] + 4*x[2] - 11
      z[2] = 3*x[2] - x[1]*x[2] + exp(x[1] - 3) - 1
      z[3] = x[1] - 6
      z[4] = -x[1]
      z[5] = x[2] - 5
      z[6] = -x[2]
      return(z)
}

m1 = 0
m = 6
```

Далі визначимо необхідну штрафну функцію для реалізації метода штрафних функцій.

```
FunSfine = function(x, parFun)
{
      c = parFun$c
      g = Gcon(x)
      S = 0
      if (m1 > 0)
      {
            for (i in 1:m1)
            {
                  t = g[i]
                  S = S + t*t
            }
      }
      if ((m-m1) > 0)
      {
            for (i in m1+1:m)
            {
                  t = max(0, g[i])
                  S = S + t*t
            }
      }
      return(FunC(x) + c*0.5*S)
}
```

Тоді метод штрафних функцій можна реалізувати в вигляді:

```
MetodFineFun = function(x0, eps, kmax)
{
       xk = x0
       ck = 10
       fck = FunC(xk)
       parC = list(c=ck)
       Fik = FunSfine(xk, parC)
       k = 0
       while ((abs(Fik - fck) > eps) && (k < kmax))
       {
print("k")
print(k)
              parC = list(c=ck)    #передаємо штрафний множник C через список
              res = optim(fn=FunSfine, par=xk, parFun=parC)
print(res$par)
              xk = res$par
              ck = ck*2
              fck = FunC(xk)
              parC = list(c=ck)
              Fik = FunSfine(xk, parC)
print(ck)
print(fck)
print(Fik)
              k = k + 1
       }
       return(list(x=xk, k=k))
}
```

Розв'яжемо задачу умовної оптимізації за допомогою цієї процедури:

```
x0 = c(10, 10)
FunC(x0)
Gcon(x0)

eps = 0.0001
kmax = 50
ans = MetodFineFun(x0, eps, kmax)
ans
```

Для аналізу отриманого розв'язку обчислимо значення цільової функції та функцій обмежень:

```
> x1 = ans$x
> FunC(x1)
[1] -79.80719
> Gcon(x1)
[1]  4.485072e-05 -1.999219e-03 -7.606331e-01 -5.239367e+00 -1.253680e+00
[6] -3.746320e+00
```

Як видно, отриманий розв'язок лежить на межі допустимої множини, при цьому активними є 1-ше й 2-ге обмеження (значення функцій $h_1(x)$ і $h_2(x)$ в точці мінімуму близькі до нуля). Останні обмеження є пасивними, тобто суттєвого впливу не мають.

8.4. Варіанти завдань

Знайти точку мінімуму цільової функції з обмеженнями 2-ма методами: методом штрафних функцій та методом модифікованої функції Лагранжа.

Порівняти швидкість збіжності методів.

Варіант	Цільова функція, $f(x)$	Обмеження	Початковий вектор, x_0	$f(x_0)$	Точка мінімуму, x^*	Значення, $f(x^*)$
1	$-x_1^2 - x_2^2$	$(x_1-1)^2 + x_2^2 \le 1,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$[1;1]$	-2	$[2;0]$	-4
2	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$2x_1 + x_2 - 5 \le 0,$ $x_1 + x_3 - 2 \le 0,$ $-x_1 + 1 \le 0,$ $-x_2 + 2 \le 0,$ $-x_3 \le 0$	$[1.5;2;0.5]$	6.5	$[1;2;0]$	5
3	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$	$-x_1 + 2x_2 \le 2,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$[0.5;0.5]$	-3.5	$\left[\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right]$	4.16
4	$2x_1^2 + 2x_2^2 + +3x_3^2 + 2x_1x_2 +$ $+ 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3$	$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1,$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6,$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	$[1;1;1]$	4	$[0;0.4;0.7]$	-2.35
5	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$2x_1 - x_2 + x_3 \le 5,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 3$	$[0.1;0.9;2]$	4.82	$[1;1;1]$	3
6	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	$8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40,$ $2x_1 + x_2 - x_3 = -3,$ $x_2 \ge 0$	$[1;1;2]$	2	$[-2;0;7]$	-17
7	$\exp(x_1 - x_2) - x_1 - x_2$	$x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$[0;0]$	1	$[0;1]$	-0.6

8	$3x_2^2-11x_1-3x_2-x_3$	$x_1-7x_2+3x_3+7\le 0,$ $5x_1+2x_2-x_3\le 2,$ $x_3\ge 0$	$[0;2;0]$	6	$[0;1;0]$	0
9	$x_1^2+x_2^2-4x_1-2x_2$	$2x_1+x_2\le 4,$ $x_1+2x_2\le 6,$ $x_1,x_2\ge 0$	$[1;1]$	-4	$[1.6;0.8]$	4.8
10	$0.5x_2^2+0.5x_1^2-x_1-2x_2+5$	$2x_1+3x_2\le 6,$ $x_1+4x_2\le 5,$ $x_1,x_2\ge 0$	$[0;0]$	5	$\left[\frac{13}{17};\frac{18}{17}\right]$	$\frac{101}{34}$
11	$-2x_1+0.2x_1^2-3x_2+0.2x_2^2$	$2x_1+3x_2\le 13,$ $2x_1+x_2\le 10,$ $x_1,x_2\ge 0$	$[1;1]$	-4.6	$[2;3]$	-10.4
12	$0.5x_1^2+0.5x_2^2-x_1-2x_2+8$	$2x_1+3x_2\le 6,$ $x_1+4x_2\le 5,$ $x_1,x_2\ge 0$	$[1.5;0.5]$	3.75	$[0.7647;1.0588]$	2.9705
13	$\ln x_1-x_2$	$x_1-1\ge 0,$ $x_1^2+x_2^2-4=0$	$[2;0]$	0.69	$[1;\sqrt{3}]$	$-\sqrt{3}$
14	$x_1^2+x_2^2-2.4x_1-5.6x_2$	$-2x_1-3x_2-3\le 0,$ $x_1+x_2-3\le 0,$ $2x_1-x_2-4\le 0,$ $x_1,x_2\ge 0$	$[0;1]$	-4.6	$[1.2;1.8]$	-7.88

15	$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$	$x_1-2x_2+1=0,$ $-0.25x_1^2-x_2^2+1\geq 0$	$[2;2]$	1	$[0.823;0.911]$	1.393