

## 4. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь

### 4.1. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь з одним невідомим

Розглядається рівняння виду

$$f(x) = 0, \quad (4.1)$$

де  $f(x)$  – нелінійна неперервна функція однієї змінної, тобто  $f : R^1 \rightarrow R^1$ .

Розв'язати рівняння (4.1) – означає знайти таке  $x^* \in R^1$ , для якого  $f(x^*) \equiv 0$ . При цьому  $x^*$  називають **коренем рівняння**.

У загальному випадку рівняння (4.1) може мати багато коренів. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь, які розглянуто далі, дозволяють знаходити один корінь на заданому відрізку  $[a, b]$ . При цьому на інтервалі повинен існувати тільки один корінь. Знайти відрізок, що задовольняє цю умову можна різними способами:

- а) з фізичних міркувань, тобто на основі фізичних знань про задачу;
- б) на основі досвіду розв'язання аналогічних задач;
- в) за допомогою графічних методів;
- г) шляхом відокремлення коренів.

Якщо функція  $f(x)$  заздалегідь відома, то найбільш ефективним є графічний спосіб пошуку відрізка  $[a, b]$ . В інших випадках, коли відрізок  $[a, b]$  треба знайти автоматично (не візуально), то застосовують алгоритм відокремлення коренів.

#### **Алгоритм відокремлення коренів**

**Відокремити корінь** – це означає вказати на осі  $Ox$  відрізок  $[a, b]$ , який містить лише один корінь. Алгоритм відокремлення коренів розбивається на такі кроки:

1. Розбивається деяка область на деяку кількість рівних відрізків  $[x_i, x_{i+1}]$ , де  $x_0$  задано,  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $h$  – крок розбиття,  $i = 0, \dots, n$ .
2. Визначається знак функції  $f(x)$  на кінцях кожного  $i$ -го відрізка  $[x_i, x_{i+1}]$ .
3. Якщо добуток  $f(x_i)f(x_{i+1})$  додатний і  $h$  достатньо мале, то можна сподіватися, що на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  коренів рівняння немає.

4. Якщо добуток  $f(x_j)f(x_{j+1})$  від'ємний, то на відрізку  $[x_j, x_{j+1}]$  існує розв'язок рівняння, хоча можливо, що він не один.

5. Перевіряється, чи змінює знак похідна  $f'(x)$  на кінцях відрізка  $[x_j, x_{j+1}]$ . Якщо  $h$  достатньо мале і знак похідної  $f'(x)$  на кінцях відрізка  $[x_j, x_{j+1}]$  не змінюється, то можна сподіватися, що на відрізку корінь один. Таким чином, корінь рівняння відокремлений.

6. Якщо знак похідної  $f'(x)$  змінюється, то впевненості, що корінь один немає.

7. Відрізки, для яких немає упевненості в тому, що розв'язок рівняння лише один, продовжують розбивати вже з меншим кроком, тобто повторюється для них описана процедура відокремлення коренів.

Варто розглянути декілька методів розв'язання нелінійного рівняння (4.1) на відрізку  $[a, b]$ .

#### 4.1.1. Метод дихотомії

Метод дихотомії ще називають **методом половинного поділу**. При розв'язанні нелінійного рівняння методом половинного поділу задаються відрізок  $[a, b]$ , на якому існує лише один розв'язок, і бажана точність  $\varepsilon > 0$  розв'язання задачі.

Якщо на 0-й ітерації методу позначити  $[a_0, b_0] = [a, b]$ , то на  $k$ -й ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ітерації методу буде поточний відрізок  $[a_k, b_k]$ . Далі визначається середина відрізка  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  і перевіряється умова  $f(a_k)f(x_k) < 0$ . Якщо вказана умова виконується, то  $b_{k+1} = x_k$ ,  $a_{k+1} = a_k$ . Якщо умова не виконується, то  $a_{k+1} = x_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ .

Ділення відрізка  $[a_k, b_k]$  навпіл триває доти, доки не виконається умова  $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ . Тут  $x_k$  є наближенням розв'язку  $x^*$  на  $k$ -ій ітерації методу. Очевидно, що тоді точка  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  відрізнятиметься від точного розв'язку  $x^* \in [a, b]$  не більше, ніж на  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом половинного поділу наведена на рис. 4.1.

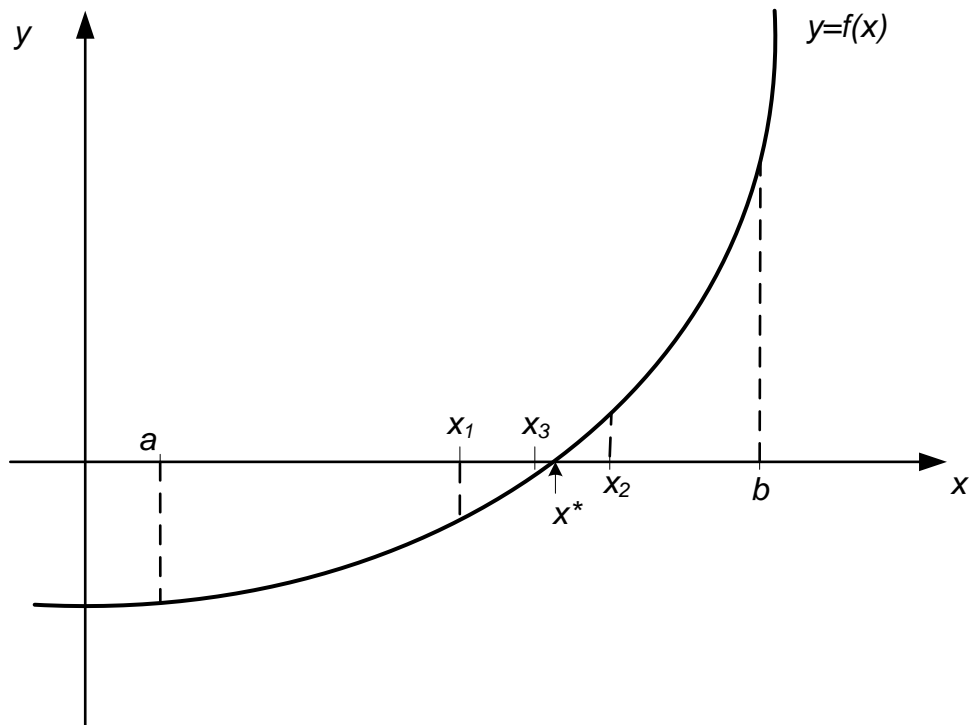


Рис. 4.1. Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом половинного поділу

Справедлива така оцінка швидкості збіжності [Ошибка! Источник ссылки не найден.]:

$$|x_k - x^*| \leq |b_k - a_k| \leq \frac{|b - a|}{2^{k+1}},$$

тобто метод половинного поділу збігається з лінійною швидкістю (зі швидкістю геометричної прогресії) з коефіцієнтом  $q = \frac{1}{2}$ .

Слід зазначити, що метод половинного поділу є методом 0-го порядку, оскільки не використовує обчислення похідних функції  $f(x)$ .

**Приклад 4.1.** Розв'язати нелінійне рівняння  $x^3 + 2 = 5x$  методом дихотомії з точністю  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

### Розв'язання в математичному пакеті R

Оскільки метод дихотомії призначений для розв'язання нелінійного рівняння у загальному вигляді (4.1), то спершу треба привести задане рівняння до виду (4.1), тобто перенести всі члени рівняння у ліву частину.

Відправними даними задачі є функція  $F(x)$  та точність розв'язку  $\varepsilon$ :

$$F(x) = x^3 - 5x + 2, \varepsilon = 10^{-6}.$$

Оскільки метод дихотомії дозволяє знаходити розв'язки нелінійних рівнянь на відрізку, що містить тільки один корінь, то спершу необхідно визначити такі відрізки. Скористаємося графічним методом.

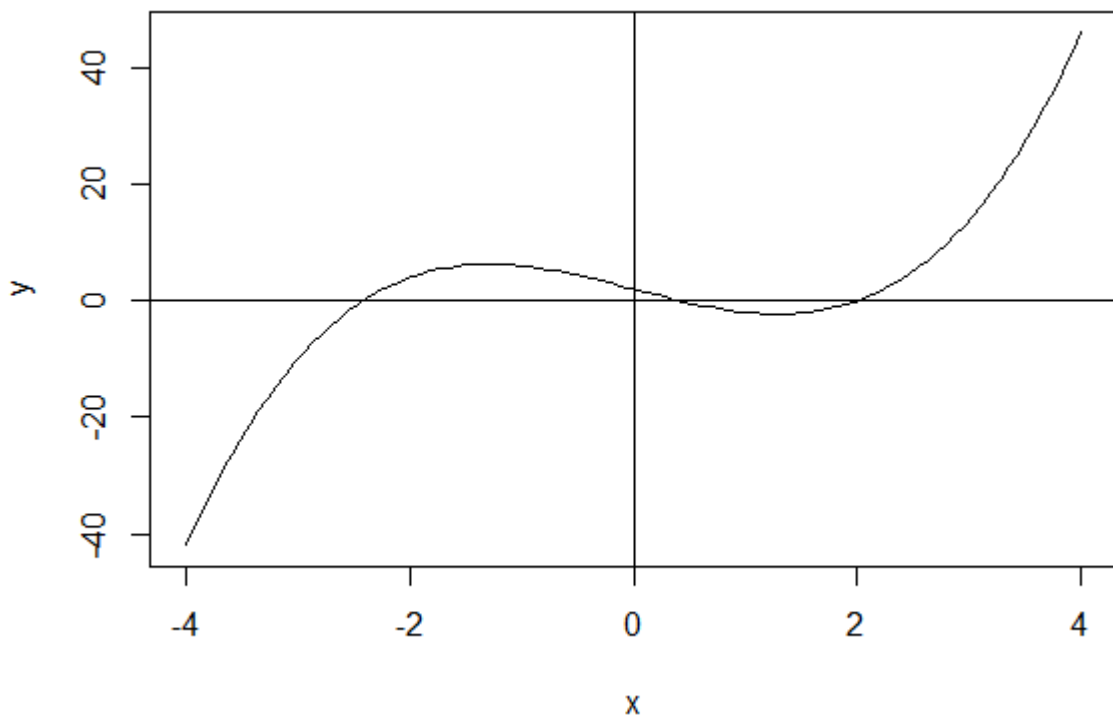
```
# рівняння (функція)

F = function(x)
{
  return (x^3-5*x+2)
}

# побудова графіка функції

x = seq(-4, 4, len=100)
y = F(x)
plot(x, y, type="l")
abline(h=0)
abline(v=0)
```

Графік заданої функції  $F(x)$  має такий вигляд:



Розв'язками рівняння виду (4.1) є точки перетину графіка функції з віссю абсцис. Звідси задане рівняння має розв'язки на інтервалах:  $[-3, -2]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 2.5]$ .

Знайдені відрізки  $[a, b]$  по чергово будуть додатковими відправними даними.

Відправні дані (функція, точність розв'язку, знайдені відрізки):

```

F = function(x)
{
  return (x^3-5*x+2)
}
eps = 10^(-6)
a1 = -4
b1 = -2
a2 = 0
b2 = 1
a3 = 1
b3 = 3.5

```

Процедура розв'язання нелінійного рівняння методом дихотомії може бути записана так:

```

MDihotom = function(f, a, b, eps)
{ while (abs(b-a) > eps)
  {
    x = (a+b)/2
    if (f(a)*f(x) < 0) b = x
    else a = x
  }
  return ((a+b)/2)
}

```

Результат розв'язання нелінійного рівняння з використанням записаної процедури:

```

> x1 = MDihotom(F, a1, b1, eps) # виклик функції користувача
> x1
[1] -2.414214
> x2 = MDihotom(F, a2, b2, eps) # виклик функції користувача
> x2
[1] 0.4142137
> x3 = MDihotom(F, a3, b3, eps) # виклик функції користувача
> x3
[1] 2

```

Таким чином, розв'язками заданого рівняння є знайдені значення невідомого:  $x_1 = -2.414$ ,  $x_2 = 0.414$ ,  $x_3 = 2$ .

Для перевірки отриманих результатів знайдені розв'язки підставляються в рівняння:

```

> F(x1)
[1] -1.186177e-06
> F(x2)
[1] -4.261289e-07
> F(x3)
[1] -4.172325e-07

```

Отже, знайдені значення невідомого є наближеннями точного розв'язку з заданою точністю.

#### 4.1.2. Метод хорд

При розв'язанні нелінійного рівняння методом хорд задаються відрізок  $[a, b]$ , на якому існує лише один розв'язок, і бажана точність  $\varepsilon > 0$  розв'язку задачі.

Якщо на 0-й ітерації методу позначити  $[a_0, b_0] = [a, b]$ , то на  $k$ -й ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ітерації методу буде поточний відрізок  $[a_k, b_k]$ . Потім через дві точки з координатами  $(a_k, f(a_k))$  і  $(b_k, f(b_k))$  проводиться відрізок прямої лінії (**хорда**) і визначається точка перетину цієї лінії з віссю абсцис (точка  $x_k$ ). Якщо при цьому  $f(a_k)f(x_k) < 0$ , то права межа інтервала переноситься в точку  $x_k$  (тобто  $b_{k+1} = x_k$ ,  $a_{k+1} = a_k$ ). Якщо вказана умова не виконується, то в точку  $x_k$  переноситься ліва межа інтервала ( $a_{k+1} = x_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ). Пошук розв'язку припиняється при досягненні заданої точності:  $|f(x_k)| \leq \varepsilon$ .

Для визначення точки перетину хорди з віссю абсцис користуються формулою (спробувати отримати формулу самостійно)

$$x_{k+1} = a_k + \left| \frac{f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \right| (b_k - a_k). \quad (4.2)$$

Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом хорд наведена на рис. 4.2.

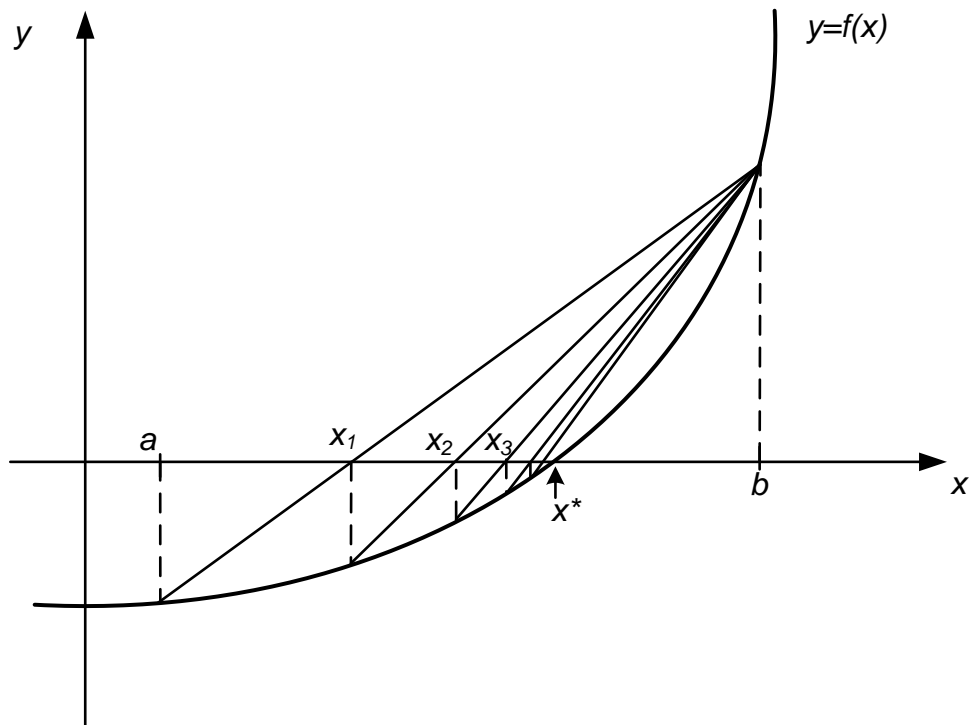


Рис. 4.2. Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом хорд

Слід зазначити, що метод хорд є методом 0-го порядку, оскільки не використовує обчислення похідних функції  $f(x)$ .

**Приклад 4.2.** Розв'язати нелінійне рівняння, задане в прикладі 4.1 методом хорд.

### Розв'язання в математичному пакеті R

Відправні дані – ті ж самі, що й для методу дихотомії.

Процедура розв'язання нелінійного рівняння методом хорд може бути записана так:

```
MHord = function(f, a, b, eps)
{
  x = a+abs(f(a)/(f(b)-f(a)))*(b-a)
  while (abs(f(x)) > eps)
  {
    x = a+abs(f(a)/(f(b)-f(a)))*(b-a)
    if (f(a)*f(x) < 0) b = x
    else a = x
  }
  return (x)
}
```

Результат розв'язання нелінійного рівняння з використанням записаної процедури:

```
> x1 = MHord(F, a1, b1, eps) # виклик функції користувача
> x1
[1] -2.414214
> x2 = MHord(F, a2, b2, eps) # виклик функції користувача
> x2
[1] 0.4142137
> x3 = MHord(F, a3, b3, eps) # виклик функції користувача
> x3
[1] 2
```

Таким чином, розв'язками заданого рівняння є знайдені значення невідомого:  $x_1 = -2.414$ ,  $x_2 = 0.414$ ,  $x_3 = 2$ .

### 4.1.3. Метод Ньютона

Метод Ньютона ще називають **методом дотичних**. При розв'язанні нелінійного рівняння методом дотичних задаються відрізок  $[a, b]$ , на якому існує лише один розв'язок, початкове наближення розв'язку  $x_0 \in [a, b]$  і бажана точність  $\varepsilon > 0$  розв'язку рівняння.

На  $k$ -й ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ітерації методу буде поточне наближення розв'язку  $x_k \in R^1$ . Наступне наближення розв'язку  $x_{k+1} \in R^1$  визначається таким чином. У точці  $(x_k, f(x_k))$  проводиться дотична до графіка  $f(x)$  і визначається точка  $x_{k+1}$  як точка перетину дотичної з віссю абсцис. Пошук розв'язку припиняється при досягненні заданої точності  $|f(x_k)| \leq \varepsilon$ .

Для визначення точки перетину  $(k+1)$ -ї дотичної з віссю абсцис користуються формулою (отримати формулу самостійно)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.3)$$

Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом Ньютона наведена на рис. 4.3.



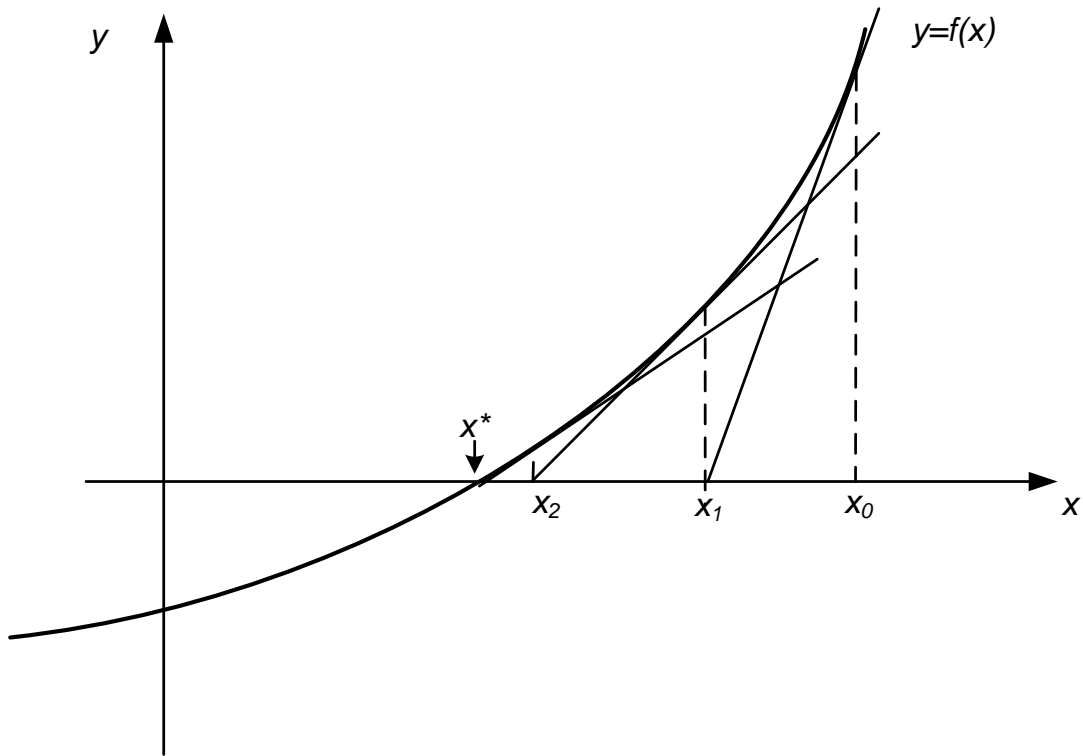


Рис. 4.3. Графічна інтерпретація розв'язання нелінійних рівнянь методом Ньютона

Умова збіжності методу дотичних [Ошибка! Источник ссылки не найден.]  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . При цьому швидкість збіжності буде квадратичною:  $|x_{k+1} - x^*| \leq M|x_k - x^*|^2$  для всіх  $k > k_0$ , де  $k_0 > 0$ ,  $M > 0$ .

Слід зазначити, що метод дотичних є методом 1-го порядку, оскільки використовує обчислення першої похідної функції  $f(x)$ .

Варто зауважити, що ідея методу дотичних (як і методу хорд) полягає в наближенні нелінійної функції  $f(x)$  лінійною функцією (дотичною, а в методі хорд – хордою) на кожній ітерації методу.

**Приклад 4.3.** Розв'язати нелінійне рівняння  $x^3 - 5x + 2 = 0$  методом Ньютона з точністю  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

### Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є функція  $F(x)$  та точність розв'язку  $\varepsilon$ . Додатково задаються похідні, обчислені або задані аналітично ( $DF(x)$ ):

```

# рівняння (функція)
F = function(x)
{
    return (x^3-5*x+2)
}

# перша похідна функції
DF = function(x)
{
    return (3*x^2-5)
}
eps = 10^(-6)

```

Початкові наближення розв'язків  $x_0$  є додатковими відправними даними для методу Ньютона. До них ставляться такі вимоги:

- 1)  $x_0$  мають належати відріzkу  $[a, b]$  і бути якомога ближчими до істинного розв'язку (див. приклад 4.1);
- 2) повинна виконуватися умова збіжності методу дотичних  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

Задаються початкові наближення та перевіряються на збіжність:

```

# друга похідна функції
DF2 = function(x)
{
    return (6*x)
}
x01 = -2.5
x02 = 0.2
x03 = 2.1

zbig = function(f, df2, x)
{
    kx=f(x)*df2(x)
    return (kx)
}

> kx01 = zbig(F, DF2, x01)
> kx01
[1] 16.875
>
> kx02 = zbig(F, DF2, x02)
> kx02
[1] 1.2096
>
> kx03 = zbig(F, DF2, x03)
> kx03
[1] 9.5886

```

Усі значення  $kx_0$  додатні, отже, умова збіжності виконується.

Процедура розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона може бути записана так:

```
MNewton = function(f, df, x0, eps)
{
  x = x0
  while (abs(f(x)) > eps)
  {
    x = x - f(x) / df(x)
  }
  return (x)
}
```

Результат розв'язання нелінійного рівняння з використанням записаної процедури:

```
> x1 = MNewton(F, DF, x01, eps)
> x1
[1] -2.414214
> x2 = MNewton(F, DF, x02, eps)
> x2
[1] 0.4142136
> x3 = MNewton(F, DF, x03, eps)
> x3
[1] 2
```

Таким чином, розв'язками заданого рівняння є знайдені значення невідомого:  $x_1 = -2.414$ ,  $x_2 = 0.414$ ,  $x_3 = 2$ .

#### 4.1.4. Метод простої ітерації

При розв'язанні нелінійного рівняння (4.1) методом ітерацій його потрібно записати у вигляді  $x = \phi(x)$ . Задаються початкове наближення  $x_0$  й точність  $\varepsilon > 0$ . Перше наближення розв'язку  $x_1$  знаходиться з виразу  $x_1 = \phi(x_0)$ , друге –  $x_2 = \phi(x_1)$  і т. д. У загальному випадку  $(k+1)$ -ше наближення обчислюється за формулою  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ . Зазначена процедура повторюється доти, доки  $|f(x_k)| = |x_k - \phi(x_k)| > \varepsilon$ . Умова збіжності методу ітерацій  $|\phi'(x)| \leq q < 1$  для всіх  $x \in [a, b]$ . При цьому швидкість збіжності буде лінійною [Ошибка! Источник ссылки не найден.]:  $|x_k - x^*| \leq Mq^k$  для всіх  $k > k_0$ , де  $k_0 > 0$ ,  $M > 0$ .



Якщо ввести позначення  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  – вектор-стовпець розмірності  $n$

з елементами  $x_i$  ( $x \in R^n$ ),  $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$  – векторна функція розмірності

$n$ , елементами якої є функції  $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$  ( $F: R^n \rightarrow R^n$ ), то систему (4.4) можна записати у векторному вигляді

$$F(x) = 0. \quad (4.5)$$

Розв'язати систему (4.5) – означає знайти таке  $x^* \in R^n$ , для якого  $F(x^*) \equiv 0$ , тобто  $f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \equiv 0 \forall i = \overline{1, n}$ .

Більшість математичних моделей різних процесів і явищ записуються в загальному випадку у вигляді (4.5), тому дана задача має величезне практичне значення.

Слід розглянути три основні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь виду (4.5).

#### 4.2.2. Метод Ньютона

Метод Ньютона будує ітераційну послідовність  $\{x^{(k)}\}$ , ( $x^{(k)} \in R^n$ ),  $k = 0, 1, 2, \dots$ , наближень розв'язку  $x^*$  (початкове наближення  $x^0$  задається) за такою ітераційною формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \quad (4.6)$$

де  $F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$  – матриця Якобі, тобто  $F'(x^{(k)})$  –

матриця розмірності  $n \times n$  з елементами  $F'(x^{(k)})_{ij} = \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}$ .

Процес (4.6) триває доти, доки не виконається умова  $\|F(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – задана точність розв'язку задачі (4.5).

Ідея метода Ньютона полягає в тому, що на  $k$ -й ітерації ( $x^{(k)}$  – поточне наближення розв'язку) наступне наближення розв'язку  $x^{(k+1)}$  знаходиться, як розв'язок системи лінійних рівнянь

$$F_k(x) = 0, \quad (4.7)$$

де  $F_k(x) \equiv F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$  (перші два члени розкладання в ряд Тейлора функції  $F(x)$  в околі точки  $x^{(k)}$  [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]), тобто система (4.7) є лінеаризацією (лінійним наближенням) системи (4.5). Оскільки система (4.7) лінійна відносно  $x$ , то її розв'язок може бути знайдений аналітично:

$$F_k(x) \equiv F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$$

або

$$F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}).$$

Тому (через обернену матрицю)

$$(x - x^{(k)}) = -[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}),$$

звідки і отримуємо розв'язок системи (4.7)

$$x = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}).$$

Якщо послідовність  $\{x^{(k)}\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , побудована згідно з (4.6), збігається, то за достатньо загальних умов [**Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка!**]

**Источник ссылки не найден.]** швидкість її збіжності буде квадратичною, тобто  $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq M \|x^{(k)} - x^*\|^2$  починаючи з деякого  $k$ , де  $M$  – деяка додатна константа.

Основними недоліками метода Ньютона є:

- збіжність тільки для достатньо близьких до розв'язку початкових наближень  $x^{(0)}$ ;
- висока трудомісткість методу, оскільки на кожній ітерації необхідно обчислювати матриці  $F'(x^{(k)})$  і  $[F'(x^{(k)})]^{-1}$ .

Основною перевагою методу Ньютона є висока швидкість збіжності.

Слід зазначити, що в методі Ньютона формулу (4.6) можна записати у вигляді  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}$ , де  $h^{(k)} = -[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ . Проте при практичній реалізації методу вектор  $h^k$  ефективніше обчислювати як розв'язок системи лінійних рівнянь виду  $F'(x^{(k)}) \times h = -F(x^{(k)})$ .

**Приклад 4.4.** Розв'язати методом Ньютона систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1^3 + 6x_1^2x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

з точністю  $\varepsilon = 10^{-5}$  (початкове наближення  $x_0 = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,35 \end{pmatrix}$ ).

### Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є вектор функцій системи  $F(x)$ , матриця частинних похідних функцій системи  $FFx(x)$ , початкове наближення розв'язку  $x_0$ , кількість невідомих  $n$ , точність розв'язку  $\varepsilon$  та максимальна кількість ітерацій  $k_{\max}$ :

```
# Вводимо векторну функцію F
Fx = function(x)
{
  f = c(1:2)
  f[1] = 2*(x[1])^2+(x[2])^2-1
  f[2] = (x[1])^3+(6*(x[1])^2)*x[2]-1
  return(f)
}
```

```

# Вводимо матрицю частинних похідних
FFx = function (x)
{
  ff = matrix(nrow=2, ncol=2)
  ff[1,1] = 4*x[1]
  ff[1,2] = 2*x[2]
  ff[2,1] = 3*(x[1]^2)+12*x[1]*x[2]
  ff[2,2] = 6*(x[1]^2)
  return(ff)
}
# Вводимо вектор початкового наближення розв'язку
x0 = c(0.65, 0.35)
N = 2 # Кількість невідомих
kmax = 100 # максимальна кількість ітерацій
eps = 0.00001 # точність розв'язку

```

Процедуру розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона можна записати так:

```

Newton = function(fx, ffx, x, n, eps, kmax)
{
  y = fx(x)
  k = 0
  while ((sqrt(t(y)%*%y)) > eps)
  {
    yy = ffx(x)
    x = x - solve(yy)%*%y
    y = fx(x)
    if (k == kmax)
      break
    k = k+1
  }
  x[n+1] = k
  return(x)
}

```

Результат розв'язання системи нелінійних рівнянь із використанням записаної процедури:

```

> X = Newton(Fx, FFx, x0, N, eps, kmax)
> X
[1] 0.6865944 0.2391155 4.0000000

```

Таким чином, розв'язком заданої системи нелінійних рівнянь є знайдені значення невідомих:  $x_1 = 0,687$ ,  $x_2 = 0,239$ . Елемент вектора  $x_3 = 4$  показує кількість виконаних ітерацій.

Для перевірки отриманих результатів слід підставити знайдені значення невідомих у систему:



> Fx (X)

[1] 1.176896e-10 -2.472814e-10

### 4.2.3. Метод простої ітерації

При розв'язуванні системи нелінійних рівнянь (4.8) методом простої ітерації її потрібно спочатку записати у вигляді  $x = G(x)$ , де  $G(x)$  – векторна функція розмірності  $n$  від  $x \in R^n$ . Потім задаються початкове наближення  $x^{(0)}$  і точність  $\varepsilon > 0$ . Метод будує ітераційну послідовність  $\{x^{(k)}\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , наближень розв'язку  $x^*$  за такою ітераційною формулою

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}). \quad (4.8)$$

Процес (4.8) триває доти, доки не виконається умова  $\|x^{(k)} - G(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$ . Цей критерій закінчення обчислень виходить з рівності  $F(x) = x - G(x)$ .

Метод простої ітерації (4.8) збігається, якщо  $\|G'(x)\| \leq q < 1$  для всіх  $x$  що належать деякому околу  $V(x^*)$  розв'язку  $x^*$  і  $x^0 \in V(x^*)$ . При цьому швидкість збіжності буде лінійною, тобто  $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q \|x^{(k)} - x^*\|$ , починаючи з деякого  $k$  [Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка! Источник ссылки не найден.; Ошибка! Источник ссылки не найден.].

Основними недоліками методу простої ітерації є:

- складність переходу від запису системи  $F(x) = 0$  до виду  $x = G(x)$ , зважаючи на нелінійність функцій  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
- збіжність тільки для достатньо близьких до розв'язку початкових наближень  $x^{(0)}$ ;
- невисока швидкість збіжності.

Основною перевагою методу простої ітерації є невисока трудомісткість методу.

**Приклад 4.5.** Розв'язати методом простої ітерації систему нелінійних рівнянь з прикладу 4.4.

## Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є векторна функція системи  $G(x)$ , початкове наближення розв'язку  $x_0$ , кількість невідомих  $n$ , точність розв'язку  $\varepsilon$  та максимальна кількість ітерацій  $k_{\max}$ :

```
N = 2 # Кількість невідомих
# Вводимо векторну функцію G
Gx = function(x)
{
  g = c(1:2)
  g[1] = sqrt((1-x[2]^2)/2)
  g[2] = (1-(x[1])^3)/(6*(x[1])^2)
  return(g)
}

# Вводимо вектор початкового наближення розв'язку
x0 = c(0.65, 0.35)
kmax = 100 # максимальна кількість ітерацій
eps = 0.00001 # точність розв'язку
```

Процедуру розв'язання системи нелінійних рівнянь методом простої ітерації можна записати так:

```
MetIter=function(G,x,n,eps,kmax)
{
  k = 0
  repeat
  {
    xk = G(x)
    y = xk - G(xk)
    if (((sqrt(t(y)%*%y))<= eps) | (k == kmax))
    {
      break
    }
    x = xk
    k = k + 1
  }
  x[n+1] = k
  return(x)
}
```

Результат розв'язання системи нелінійних рівнянь із використанням записаної процедури:

```
> X = MetIter(Gx,x0,N,eps,kmax)
> X
[1] 0.6865834 0.2391370 11.0000000
```

Таким чином, розв'язком заданої системи нелінійних рівнянь є знайдені значення невідомих:  $x_1 = 0,687$ ,  $x_2 = 0,239$ . Елемент вектора  $x_3 = 11$  показує кількість виконаних ітерацій.

Для перевірки отриманих результатів слід підставити знайдені значення невідомих у систему:

```
> Fx(X)
[1] 1.176896e-10 -2.472814e-10
```

У результаті розв'язання системи нелінійних рівнянь двома методами з однаковою точністю отримані однакові результати. Різниця тільки в тому, що в методі Ньютона розв'язок отримано за 4 ітерації, а в методі простої ітерації – за 11 ітерацій.

#### 4.2.4. Метод найменших квадратів

Пошук розв'язку задачі (4.5), по суті, еквівалентний задачі знаходження точки мінімуму функції  $\Phi(x)$  виду

$$\Phi(x) \equiv \|F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2(x). \quad (4.9)$$

Так, якщо  $x^* \in R^n$  – розв'язок задачі (4.5), то  $F(x^*) = 0$ , тобто  $\Phi(x^*) = 0$ . Але функція  $\Phi(x)$  – невід'ємна, тобто  $\Phi(x) \geq 0$  для всіх  $x \in R^n$ , тому в точці  $x^*$  вона досягає мінімального значення.

І навпаки, якщо функція  $\Phi(x)$  в точці  $x^*$  досягає мінімального значення і при цьому  $\Phi(x^*) = 0$ , то  $\|F(x^*)\|^2 = 0$ , а значить і  $F(x^*) = 0$ , тобто  $x^*$  – розв'язок задачі (4.5).

Задачу знаходження точки мінімуму функції  $\Phi(x)$  виду (4.9) називають **задачею найменших квадратів**. Слід зазначити, що задачу найменших квадратів (4.9) можна розглядати і як самостійну, тобто без прив'язки до системи (4.5). В цьому випадку кількість функцій  $f_i(x)$  може бути більшим, ніж кількість змінних  $x_j$ .

Таким чином, розв'язання системи нелінійних рівнянь (4.5) зводиться до оптимізаційної задачі [Ошибка! Источник ссылки не найден.], розв'язок якої з практичної точки зору виявляється, зрештою, простішим.

**Приклад 4.6.** Розв'язати систему нелінійних рівнянь з прикладу методом найменших квадратів.

### Розв'язання в математичному пакеті R

Відправними даними задачі є вектор функцій системи  $F(x)$ , початкове наближення розв'язку  $x_0$  та кількість невідомих  $n$ :

```
n = 2 # Кількість невідомих
# Вводимо векторну функцію F
Fx = function(x)
{
  f = c(1:2)
  f[1] = 2*(x[1])^2+(x[2])^2-1
  f[2] = (x[1])^3+(6*(x[1])^2)*x[2]-1
  return(f)
}
```

Розв'язання системи нелінійних рівнянь методом найменших квадратів із використанням вбудованої процедури *optim*.

```
# Визначаємо цільову функцію метода МНК
FunMНК = function(x)
{
  z = Fx(x)
  S = 0
  for(i in 1:n)
    S = S + z[i]*z[i]
  return( S )
}

> # Вводимо вектор початкового наближення розв'язку
> x0 = c(0.65, 0.35)
>
> res = optim(fn=FunMНК, par=x0)
> x1 = res$par
> x1
[1] 0.6866008 0.2390994
```

Для перевірки отриманих результатів слід підставити знайдені значення невідомих у систему:

```
> Fx(x1)
[1] 9.701967e-06 -2.408662e-05
```

### 4.2.5. Висновки

1. Більшість математичних моделей різних процесів і явищ записуються в загальному випадку у вигляді (4.4).

2. Основними методами розв'язання систем нелінійних рівнянь є метод Ньютона, метод простої ітерації та метод найменших квадратів.

#### 4.2.6. Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання системи нелінійних рівнянь.

2. У чому полягає метод Ньютона для розв'язання систем нелінійних рівнянь? Яка ідея методу? Вкажіть основні характеристики цього методу.

3. У чому полягає метод простої ітерації для розв'язання систем нелінійних рівнянь? Вкажіть основні характеристики цього методу.

4. У чому полягає метод найменших квадратів для розв'язання систем нелінійних рівнянь?

5. Розв'яжіть систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 = 0, \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 = 0, \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 = 0. \end{cases}$$

двома методами: Ньютона та простої ітерації. Прийняти початкове наближення  $x^0 = (0; 0; 0)$ .

Порівняйте трудомісткість і швидкість збіжності методів.