7. Чисельне інтегрування функцій

7.1. Постановка задачі

Задача чисельного інтегрування полягає в обчисленні визначеного інтеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (7.1)$$

у випадках, коли аналітичне обчислення неможливе або дуже складне.

Методи чисельного обчислення інтеграла засновані на тому, що в якості наближеного значення інтеграла (7.1) береться значення інтеграла від інтерполюючої для $f(x)$ функції, побудованої по точках розбиття відрізка $[a,b]$.

Слід навести найбільш відомі та достатньо ефективні методи розв'язання задачі чисельного інтегрування функцій: метод трапецій і метод Сімпсона.

7.2. Формула трапецій

Відрізок $[a,b]$ розбивається на n частин з кроком $h = \frac{b-a}{n}$, при цьому точки розбиття x_i визначаються за формулою $x_i = a + i \times h$, $i = \overline{0,n}$, тобто $x_0 = a$, $x_n = b$.

Метод трапецій заснований на кусочно-лінійній інтерполяції функції $f(x)$, побудованій по точках $M_i = (x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0,n}$ (рис. 7.1).

Оскільки площа S_i рапеції $x_i M_i M_{i+1} x_{i+1}$ на інтервалі (x_i, x_{i+1}) дорівнює

$$S_i = h\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

то, додаючи площі всіх прямолінійних трапецій, і отримуємо **формулу трапецій**

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = h\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]. \qquad (7.2)$$

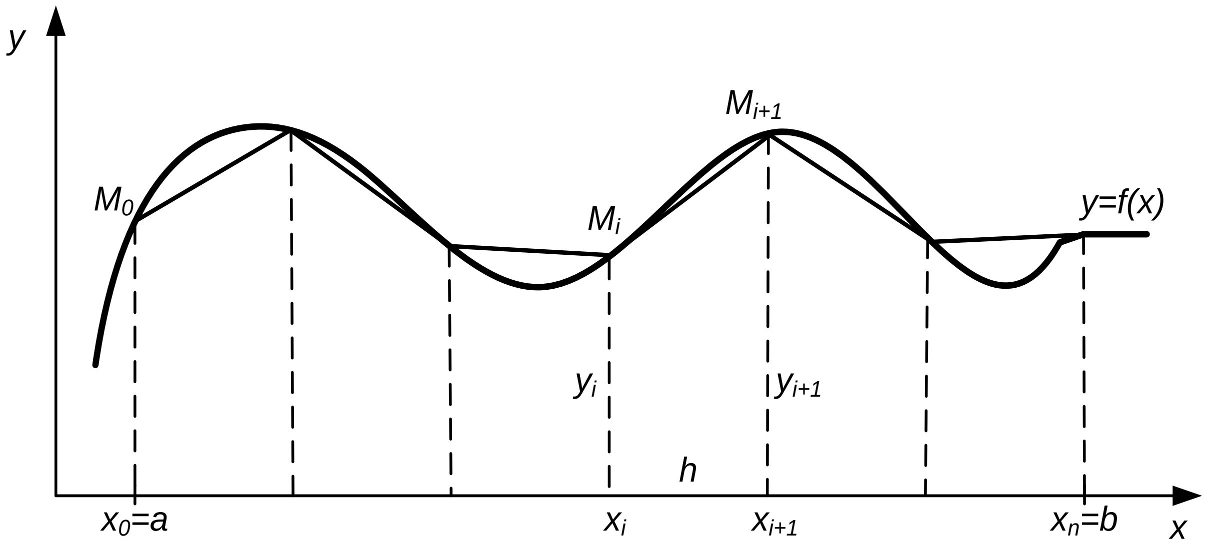

Рис. 7.1. **Графічна інтерпретація методу трапецій**

Оцінка погрішності формули трапецій [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

$$\left|S_n - I\right| \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \tag{7.3}$$

де $M_2 = \max\limits_{\xi \in (a,b)} \left|f''(\xi)\right|$.

Варто зазначити, що число розбиття n відрізка $[a,b]$ є параметром формули трапецій (7.2), тобто чим більше n, тим менше h, а значить, менше погрішність.

З оцінки (7.3) виходить, що якщо функція $f(x)$ лінійна, то формула (7.2) для обчислення інтеграла (7.1) є теоретично точною.

Приклад 7.1. Обчислити значення визначеного інтеграла $\int_3^{15} \left(5x - \frac{4}{(2x-4)^3}\right) dx$ за формулою трапецій для числа розбиття інтервалу інтегрування $n = 50$.

Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є підінтегральна функція $F(x)$, межі інтегрування a і b, число розбиття n інтервалу $[a,b]$:

```
F = function(x)
{
  return (5*x-4/((2*x-4)^3))
}
a = 3
b = 15
n = 50
```

Процедуру обчислення визначеного інтеграла за формулою трапецій можна записати так:

```
trapec = function(f, a, b, n)
{
     h = (b-a)/n
     s = (f(a)+f(b))/2
     x = c(1:(n+1))
     for (i in 2:n)
     {
          x[i] = a + (i-1)*h
          s = s + f(x[i])
     }
     return (s*h)
}
```

Результат обчислення заданого визначеного інтеграла з використанням записаної процедури:

```
> S = trapec(F, a, b, n) # виклик функції користувача
> S
[1] 539.7444
```

7.3. Формула Сімпсона

Відрізок $[a,b]$ розбивається на n частин з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$, при цьому точки розбиття x_i визначаються за формулою $x_i = a + i \times h$, $i = \overline{0,n}$, тобто $x_0 = a$, $x_n = b$.

Метод Сімпсона заснований на кусочно-квадратичній інтерполяції функції $f(x)$, побудованій по точках $(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0,n}$ (рис. 7.2).

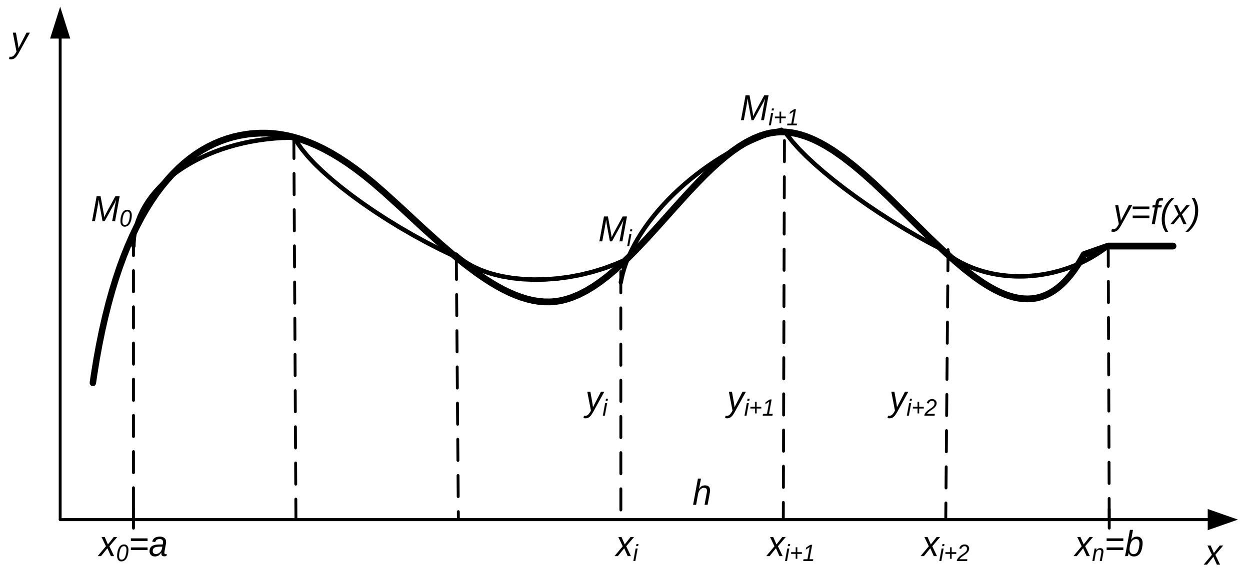

Рис. 7.2. **Графічна інтерпретація методу Сімпсона**

Оскільки на кожному інтервалі (x_i, x_{i+1}) функція $f(x)$ інтерполюється параболою (тобто функцією виду $g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$), то площу S_i криволінійної трапеції $x_i M_i M_{i+1} x_{i+1}$ нескладно обчислити аналітично

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) dx .$$

Тоді наближене значення інтеграла (7.1) буде дорівнювати

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_i .$$

Формула Сімпсона в загальному випадку має вигляд [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_n) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})\big) +$$
$$+ 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\big)]$$

або коротше

$$S_n = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1}) \right]. \qquad (7.4)$$

Як видно з формули (7.4), n має бути обов'язково парним.

Оцінка погрішності формули Сімпсона [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

$$|I - S_n| \le \frac{b-a}{180} M_4 h^4, \tag{7.5}$$

де $M_4 = \max_{\xi \in (a,b)} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$.

З оцінки (7.5) виходить що, якщо функція $f(x)$ є багаточленом 3-ї степені, то формула (7.4) для обчислення інтеграла (7.1) є теоретично точною.

Приклад 7.2. Обчислити значення визначеного інтеграла $\int_3^{15} \left(5x - \frac{4}{(2x-4)^3} \right) dx$ за формулою Сімпсона для числа розбиття інтервала інтегрування $n = 50$.

Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є підінтегральна функція $F(x)$, межі інтегрування a і b, число розбиття n інтервала $[a,b]$:

```
F = function(x)
{
  return (5*x-4/((2*x-4)^3))
}
a = 3
b = 15
n = 50
```

Процедура обчислення визначеного інтеграла за формулою Сімпсона може бути записана так:

```
Simpson = function(f, a, b, n)
{
     h = (b-a)/n
     s1 = 0
     s2 = 0
     x = c(1:(n-1))
     for (k in 1:(n/2-1))
     {
          x[2*k] = a + (2*k)*h
          s1 = s1 + f(x[2*k])
     }
     for (k in 1:(n/2))
     {
          x[2*k-1] = a + (2*k-1)*h
          s2 = s2 + f(x[2*k-1])
     }
     return (h/3*(f(a)+f(b)+2*s1+4*s2))
}
```

Результат обчислення заданого визначеного інтеграла з використанням записаної процедури:

```
> S = Simpson(F, a, b, n) # виклик функції користувача
> S
[1] 539.751
```

Як видно з отриманих результатів у прикладах 7.1 і 7.2, формула Сімпсона є точнішою, тому на практиці краще застосовувати саме її.

Слід зазначити, що якщо необхідно чисельно обчислити значення інтеграла (7.1) із заданою точністю, то для цього потрібно якимось чином визначити відповідне значення n. Можна було б скористатися оцінками (7.3) або (7.5), але для цього потрібно оцінити максимальне значення модуля 2-ї (для формули трапецій) або 4-ї (для формули Сімпсона) похідної на відрізку $[a,b]$, що може виявитися достатньо важким або зовсім неможливим. Тому можна скористатися таким алгоритмом:

1. Задається початкове значення n і обчислюється значення інтеграла $S1$ для заданого n.

2. Збільшується значення n вдвічі й обчислюється значення інтеграла $S2$ для цього n.

3. Знаходиться значення $|S2-S1|$ і порівнюється його з заданою точністю обчислення ε.

4. Кроки 2 – 3 повторюються доти, доки не виконається умова $|S2-S1| \le \varepsilon$.

Для обчислення значення визначеного інтеграла з заданою точністю можна скористатися такою процедурою:

```
IntegralTochnist = function(f, a, b, n0, eps)
{
      S1 = Simpson (f, a, b, n)
      S2 = Simpson (f, a, b, 2*n)
      while (abs(S2-S1)>eps)
      {
            n = 2*n
            S1 = S2
            S2 = Simpson (f, a, b, 2*n)
      }
      return (S2)
}
```

Результат обчислення визначеного інтеграла з використанням наведеної процедури:

```
> n0=10
> eps = 10^(-5)
> SToch = IntegralTochnist(F, a, b, n0, eps)
> SToch
[1] 539.7515
```

7.4. Висновки

1. Точність обчислення визначеного інтеграла залежить від числа розбиття відрізка інтегрування.
2. Метод Сімпсона є більш ефективним для розрахунків визначеного інтеграла.

7.5. Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постановку задачі чисельного інтегрування функції.
2. У чому полягає ідея методу трапецій?
3. У чому полягає ідея методу Сімпсона?
4. Який з відомих вам методів чисельного інтегрування має більшу точність?
5. Вкажіть алгоритм за яким можна розрахувати значення визначеного інтеграла з заданою точністю.
6. Обчисліть визначений інтеграл функції $f(x) = \dfrac{5-x}{x^2+2}$ на відрізку $[-2,\ 3]$ за формулами трапецій і Сімпсона. Порівняйте результати.