14. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розглянемо нелінійну неперервну функцію $f(x)$ декількох змінних $x \in R^n$. Задача умовної оптимізації полягає в знаходженні точки $x^* \in X$, у якій функція $f(x)$ приймає мінімальне значення на деякій множині $X \subset R^n$. Стисло задача умовної оптимізації записується у вигляді

$$f(x) \to \min_{x \in X}. \qquad (14.1)$$

Якщо множину X можна записати у вигляді

$$X = \{ x \in R^n : g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, m_1},\ \ h_i(x) \le 0,\ i = \overline{m_1 + 1, m} \} \qquad (14.2)$$

де $g_i(x)$, $h_i(x)$ – задані неперервні функції від x, то задача (14.1) – (14.2) називається **задачею нелінійного програмування**.

Розглянемо декілька чисельних методів розв'язання задачі (14.1) – (14.2).

14.1. Метод штрафних функцій

Ідея методу штрафних функцій полягає у введенні так званого штрафу за порушення обмежень (14.2).

До методу штрафних функцій зазвичай відносять цілу групу методів, заснованих на введенні функцій штрафу, що залежать від штрафного параметра і мають наступні властивості:

1. На більшій частині допустимої множини X задачі (14.1) – (14.2) ці функції близькі до нуля.

2. Кожна з них достатньо швидко зростає або при наближенні зсередини до межі множини X (внутрішні або бар'єрні штрафні функції), або при виході за його межі і віддаленні від нього (зовнішні штрафні функції).

3. Міра близькості штрафу до нуля і швидкість його зростання залежать від значення штрафного параметра та збільшуються з його зростанням.

Функція штрафу додається до цільової функції, після чого розв'язується параметричне сімейство отриманих задач без функціональних обмежень, тобто сімейство задач безумовної оптимізації. В рамках відповідних припущень послідовність цих задач при необмеженому зростанні штрафного параметра збігається до розв'язку початкової задачі.

Наведемо приклади штрафних функцій для випадку, коли обмеження-рівності $g_i(x)$ в (14.2) відсутні, тобто $m_1 = 0$:

1) степенева штрафна функція (зовнішня):

$$\phi_1(x,c) = c\sum_{i=1}^{m}\left[\max\{0, h_i(x)\}\right]^q, \; q > 0;$$

2) зовнішня штрафна функція:

$$\phi_2(x,c) = \begin{cases} 0, & h_i(x) \le 0, \forall\, i = \overline{1,m} \\ c \times exp(-\dfrac{1}{\max\limits_{i=\overline{1,m}} h_i(x)}) & , \; \exists\, h_{i^*}(x) > 0; \end{cases}$$

3) експоненціальна штрафна функція (зовнішня):

$$\phi_3(x,c) = \sum_{i=1}^{m} \exp(c \times h_i(x));$$

4) внутрішня штрафна функція:

$$\phi_4(x,c) = \begin{cases} -\dfrac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{m} h_i^{-1}(x), & h_i(x) \le 0, \forall\, i = \overline{1,m} \\ \infty, & \exists\, h_{i^*}(x) > 0 \end{cases};$$

5) логарифмічна штрафна функція (внутрішня):

$$\phi_5(x,c) = \begin{cases} -\dfrac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{m} ln(-h_i(x)), & h_i(x) \le 0, \forall\, i = \overline{1,m} \\ \infty, & \exists\, h_{i^*}(x) > 0 \end{cases}.$$

Розглянемо для простоти метод штрафних функцій для розв'язання задачі (14.1) – (14.2) для випадку квадратичного штрафу, тобто з використанням степеневої штрафної функції 1) з $q = 2$.

У методі вводиться **штрафна функція** [13; 28]

$$\Phi(x,c) = f(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{m_1} g_i^2(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=m_1+1}^{m} [max\{0, h_i(x)\}]^2 ,$$

де $c > 0$ – штрафний параметр (**штрафний множник**). Зазначимо, що $S(x,c) \equiv \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{m_1} g_i^2(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=m_1+1}^{m} [\max\{0, h_i(x)\}]^2$ є по суті штрафом за порушення в точці $x \notin X$ обмежень (14.2).

При пошуку розв'язку задачі (14.1) – (14.2) методом штрафних функцій задаються:

початкове наближення розв'язку $x^0 \in R^n$;

послідовність $\{c_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $c_k \to \infty$ при $k \to \infty$;

бажана точність $\varepsilon > 0$ розв'язку задачі.

На k-й ітерації методу маємо поточне наближення розв'язку $x^k \in R^n$ і $c_k > 0$. Наступне наближення розв'язку $x^{k+1} \in R^n$ визначається як точка безумовного мінімуму функції $\Phi(x, c_k)$ по x.

Обчислення продовжуються до тих пір, поки не виконається умова $\left|\Phi(x^k, c_k) - f(x^k)\right| \le \varepsilon$.

Графічна інтерпретація методу штрафних функцій із зовнішнім штрафом наведена на рис. 13.1.

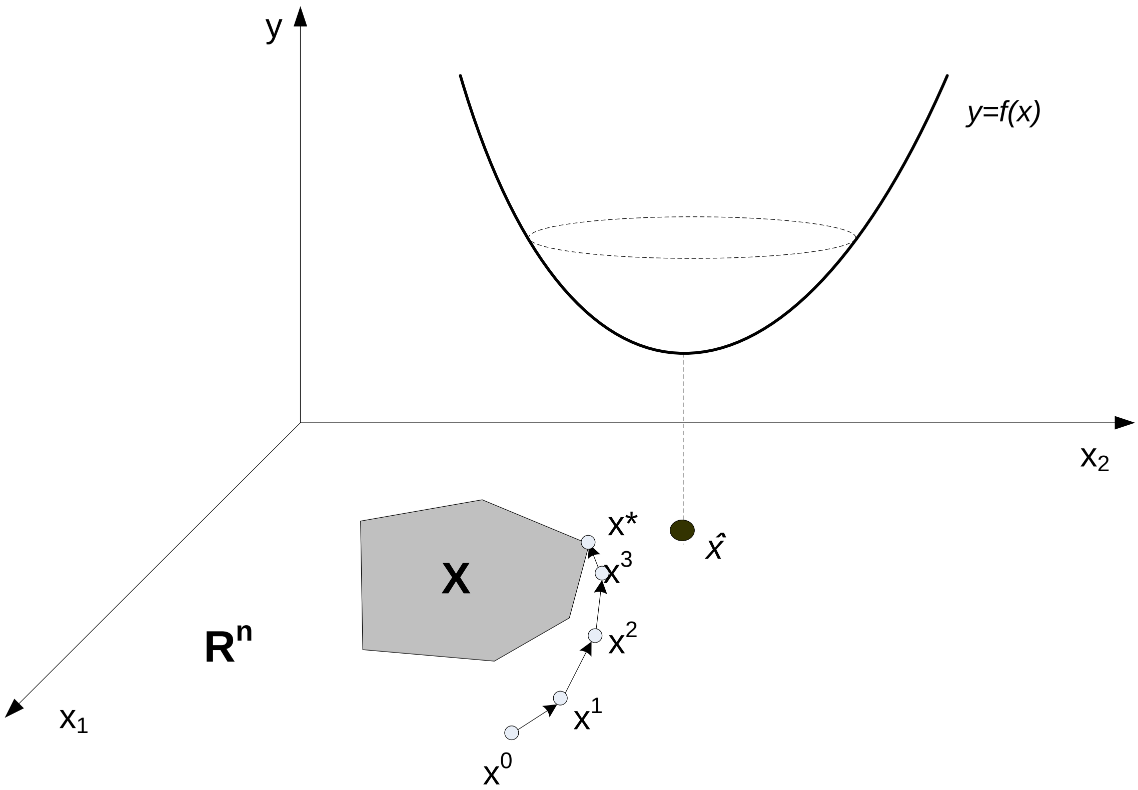

Рис. 14.1. **Графічна інтерпретація методу штрафних функцій із зовнішнім штрафом: $\hat{x}$ – точка безумовного мінімуму функції $f(x)$, x^* – розв'язок задачі**

Достоїнством методу штрафних функцій є його висока швидкість збіжності для широкого класу задач (14.1) – (14.2).

Недоліком методу штрафних функцій є необхідність постійного збільшення на кожній ітерації значення штрафного множника c_k, а це приводить до того, що функція $\Phi(x,c_k)$ стає погано обумовленою ("яружною") і тому пошук її точки безумовного мінімуму сильно утруднюється.

14.2. Метод модифікованої функції Лагранжа

Для спрощення викладення розглянемо спочатку метод модифікованої функції Лагранжа для випадку, коли обмеження-нерівності $h_i(x)$ в (14.2) відсутні, тобто $m_1 = m$. У методі вводиться модифікована функція Лагранжа [13; 16; 28]

$$M(x,y,c) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x), \qquad (14.3)$$

де $y \in R^m$ – множники Лагранжа; $c > 0$ – штрафний множник. Як видно, функція $M(x, y, c)$ отримується з функції Лагранжа шляхом додавання функції штрафу у квадратичному вигляді.

Суть методу модифікованої функції Лагранжа полягає в тому, що розв'язання задачі нелінійного програмування (14.1) – (14.2) зводиться до пошуку сідлової точки функції $M(x, y, c)$.

При пошуку розв'язку задачі (14.1) – (14.2) методом модифікованої функції Лагранжа задаються:

початкове наближення $y^0 \in R^m$;

початкове значення $c_0 > 0$;

бажана точність $\varepsilon > 0$ розв'язку задачі.

На k-й ітерації методу маємо поточне наближення $y^k \in R^m$ і $c_k > 0$, а також поточне наближення розв'язку $x^k \in R^n$. Наступне наближення розв'язку $x^{k+1} \in R^n$ визначається як точка безумовного мінімуму функції $M(x, y^k, c_k)$ по x, наступне наближення $y^{k+1} \in R^m$ перераховується за формулою

$$y_i^{k+1} = y_i^k + c_k g_i(x^{k+1}),\ i = \overline{1, m}. \qquad (14.4)$$

Значення крокового множника c_{k+1} визначається залежно від ходу процесу: якщо пошук точки мінімуму функції $M(x, y^k, c_k)$ по x виявився утрудненим (тобто функція $M(x, y^k, c_k)$ стала "яружною" по x), то значення c_{k+1} береться меншим відносно c_k (наприклад, $c_{k+1} = \frac{2}{3} c_k$); якщо ж проблем не було, то значення c_{k+1} збільшується відносно c_k (наприклад, $c_{k+1} = 2c_k$).

Обчислення продовжується поки не виконається умова $\left| M(x^k, y^k, c_k) - f(x^k) \right| \le \varepsilon$.

Розглянемо тепер метод модифікованої функції Лагранжа для загального випадку обмежень, коли обмеження-нерівності $h_i(x)$ в (14.2) присутні, тобто $m_1 < m$. Тоді модифікована функція Лагранжа на відміну від (14.3) записується у вигляді

$$M(x,y,c) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} y_i g_i(x) + \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{m_1} g_i^2(x) +$$
$$+\frac{1}{2c}\sum_{i=m_1+1}^{m}\left[max\{0, y_i + c \times g_i(x)\}\right]^2 - \frac{1}{2c}\sum_{i=m_1+1}^{m} y_i^2 .$$

Алгоритм методу модифікованої функції Лагранжа при цьому аналогічний алгоритму, описаному вище. Відмінність тільки в тому, що наступне наближення $y^{k+1} \in R^m$ перераховується за формулами:

$$y_i^{k+1} = y_i^k + c_k g_i(x^{k+1}),\ i = \overline{1, m_1};$$

$$y_i^{k+1} = max\{0, y_i^k + c_k g_i(x^{k+1})\},\ i = \overline{m_1 + 1, m}.$$

Достоїнством методу модифікованої функції Лагранжа є його висока швидкість збіжності для широкого класу задач (14.1) – (14.2) [13; 16; 28].

14.3. Висновки

1. Задача пошуку точки безумовного мінімуму функції декілька змінних є допоміжною при розв'язанні задач математичного програмування.
2. Одним із найефективніших методів розв'язання задач нелінійного програмування є метод модифікованої функції Лагранжа.

14.4. Контрольні запитання та завдання

1. Що називається штрафною функцією в задачі умовної оптимізації?
2. Наведіть загальну схему методів штрафних функцій.
3. Наведіть приклади штрафних функцій.
4. У чому полягає метод штрафних функцій з квадратичним штрафом для розв'язання задачі нелінійного програмування? Вкажіть його достоїнства та недоліки.
5. У чому полягає метод модифікованої функції Лагранжа з квадратичним штрафом для розв'язання задачі нелінійного програмування? Вкажіть його достоїнства та недоліки.

6. Розв’яжіть задачу нелінійного програмування $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to min$ при обмеженнях $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$.

Початкове наближення $x^0 = (1 \quad 1 \quad 1)$.

7. Розв'яжіть методом штрафних функцій з квадратичним штрафом задачу $x_1^2 + x_2^2 \to \min$ при обмеженні $x_1 + 1 \le 0$.