12. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

12.1. Постановка задачі пошуку екстремуму функцій однієї змінної

Задача пошуку точки екстремуму функції однієї змінної інколи має і самостійне значення та найчастіше є допоміжною при розв'язанні складніших задач математичного програмування.

Розглянемо нелінійну неперервну функцію $f(x)$ однієї змінної $x \in R^1$. Задача **одновимірної оптимізації** полягає в знаходженні точки $x^* \in R^1$, у якій функція $f(x)$ приймає мінімальне значення. У загальному випадку функція $f(x)$ може мати декілька точок мінімуму. Чисельні методи розв’язання задачі одновимірної оптимізації, що розглядаються нижче, дозволяють знаходити одну точку мінімуму на заданому відрізку $[a,b]$. При цьому на відрізку $[a,b]$ повинна існувати тільки одна точка мінімуму.

***Визначення*.** Якщо функція $f(x)$ має єдину точку мінімуму x^* на відрізку $[a,b]$, причому зліва від x^* функція $f(x)$ є убуваючою, а справа – зростаючою, то її називають **унімодальною** на $[a,b]$.

Розглянемо декілька чисельних методів пошуку точки мінімуму унімодальної функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$.

12.2. Метод дихотомії

Метод дихотомії також називають **методом половинного поділу**. При пошуку точки мінімуму функції $f(x)$ методом половинного поділу задаються:

відрізок $[a,b]$, на якому існує тільки одна точка мінімуму;

бажана точність $\varepsilon > 0$ розв'язку задачі;

параметр методу δ, $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

На 0-му кроці методу позначимо $[a_0,b_0] = [a,b]$, а на k-му ($k = 0,1,2,\ldots$) кроці методу маємо поточний відрізок $[a_k,b_k]$. Далі визначаються дві точки $x_{k1} = \frac{a_k + b_k}{2} - \delta$ і $x_{k2} = \frac{a_k + b_k}{2} + \delta$ (відступають в обидві сторони від середини відрізка $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ на величину δ) і перевіряється умова

$$f(x_{k1}) < f(x_{k2}). \qquad (12.1)$$

Якщо умова (12.1) виконується, то наступний відрізок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ визначається, як $b_{k+1} = x_{k2}$, $a_{k+1} = a_k$. Якщо умова (12.1) не виконується, то $a_{k+1} = x_{k1}$, $b_{k+1} = b_k$.

Поділ відрізку $[a_k, b_k]$ навпіл триває до тих пір, поки не виконається умова $|b_k - a_k| \le \varepsilon$. Очевидно, що тоді точка $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ відрізнятиметься від точного розв'язку $x^* \in [a, b]$ не більше, ніж на $\frac{\varepsilon}{2}$.

Графічна інтерпретація методу половинного поділу наведена на рис. 10.1.

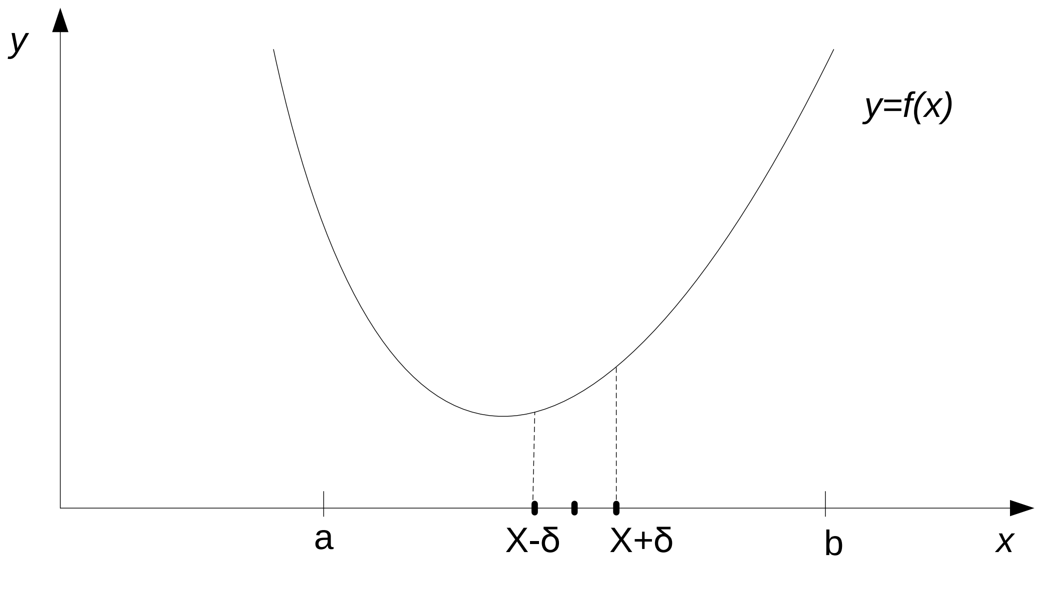

Рис. 12.1. **Метод половинного поділу**

Справедлива така **оцінка швидкості збіжності** [1; 28]:

$$\left| x_k - x^* \right| \le \left| b_k - a_k \right| \le \frac{\left| b-a \right|}{2^k} + \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) 2\delta,$$

тобто метод половинного поділу при малих δ збігається приблизно з геометричною (лінійною) швидкістю з коефіцієнтом $q = \frac{1}{2}$. Слід зазначити, що оскільки обчислення значень функції $f(x)$ на ЕОМ виконуються з погрішністю, то параметр δ не можна брати дуже малим. Наприклад, можна узяти $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Зазначимо, що метод половинного поділу є методом 0-го порядку, оскільки не використовує обчислення похідних функції $f(x)$.

Недоліком методу половинного поділу є те, що на кожній ітерації методу значення цільової функції $f(x)$ потрібно обчислювати у двох точках x_{k1}, x_{k2}, а це може виявитися істотним, коли кожне обчислення значення функції $f(x)$ вимагає суттєвих обчислювальних витрат. Цей недолік усувається в методі золотого перерізу.

12.3. Метод золотого перерізу

Метод золотого перерізу заснований на **золотому перерізі відрізка.** Суть цього перерізу полягає в тому, що відрізок $[a,b]$ розбивається на три нерівні частини (рис. 10.2, c, d – точки розбиття відрізка) так, щоб виконувалися співвідношення

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{c-a}{d-a} = \frac{b-d}{b-c} = \frac{b-c}{b-a}.$$

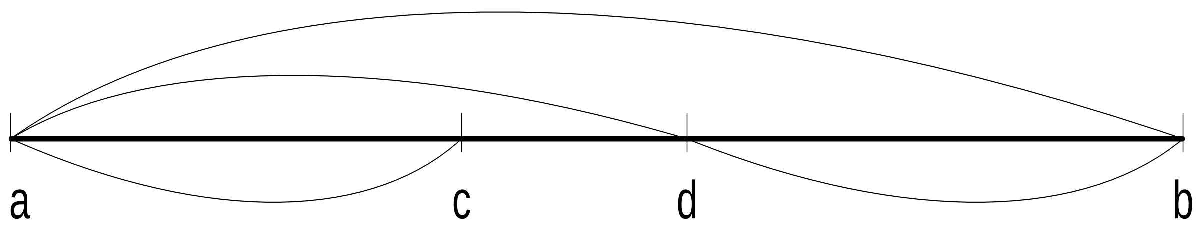

Рис. 12.2. **Золотий переріз**

З цих співвідношень виходить, що $d-a = b-c$ і $c-a = b-d$, тобто точки розбиття c, d знаходяться на однаковій відстані від країв відрізка. Якщо ввести позначення $\lambda = \dfrac{d-a}{b-a}$ (при цьому $0 < \lambda < 1$), то повинна виконуватися рівність $\dfrac{\lambda}{1} = \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, тобто λ задовольняє рівнянню $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. Звідки знаходимо, що $\lambda = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

При пошуку точки мінімуму функції $f(x)$ методом золотого перерізу задаються відрізок $[a,b]$, на якому існує тільки одна точка мінімуму, і бажана точність $\varepsilon > 0$ розв'язку задачі.

На 0-му кроці методу позначимо $[a_0,b_0] = [a,b]$, а на k-му ($k = 0,1,2,\ldots$) кроці методу маємо поточний відрізок $[a_k,b_k]$. Далі на першій ітерації визначаються дві точки $x_{k1} = a_k + (1-\lambda)(b_k - a_k)$ і $x_{k2} = a_k + \lambda(b_k - a_k)$, де $\lambda = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, і перевіряється умова (12.1). Якщо умова (12.1) виконується, то $b_{k+1} = x_{k2}$, $a_{k+1} = a_k$, $x_{k2} = x_{k1}$, $x_{k1} = a_{k+1} + (1-\lambda)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Якщо умова не виконується, то $a_{k+1} = x_{k1}$, $b_{k+1} = b_k$, $x_{k1} = x_{k2}$, $x_{k2} = a_{k+1} + \lambda(b_{k+1} - a_{k+1})$. Таким чином, на всіх подальших ітераціях (починаючи з другої) значення функції $f(x)$ додатково обчислюється тільки в одній новій точці x_{k1} або x_{k2}, інша ж точка x_{k2} або x_{k1} (а значить і значення функції в ній) просто перевизначається.

Золотий переріз відрізка триває до тих пір, поки не виконається умова $|b_k - a_k| \le \varepsilon$. Якщо процес обчислень закінчився, то отриманим наближенням природно узяти $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Графічна інтерпретація методу золотого перерізу подана на рис. 10.3.

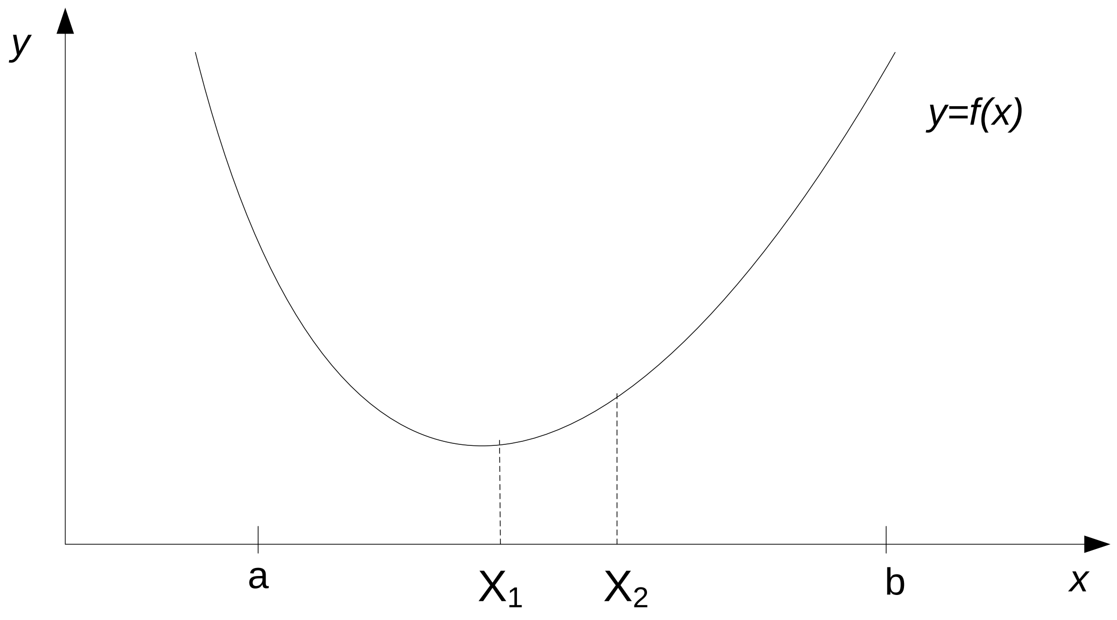

Рис. 12.3. **Метод золотого перерізу**

Справедлива така **оцінка швидкості збіжності** [1; 28]:

$$\left|x_k - x^*\right| \le \left|b_k - a_k\right| \le \lambda^k (b - a),$$

тобто метод золотого перерізу сходиться з геометричною швидкістю з коефіцієнтом $q = \lambda \approx 0.62$.

Зазначимо, що хоча метод золотого перерізу має в порівнянні з методом половинного поділу теоретично дещо меншу швидкість збіжності ($q = \lambda \approx 0.62 > \frac{1}{2}$), та, за рахунок меншої кількості обчислень значень функції $f(x)$, він виявляється ефективнішим при розв'язанні практичних задач. Метод золотого перерізу є методом 0-го порядку.

12.4. Висновки

Метод золотого перерізу є одним з найбільш ефективних методів пошуку екстремуму функцій однієї змінної.

12.5. Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постановку задачі знаходження екстремуму функцій однієї змінної.

2. Яким умовам повинен задовольняти відрізок, на якому ведеться пошук екстремуму? Як його можна знайти?

3. У чому полягає метод золотого перерізу для знаходження екстремуму функцій однієї змінної? Вкажіть основні характеристики цього методу.

4. У чому полягає метод дихотомії для знаходження екстремуму функцій однієї змінної? Вкажіть основні характеристики цього методу. Яку ще назву має цей метод?

5. Який з методів дихотомії чи золотого перерізу є більш ефективнішим при розв'язанні практичних задач?

6. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=(x^2-exp(-x^2))^2$ методом: половинного ділення з точністю 10^{-4}. Відрізок $[a,b]$, що містить точку мінімуму знайдіть самостійно.