МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Кафедра вищої математики та економіко-математичних методів

Матеріали лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика»

Харків, 2017 р.

Вступ

Фундаментальну основу в математичної підготовці економістів та менеджерів складає учбова дисципліна "Вища математика", що є нормативною дисципліною та складовою структурно-логичної схеми, яка передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів усіх економічних спеціальностей.

У посібнику приведений теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів його застосування. Пропонуються методичні рекомендації щодо рішення багатьох типових задач та індивідуальні завдання.

Учбовий посібник містить частину дисципліни, яка складається з наступних розділів вищої математики: елементи теорії матриць та визначників, теорія систем лінійних рівнянь, елементи аналітичної геометрії, диференціальне та інтегральне числення, теорія звичайних диференціальних рівнянь та числові ряди.

Лекція 1.
Елементи теорії матриць та визначників

1.1. Визначники другого та третього порядків

Визначники другого та третього порядків визначаються наступними рівностями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Числа a_{ij} – називаються елементами визначника. При цьому a_{11}, a_{22} у першому визначнику та a_{11}, a_{22}, a_{33} у другому визначнику складають головні діагоналі, а числа a_{12}, a_{21} и a_{13}, a_{22}, a_{31} – побічні діагоналі визначників.

Приклад. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Рішення.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 7\cdot \ \ -5 \ \ = 41.$$

Приклад . Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Рішення. Скористуємося приведеною вище формулою:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \ \cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 3 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 6\cdot 8\cdot 1 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку зветься визначник другого порядку, отриманий з даного визначника за допомогою викреслювання i-го рядка та j-го стовпчика, на перетині котрих знаходиться цей елемент.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} зветься его мінор, помножений на $-1^{\ i+j}$, тобто $A_{ij} = -1^{\ i+j}\cdot M_{ij}$.

Теорема: визначник третього порядку рівний сумі добутків елементів будь-якого його рядка або стовпця на їх алгебраїчне доповнення.

Ця теорема дозволяє обчислити визначник, розкриваючи його за елементам будь-якого його рядка або стовпця. Наприклад, розкриваючи визначник за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

За допомогою даної теореми можна ввести поняття визначника четвертого, п’ятого та більш високих порядків.

Пример . Вычислить путем разложения по элементам первой строки визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рішення.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2+4) + 3(5+2) + 1(10-2) = 41.$$

1.2. Основні властивості визначника

Визначник не зміниться, якщо усі його рядки замінити стовпцями, а стовпці – відповідними рядками.

При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює свій знак на протилежний.

Загальний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

Якщо елементи одного рядка (стовпця) рівні або пропорційні елементам другого рядка (стовпця), то визначник дорівнює нулю.

Визначник не зміниться, якщо к елементам будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й теж число.

Пример. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Рішення. Перетворимо визначник. Помножимо елементи першого рядка на (-4) та додамо до елементів другого рядка, а потім помножим елементи першого рядка на (-7) та додамо до елементів третього рядка. Визначник приймає вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3. Рішення системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

Система двох лінійних рівнянь с двома невідомими має вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ зветься визначником системи.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна та має єдине рішення, котре знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Система трьох лінійних рівнянь с трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

За умовою, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

має єдине рішення:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Пример. Вирішити систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Рішення. Обчислюємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

Далі обчислюємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 56; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 28; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -28.$$

Тоді, $x_1 = \frac{56}{28} = 2, \; x_2 = \frac{28}{28} = 1, \; x_3 = \frac{-28}{28} = -1.$

1.4. Обернена матриця

Матриця A^{-1} зветься оберненою до квадратної матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и $\Delta = |A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} визначається за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Приклад . Найти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Рішення. Покажемо спочатку, що дана матриця є невиродженою, тобто, що $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 5 - 2 - 6 - 10 = -3 \neq 0.$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів даної матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Аналогічно знаходимо $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = -3$.

Тоді:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вірність отриманого результату можна перевірити, якщо обчислити вираз AA^{-1}. Перевірте, що $AA^{-1} = E$.

1.5. Рішення системи рівнянь за допомогою оберненої матриці

Система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

може бути записана у матричному вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\varDelta = |A| \neq 0$, то Рішення системи в матричної формі має вид: $X = A^{-1}B$.

Приклад. Вирішити систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Рішення. Тут $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

В попередньому прикладі знайдені визначник $\varDelta = |A|$ та A^{-1}:

$$\Delta = -3; \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2-14+10 \\ -8+28-5 \\ 6+0-15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

відкіля слідує, що $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$.

1.7. Ранг матриці

Ранг матриці – це найбільший порядок її мінору, який нерівний нулю. Позначають ранг матриці як $rangA$ або r_A.

Ранг матриці можна обчислити, наприклад, способом приведення матриці до трикутного або ступінчастого виду.

Суть цього способу зміститься у тому, що за допомогою елементарних перетворень матриця приводиться до трикутного або ступінчастого виду. При цьому ранг матриці не змінюється.

Приклад . Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Виконаємо елементарні перетворення. Получим нулі в першому стовпці. Для цього елементи першого рядка помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів другого рідка; третю строку перепишемо без змін; першій рядок помножимо на (-5) і додамо до відповідних елементів четвертого рядка; получим нову матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Потім, до елементів другого рядка додамо відповідні елементі третього рядка помножені на 2. Четверту строку можна виключити, оскільки другий та четвертий рядок пропорційні:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зараз до елементів третього рядка додамо відповідні елементі другого рядка помножені на (-3):

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відсіля видно, що ранг матриці дорівнює трьом, оскільки мінор третього порядку вже не дорівнює нулю:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Лекція 2.
Загальна теорія систем лінійних рівнянь

2.1. Теорема Кронекера – Капеллі

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

розширена матриця

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера – Капелли. Для того щоб система m лінійних рівнянь с n невідомими була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг розширеної матриці системи дорівнював рангу основної матриці, тобто: $r_A = r_B = r$.

Якщо $r = n$, то система має єдине Рішення, якщо $r < n$, то система має нескінченну множину рішень.

Приклад. Вирішити систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 + 8x_4 = 7, \end{cases}$$

якщо вона сумісна.

Рішення. Знайдемо ранги матриць A и B.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 0 & 8 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Для отримання останньої матриці були виконані наступні перетворення:

1) з елементів другого рядка відняли відповідні елементи першого рядка, потім кожний елемент першого рядка помножили на (-3) та склали з відповідними елементами третього рядка;

2) третій рядок співпадає з другим, тому його можна виключити.

З останньої матриці видно, що ранги матриць системи та розширеної матриці дорівнюють двом, оскільки їх мінор другого порядку є ненульовим. Наприклад,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оскільки $r_A = r_B = 2$, а число невідомих дорівнює чотирьом, то система має нескінченну множину рішень.

З перетвореної матриці видно, що система приведена до такого виду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ -x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

З другого рівняння:

$$x_2 = -1 + 6x_3 + 5x_4,$$

Тоді з першого рівняння:

$$x_1 = 2 - 3(-1 + 6x_3 + 5x_4) + 2x_3 - x_4,$$

або $$x_1 = 5 - 16x_3 - 16x_4 .$$

Таким чином, загальне рішення системи:

$$x_1 = 5 - 16x_3 - 16x_4 ,$$

$$x_2 = -1 + 6x_3 + 5x_4.$$

2.2. Рішення системи рівнянь методом Жордана – Гауса

Це метод повного виключення невідомих. Суть метода міститься у тому, щоб за допомогою елементарних перетворень на місці матриці системи отримати одиничну матрицю.

Розглянемо Рішення систем лінійних рівнянь методом Жордана – Гауса на прикладе.

Приклад. Вирішити систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Рішення.

Таблиця 3.1

	Коефіцієнти при			b_i	Σ	Примітки
	x_1	x_2	x_3			
1	1	3	1	6	11	
2	2	-1	-2	-3	-4	
3	1	4	-1	3	7	
4	1	3	1	6	11	[1]
5	0	-7	-4	-15	-26	[2]-2[4]
6	0	1	-2	-3	-4	[3]-[4]
7	1	0	7	15	23	[4] - 3[8]
8	0	1	-2	-3	-4	[6]

9	0	0	-18	-36	-54	[5]+7[8]
10	0	0	1	2	3	[9] : 2
11	1	0	0	1	2	-7[10]+[7]
12	0	1	0	1	2	2[10]+[8]

Відповідь знаходимо у стовпці b_i табл. 3.1 супротив відповідних одиниць.

Таким чином рішення: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Лекція 3.
Елементи векторної алгебри и аналітичної геометрії

3.1. Вектори. Основні поняття

Вектор $\overrightarrow{AB}$, або $\vec{a}$, – є направлений відрізок AB, де точка A зветься его началом, а точка B – кінцем.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ зветься довжина відрізку AB.

Модуль вектора позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, або $|\vec{a}|$. Якщо $|\vec{a}| = 1$, то вектор зветься одиничним.

Вектори паралельні однієї і тієї ж прямій, називаються **колінеарними**.

В прямокутної системі координат $(Oxyz)$ вектор $\vec{a}$ задається за допомогою его проекцій x, y, z на оси координат. У цьому випадку пишуть $\vec{a} = (x; y; z)$, або $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – одиничні вектори, направлені по осям Ox, Oy и Oz відповідно.

Довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ знаходиться за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Якщо відомі координати кінців відрізка AB, тобто $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ дорівнюють різності координат його кінця B и початку A:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Його довжина співпадає з відстанню між точками A и B:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, а $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2).$$

Якщо вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колінеарні, то

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Приклад.

Дани три вектори $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$.

Знайти вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ та його довжину $\left|\vec{d}\right|$.

Рішення.

Знайдемо координати векторів:

$$3\vec{a} = (6; -3; 9) \text{ и } 2\vec{b} = (0; 4; -2).$$

За правилом додавання векторів маємо:

$$\vec{d} = (6 - 0 + 1; -3 - 4 + 2; 9 + 2 + 3) = (7; -5; 14).$$

Далі:

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 14^2} = \sqrt{270}.$$

3.2. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зветься число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута α між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задані власними координатами, тобто $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, а $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то скалярний добуток є:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Кут між векторами знаходиться за формулою:

$$cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} \text{ або } cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ненульові вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярні тоді и тільки тоді, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ або $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Приклад. Знайти $(3\vec{a}-5\vec{b})(2\vec{a}+7\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Рішення. Знайдемо скалярний добуток:

$$(3\vec{a}-5\vec{b})(2\vec{a}+7\vec{b})=6\vec{a}^2+21\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{b}\cdot\vec{a}-35\vec{b}^2=$$

$$=6|\vec{a}|^2-35|\vec{b}|^2=6\cdot 9-35\cdot 1=19,$$

оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

3.3. Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зветься вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, котрий задовольняє умовам:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ та направлений так, щоб з кінця вектора $\vec{c}$ перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснювався проти часової стрілки;

2) довжина вектора $\vec{c}$ численно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, та обчислюється за формулою:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Якщо $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, а $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

3.4. Пряма на площині

Основні види рівняння прямої:

$y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

$Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої;

$y-y_0=k(x-x_0)$ – рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M(x_0;y_0)$ в заданому напрямі;

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$;

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – рівняння прямої, яка відтинає відрізки a и b на осях координат.

Кут між прямими $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ знаходиться за формулою:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \qquad (k_1\cdot k_2\neq -1).$$

Умова колінеарності двох прямих: $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_1\cdot k_2=-1 \text{ або } k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Відстань d від точки $M(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M(3;-2)$ и $N(2;1)$.

Рішення. За формулою рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y+2}{1+2},$$

Або, після спрощення:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{3},$$

відкіля рівняння прямої: $3x+y-7=0$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;-2)$ перпендикулярно прямої $2x-3y+6=0$.

Рішення. Приведемо дане рівняння к виду с кутовим коефіцієнтом. Получим:

$$y = \frac{2}{3}x + 2,$$

відкіля $k_1 = \frac{2}{3}$.

Згідно з умовою перпендикулярності прямих кутовий коефіцієнт шуканої прямої є: $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{2}$.

Рівняння прямої, котра проходить через дану точку $M(1;-2)$, шукаємо у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Таким чином маємо:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 1),$$

або після перетворень:

$$3x + 2y + 1 = 0.$$

Приклад. Найти відстань між паралельними прямими

$3x + 4y - 15 = 0$ и $3x + 4y + 20 = 0$.

Рішення.

На першої прямої візьмемо довільну точку, наприклад $M(1;3)$, та знайдемо відстань від цієї точки до другої прямої.

Отримуємо:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{35}{5} = 7.$$

Приклад. Найти точку перетину двох прямих $3x + 2y - 4 = 0$ и $5x + 6y - 12 = 0$.

Рішення. Щоб найти точку перетину двох прямих, необхідно вирішити систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ 5x + 6y = 12. \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, отримуємо: $x = 0$, $y = 2$. Таким чином, точка перетину прямих є $M(0;2)$.

Приклад . В трикутнику ABC с вершинами $A(2;9)$, $B(-2;-2)$, $C(10;4)$ знайти рівняння висоти AD та її довжину.

Рішення. Створимо креслення (рис. 3.1).

Складемо рівняння сторони BC:

$\frac{x+2}{10+2} = \frac{y+2}{4+2}$, або $x - 2y - 2 = 0$, або $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Кутовий коефіцієнт прямої : BC $k_{BC} = \frac{1}{2}$.

Висота AD перпендикулярна BC. Тобто: $k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} = -2$.

Рівняння AD шукаємо у вигляді: $y - y_A = k_{AD}(x - x_A)$.

Маємо:

$$y - 9 = -2(x - 2), \text{ або } y = -2x + 13.$$

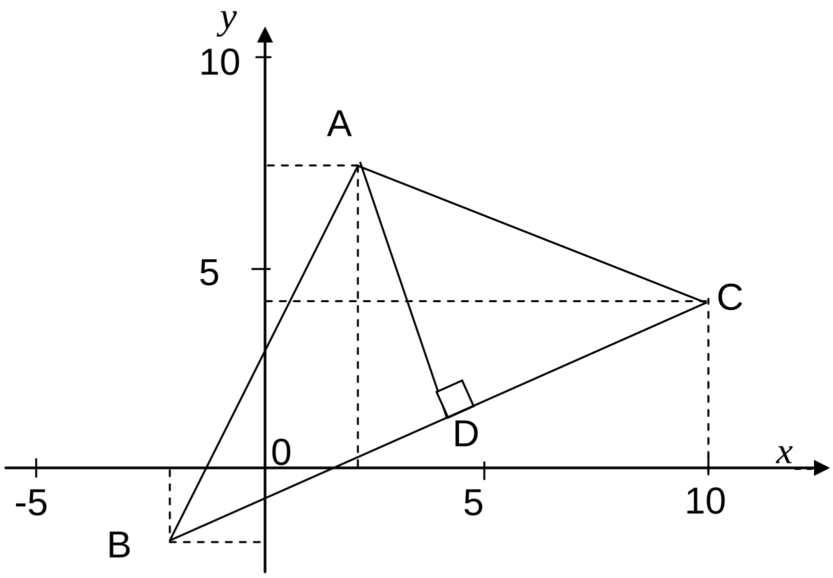


Рис. 3.1

Довжину висоти AD знайдемо як відстань від точки A до прямої BC. Рівняння BC має вид $x - 2y - 2 = 0$.

Тоді довжина висоти: $|AD| = \frac{|2 - 2 \cdot 9 - 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{18}{\sqrt{5}}$.

Лекція 4.
Границі функцій

При обчисленні границь функцій використовують наступні теореми:

1. Якщо існують $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то:

а) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

2. Перша чудова границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1\right).$$

3. Друга чудова границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \qquad (e \approx 2,72).$$

При рішенні прикладів на обчислення границь корисно знати, що:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{x} = \infty$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty} ax = \infty$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x} = 0$.

В простіших випадках обчислення границь зводиться до підстановці в дану функцію граничного значення аргументу. Однак часто така підстановка призводить до невизначеності наступного виду:

$$\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ [0\cdot\infty];\ [\infty-\infty];\ [1^\infty];\ [0^0];\ [\infty^0].$$

Знаходження границі в цих випадках називають викриттям невизначеності. Для викриттям невизначеності спочатку необхідно перетворити дану функцію, а потім обчислювати к границю.

Наступні приклади показують методи викриття невизначеностей.

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x-4}$.

Рішення. При $x\to 1$ чисельник и знаменник прямують до нуля, тобто має місце невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для викриття цієї невизначеності розкладемо на множники чисельник та знаменник та скоротимо дріб:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^2+x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{3x+4}=\frac{2}{7}.$$

Приклад.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

Рішення. Тут також маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її викриття помножимо чисельник и знаменник дробі на вираз спряжений до знаменника, тобто на $(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})$. Після скорочення дробі на x скористаємося теоремою про границю частки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{5-x-5-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2}=\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{-2}=-5.$$

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+1}{5+x^2-7x^3}$.

Рішення. В даному випадку маємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. В подібних прикладах необхідно розділити чисельник та знаменник почленно на x^n, де n – найбільший з показників степенів чисельника та знаменника.

Розділимо на x^3 чисельник та знаменник:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+1}{5+x^2-7x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{7x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-7}=-\frac{3}{7},$$

оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 5x}$.

Рішення. Перетворимо дану границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{tg3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{3}{5},$$

оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}=1$, та $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$.

Приклад.

Знайти границю

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{3x}$.

Рішення. В дану випадку маємо невизначеність виду 1^{∞}. При викритті невизначеності такого виду використовують другу чудову границю.

Перетворимо дану функцію так, щоб використати другу чудову границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}}}_{e}\right)^{\frac{-3x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+1}}=e^{-3}.$$

Приклад.

Найти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

Рішення. Як і в попередньому випадку, маємо невизначеність виду 1^{∞}. Перетворимо дану функцію так, щоб використати другу чудову границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x-1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+3}{3x-1}-1\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x-1}\right)^{2x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{4}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{4}}}_{e}\Bigg)^{\frac{4(2x+3)}{3x+1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8x+12}{3x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8+\frac{12}{x}}{3+\frac{1}{x}}} = e^{\frac{8}{3}}.$$

Лекція 5.

Диференціальне числення функцій однієї змінної

5.1. Похідна функції

Хай функція $y=f(x)$ є обмеженою в точці x та в деякому її околі. Похідною цієї функції в точці x зветься границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну позначають одним з символів: y', $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Операція знаходження похідної зветься диференціюванням.

Основні правила диференціювання

1. $C'=0$ $(C=const)$.
2. $(Cu)'=C\cdot u'$.
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.
4. $(uv)'=u'v+uv'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
6. $y'=f'(u)\cdot u'$, якщо $y=f(u)$, а $u=u(x)$, тобто y – складена функція від x.

Таблиця похідних основних функцій

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$.
2. $(x)'=1$.
3. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.
5. $(sin\,x)'=cos\,x$.
6. $(cos\,x)'=-sin\,x$.

7. $(tgx)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$. 8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$.

9. $(a^x)' = a^x \cdot ln\, a$. 10. $(e^x)' = e^x$.

11. $(log_a x)' = \dfrac{1}{x\, ln\, a}$. 12. $(ln\, x)' = \dfrac{1}{x}$.

13. $(arcsin\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 14. $(arccos\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. 16. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Похідна другого порядку від функції $y = f(x)$ є похідна від її похідної: $y'' = (f'(x))'$.

Приклад. Найти похідні функцій:

1. $y = \dfrac{5}{x^3} + 8x^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt[4]{x} + 9x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3$. 2. $y = x^3 arctgx$.

3. $y = \dfrac{x - sin\, x}{\sqrt{x}}$. 4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$.

5. $y = cos^3(3 - 5x)$. 6. $y = ln(3x^2 - 2x)$.

7. $y = arcsin \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$. 8. $y = 10^{1 - sin^4 3x}$.

Рішення.

1.

$$y' = -15x^{-4} + 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} + 9 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = -\frac{15}{x^4} + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} + 15\sqrt[3]{x^2}.$$

2. $y' = (x^3)' arctgx + x^3 (arctgx)' = 3x^2 arctgx + \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

3. $$y' = \frac{(x - sin\, x)'\sqrt{x} - (x - sin\, x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(1 - cos\, x)\sqrt{x} - (x - sin\, x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{x - 2x\, cos\, x + sin\, x}{2x\sqrt{x}}.$$

4.

$$y' = -\frac{1}{2}\left(1 - x^4 - x^8\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - x^4 - x^8\right)' = \frac{-4x^3 - 8x^7}{-2\sqrt{\left(1 - x^4 - x^8\right)^3}} = \frac{2x^3 + 4x^7}{\sqrt{\left(1 - x^4 - x^8\right)^3}}.$$

5. $y' = 3cos^2(3-5x)\cdot\left(cos(3-5x)\right)' = 3cos^2(3-5x)\cdot\left(-sin(3-5x)\right)\cdot$

$\cdot(3-5x)' = -3cos^2(3-5x)\cdot sin(3-5x)\cdot(-5) = 15cos^2(3-5x)\cdot sin(3-5x)$.

6. $y' = \dfrac{1}{3x^2 - 2x}\left(3x^2 - 2x\right)' = \dfrac{6x-2}{3x^2-2x}$.

7. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right)' = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3-4x^2}}$.

8. $y' = 10^{1-sin^4 3x}\cdot ln10\cdot\left(-4sin^3 3x\right)\cdot cos3x\cdot 3 =$

$= -12\,ln10\cdot 10^{1-sin^4 3x}\cdot sin^3 3x\, cos3x.$

5.4. Обчислення границь за правилом Лопіталя

Для знаходження границь відношення двох нескінченно малих величин (невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$) або двох нескінченно великих величин (невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$) застосовують правило Лопіталя:

якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

якщо остання границя існує.

В випадку невизначеності $(0\cdot\infty)$ необхідно дану функцію перетворити так, щоб прийти до невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Правило Лопіталя можна застосовувати також у випадку, коли $x \to \infty$.

Розглянемо ряд прикладів, які ілюструють застосування правила Лопіталя.

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$.

Рішення. Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосуємо для її викриття правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sin 5\pi x)'}{(\sin 2\pi x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{5\pi \cos 5\pi x}{2\pi \cos 2\pi x} = \frac{5 \cos 5\pi x}{2 \cos 2\pi x} = \frac{5 \cdot (-1)}{2 \cdot 1} = -\frac{5}{2}.$$

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - 3\ln x}{3x + 2}$.

Рішення.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 3\ln x}{3x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{(1 - 3\ln x)'}{(3x + 2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{3}{x}}{3} = \lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Приклад .

Знайти $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \ln x)$.

Рішення. Тут маємо невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$. Представимо добуток функцій $x^2 \ln x$ в вигляді відношення $\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$,

тоді: $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \ln x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{-2} = 0$.

Слід відмітити, що невизначеності виду $(\infty - \infty)$, (1^{∞}) и (0^{0}) також зводяться до невизначеностей виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ за допомогою алгебраїчних перетворень.

Лекція 6.
Дослідження функцій и побудова їх графиків

6.1. Дослідження функцій на монотонність и екстремуми

Інтервали зростання та зменшення функції звуться інтервалами монотонності функції. Для їх визначення користуються признаками:

Якщо у всіх точках певного інтервалу (a,b) похідна $y' > 0$, то функція $y = f(x)$ зростає у цьому інтервалі, а якщо $y' < 0$ – то зменшується.

Точка x_0, в котрої $f'(x_0) = 0$ або $f'(x)$ не існує, зветься критичною. Якщо при переході через критичну точку похідна $f'(x)$ змінює свій знак с "+" на "–", то в цієї точці є максимум (max), якщо с "–" на "+" – то мінімум (min). Точки максимуму и мінімуму звуться точками екстремуму. Точками екстремуму можуть служити тільки ті точки, в котрих похідна дорівнює нулю або не існує.

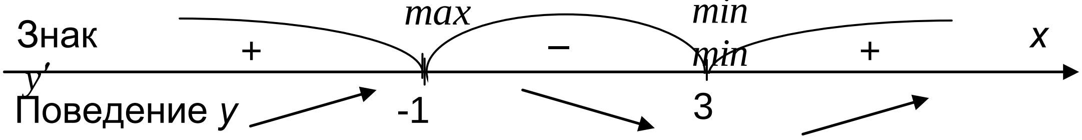
Приклад. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції

$y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

Рішення. Очевидно, $x \in R$, оскільки дана функція є многочленом. Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{3x^2}{3} - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3.$$

Критичні точки знайдемо з рівняння $y' = 0$, тобто з рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$. Рішення є: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Ці точки нанесемо на числову вісь. Вони розбивають її на три інтервали. З'ясуємо знак похідної в кожному з отриманих інтервалів. Похідну рекомендується представити у вигляді добутку: $y' = (x-3)(x+1)$.



y

При $x = -1$ функція має максимум, а при $x = 3$ – мінімум, причому:

$$y_{max}=\frac{-1}{3}-1+3=\frac{5}{3}, \quad \text{а} \ y_{min}=\frac{3^3}{3}-9-9=-9.$$

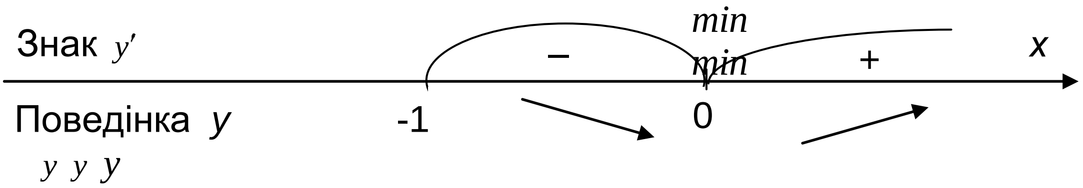
У проміжках $(-\infty;-1)$ и $(3;\infty)$ функція зростає, а в проміжку $(-1;3)$ – зменшується.

Приклад. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y=x-ln(1+x)$.

Рішення. Область визначення даної функції визначається рішенням нерівності: $1+x>0$, відкіля $x>-1$. Найдем y':

$$y'=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{x+1}.$$

Вирішуючи рівняння $\frac{x}{x+1}=0$, знаходимо критичну точку, $x=0$, котра належить області визначення даної функції. Дослідимо цю точку на екстремум:



Як видно, дана функція зменшується при $x\in(-1;0)$ та зростає при $x\in(0;\infty)$, а при $x=0$ вона має мінімум: $y_{min}=y(0)=ln1=0$.

6.2. Найбільше та найменше значення функції

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого и найменшого значення. Ці значення досягаються або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму. Для їх визначення необхідно найти все критичні точки, які належать відрізку $[a,b]$, після чого слід обчислити значення даної функції в цих точках и на кінцях відрізка, а потім з отриманих значень функції вибрати найбільше та найменше. Вони позначаються так:

найбільше – $\max\limits_{[a,b]} f(x)$, найменше – $\min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Приклад . Знайти найбільше и найменше значення функції $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ на відрізку $[-2,1]$.

Рішення. Найдем $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ и критичні точки з рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Даному відрізку $[-2,1]$ належить тільки точка $x = -1$.

Обчислимо значення функції в цієї точці и на кінцях даного відрізка. Получим:

$f(-1) = 17$; $f(-2) = 6$; $f(1) = -3$.

Вибираємо з отриманих значень найбільше и найменше:

$\max\limits_{[-2,1]} f(x) = 17$, $\min\limits_{[-2,1]} f(x) = -3$.

6.3. Опуклість та угнутість кривої. Точки перегину.

Щоб знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції $y = f(x)$, необхідно знайти точки, в котрих $f''(x) = 0$ або не існує, а потім з'ясувати знак $f''(x)$ в проміжках між цими точками. При цьому, якщо $f''(x) < 0$ на деякому проміжку, то графік функції є опуклим на цьому проміжку, а якщо $f''(x) > 0$ – угнутий. Точки, які з'єднають опуклу та угнуту частини графіка, є точками перегну.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37$.

Рішення. Очевидно, $x \in R$. Знайдемо y' и y'':

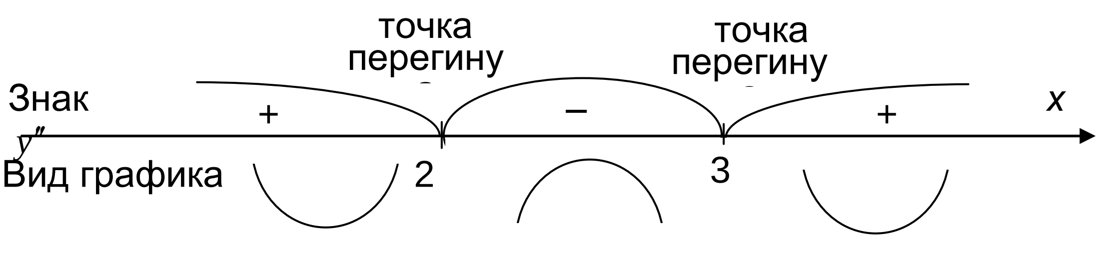
$$y' = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 31, \quad y'' = 12x^2 - 60x + 72.$$

Вирішуємо рівняння $y'' = 0$, тобто $12x^2 - 60x + 72 = 0$, відкіля $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Тоді: $y'' = 12(x-2)(x-3)$.

Точки $x = 2$ и $x = 3$ розбивають числову вісь на три інтервали (дивись рисунок).

З'ясуємо знак y'' в цих інтервалах и вид графіка.



Обчислимо: $f(2)=-19$, $f(3)=5$.

Тоді, дана функція має дві точки перегину $(2;-19)$ и $(3;5)$, при цьому на інтервалах $(-\infty;2)$ и $(3;\infty)$ графік угнутий, а на $(2;3)$ – опуклий.

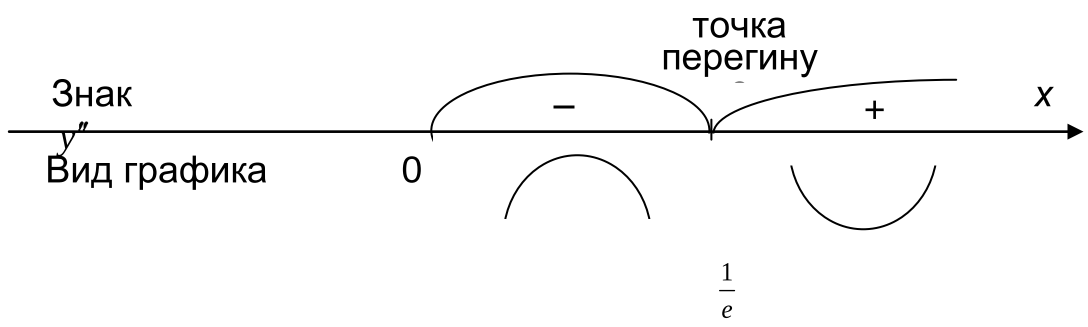
Приклад. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції $y=x\ln^2 x$.

Рішення. Область визначення функції: $D(y)=(0;\infty)$.

Знайдемо y' та y'': $y'=\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln^2 x+2\ln x$;

$$y''=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}(\ln x+1).$$

Далі, $y''=0$, якщо $\ln x+1=0$, тобто $\ln x=-1$, а $x=\frac{1}{e}$. Ета критична точка ділить область визначення на два інтервали. З’ясуємо знак y'' в цих інтервалах.



Тобто, графік функції є опуклим при $x\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$, та угнутим при $x\in\left(\frac{1}{e};\infty\right)$, а точка $x=\frac{1}{e}$ є точкою перегину.

6.4. Асимптоти

При побудові графіків функцій велику роль грають асимптоти кривих. Розрізняють три види асимптот: вертикальні, горизонтальні та похилі.

Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існують кінцеві границі

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Горизонтальна асимптота $y = b$ є окремий випадок похилої асимптоти $y = kx + b$.

Приклад. Найти асимптоти кривої $y = \dfrac{-x^2 + 3x}{x - 1}$.

Рішення. Крива має вертикальну асимптоту $x = 1$, оскільки $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x^2 + 3x}{x - 1} = \infty$.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2 + 3x}{(x - 1)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x + 3}{x - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 3x}{x - 1} + x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2.$$

Тобто, пряма $y = -x + 2$ є похилою асимптотою.

Горизонтальних асимптот немає.

6.5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Загальне дослідження функції рекомендується проводити за наступною схемою:

знайти область визначення функції;

дослідити функцію на парність та непарність;

знайти точки перетину графіка функції с осями координат;

знайти асимптоти графіка функції;

знайти інтервали монотонності и екстремуми;

знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину;

побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x^2}{x - 1}$ и побудувати її графік.

Рішення.

1. Область визначення: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Функція є ані парною, ані непарною.

3. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою, оскільки $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2}{x-1} = \infty$.

Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ знайдемо границі:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = 2; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

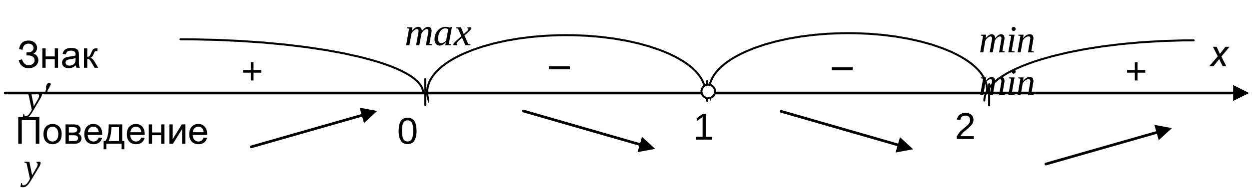
Таким чином, пряма $y = 2x + 2$ є похилою асимптотою.

5. Знайдемо інтервали монотонності и екстремуми функції.

$$y' = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$.

Дослідимо ці точки на екстремум:

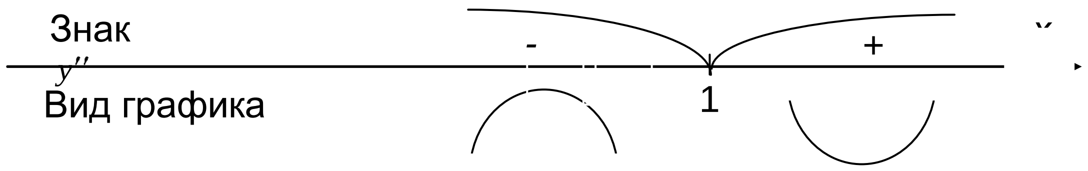


$y_{max}(0) = 0, \qquad y_{min}(2) = 8.$

6. Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину:

$$y'' = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x)}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Оскільки $y'' \neq 0$, то точок перегину нема. З'ясуємо знак y'' в інтервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$.



7. Строим график данной функции (рис.6.2).

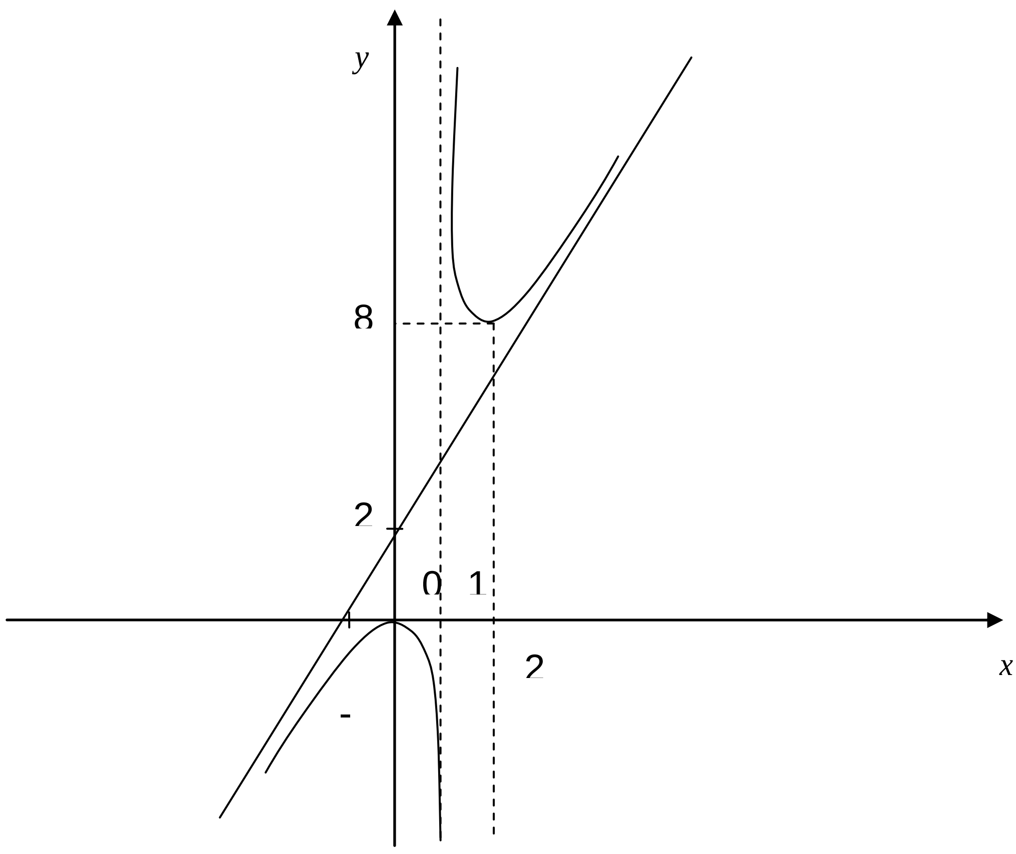


Рис. 6.2

Лекція 7. Диференціальне числення функції декілька змінних

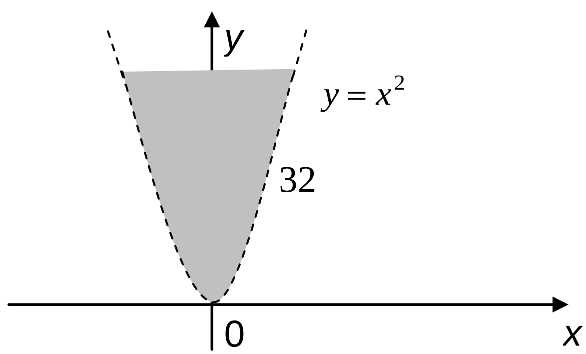
7.1. Основні поняття функції декількох змінних

Змінна величина z називається функцією двох змінних x і y, якщо кожній парі значень (x, y) з множини D відповідає одне визначене значення змінної z.

Множина D називається областю визначення функції z.

Приклад. Знайти область визначення функції $z = log_3 (y - x^2)$.

Розв'язання. Очевидно, що функція z визначена, коли $y - x^2 > 0$, тобто при $y > x^2$. Останньої нерівності задовольняють точки, які



розташовані всередині параболи $y = x^2$ (рис. 7.1).

Рис. 7.1

7.2. Диференційованість функції декількох змінних. Частинні похідні

При обчисленні частинних похідних функції двох змінних можна використовувати вже відомі правила та формули диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну постійною.

Частинні похідні функції більшого числа змінних визначаються також в припущенні, що змінюється тільки одна з незалежних змінних, а останні при цьому залишаються постійними.

Позначаються частинні похідні символами $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ або z'_x, z'_y.

Приклад. Знайти частинні похідні функції $z = ln(2x - y^2)$.

Розв’язання. При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial x}$ вважаємо змінну y постійною, а при знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ – x постійною. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x - y^2}\left(2x - y^2\right)'_x = \frac{2}{2x - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2x - y^2}\left(2x - y^2\right)'_y = \frac{-2y}{2x - y^2}.$$

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються частинними похідними другого порядку функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^3 + 3x^2 y - 2y^3$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 6y^2.$$

Далі знаходимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3x^2 + 6xy\right)'_x = 6x + 6y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(3x^2 + 6xy\right)'_y = 6x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(3x^2 - 6xy\right)'_x = 6x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(3x^2 - 6xy\right)'_y = -12y.$$

7.3. Похідна за напрямом

Похідна функції $z = f(x, y)$ за напрямом вектору $\bar{l}(cos\,\alpha; cos\,\beta)$, де α і β – кути з осями координат, знаходиться за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} cos\,\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} cos\,\beta .$$

Величина $\frac{\partial z}{\partial l}$, яка обчислена в точці $M(x_0, y_0)$, визначає швидкість зміни функції z в напрямку $\bar{l}$, а її знак – зростання чи убування функції.

Приклад. Знайти похідну функції $z = x^2 y^2 + 2x - 2y$ в точці $M(2; 2)$ в напрямку вектора, який утворює з осями координат кути $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Розв’язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y - 2;$$

потім обчислимо їх в точці $M(2, 2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 18, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 14.$$

Отже, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M = 18 cos\,60° + 14 cos\,30° = 18 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 + 7\sqrt{3}$.

7.4. Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції z в точці $M(x, y)$: $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$.

Градієнт вказує напрямок найбистрішого зростання функції в даній точці.

У випадку $u = f(x, y, z)$ градієнт функції дорівнює:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,.$$

Приклад. Знайти градієнт функції $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точці $M(3; 4)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{3y}{2\sqrt{3xy}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3 + \frac{3x}{2\sqrt{3xy}};$$

потім обчислимо їх значення в точці $M(3; 4)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 1 + \frac{3\cdot 4}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}} = 2, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -3 + \frac{3\cdot 3}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}} = -\frac{9}{4}.$$

Отже, $(grad z)_M = 2\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j}$.

7.5. Екстремум функції двох змінних

Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має в точці $M(x_0, y_0)$ екстремум, то в цій точці виконуються рівності:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

які є необхідними умовами екстремуму, а точка $M(x_0, y_0)$ називається стаціонарною.

Цю точку необхідно досліджувати за допомогою достатніх умов екстремуму, які формулюються нижче.

Позначимо $\Delta = AC - B^2$, де

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M, \qquad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M.$$

Тоді:

1. Якщо $\Delta > 0$, то M – точка екстремуму (точка максимуму при $A < 0$ і точка мінімуму при $A > 0$).
2. Якщо $\Delta < 0$, то в точці M немає екстремуму.
3. Якщо $\Delta = 0$, то треба додаткове дослідження.

Приклад. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + yx + 2y^2 - x + 3y + 2$.

Розв'язання. Для знаходження екстремумів функції спочатку знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 4y + 3,$$

а потім критичну точку, розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x + 4y + 3 = 0, \end{cases}$

звідки маємо $x = 1$, $y = -1$.

Отже, $M(1, -1)$ – критична точка.

Використаємо достатні умови для дослідження цієї точки на екстремум. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4.$$

В точці $M(1, -1)$ $A = 2, B = 1, C = 4$,

тоді $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 4 - 1 = 7 > 0$.

Отже, в точці $M(1, -1)$ є екстремум, причому мінімум, оскільки $A > 0$.

$$z_{\min} = 1 - 1 + 2 - 1 - 3 + 2 = 0.$$

Лекція 8.
Інтегральне числення

8.1. Визначення первісної

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$. Абияка неперервна функція $f(x)$ має нескінчену множину первісних, які відрізняються один від іншого постійними доданками.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$, де $C = const$, для даної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від цієї функції. Невизначений інтеграл позначається символом $\int f(x)dx$, де $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Знаходження невизначеного інтегралу деякої функції називається інтегруванням.

Приклад. Хай $f(x) = x^2 - \sin x$, тоді одна з первісних для $f(x)$ є $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x$, оскільки $\left(\frac{x^3}{3} + \cos x\right)' = x^2 - \sin x$.

Отже, $\int (x^2 - \sin x)dx = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$.

8.2. Основні властивості невизначеного інтегралу (основні правила інтегрування)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k - const.$
3. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$
5. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

8.3. Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

8. $\int \frac{dx}{sin^2\ x} = -ctg\ x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C.$

17. $\int tgxdx = -ln|cos\, x| + C.$

18. $\int ctgxdx = ln|sin\, x| + C.$

8.4. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування базується на прямому використанні основних властивостей невизначеного інтегралу і таблиці основних інтегралів.

Розглянемо ряд прикладів безпосереднього інтегрування.

Приклад.

$$\int \sqrt[3]{x^2}\left(8\sqrt[3]{x} - 1\right)dx = \int\left(8x - x^{2/3}\right)dx = 8\int xdx - \int x^{2/3}dx =$$

$$= 8\frac{x^2}{2} - \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = 4x^2 - \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Приклад.

$$\int \frac{2 - 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{-5/6}dx + 5\int\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2x^{-1/2}}{-1/2} - 3\frac{x^{1/6}}{1/6} + 5\ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} - 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C.$$

Приклад.

$$\int\frac{x^2}{4-x^2}dx = \int\frac{x^2-4+4}{4-x^2}dx = \int\left(-1+\frac{4}{4-x^2}\right)dx = -\int dx + 4\int\frac{dx}{4-x^2} =$$

$$= -x + 4\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C = -x + \ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C.$$

Приклад.

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C\,.$$

Приклад.

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int\frac{\left(1+x^2\right)+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C\,.$$

8.5. Інтегрування способом підстановки

В основі інтегрування способом підстановки (або заміни змінної) лежить властивість інваріантності формул інтегрування, яке полягає в наступному: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = u(x)$ – довільна диференційована функція від *x*.

Заміна змінної в невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановок двох видів:

1) $x = \varphi(t)$, де $t -$ нова змінна, а $\varphi(t)$ – неперервно диференційована функція, тоді $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Функцію $\varphi(t)$ намагаються підібрати таким чином, щоб права частина останньої формули мала би більш зручний для інтегрування вигляд;

2) $t = \varphi(x)$, де *t* – нова змінна, тоді $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$.

Приклад. Знайти $\int \frac{ln^2 x}{x}dx$.

Розв’язання. Нехай $\ln x = u$, тоді $\frac{dx}{x} = du$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9 - e^{2x}}}$.

Розв’язання. Хай $e^x = t$, тоді $e^x dx = dt$.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9 - e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x}$.

Розв’язання. Хай $\sin x = t$, тоді $\cos x dx = dt$.

$$\int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{\sin x}{2} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розв’язання. Хай $\sqrt[3]{x} = t$, тоді $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = dt$.

$$\int \frac{cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int cos\sqrt[3]{x}\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = 3\int cos\,tdt = 3sin\,t + C = 3sin\sqrt[3]{x} + C\,.$$

8.6. Інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами має вигляд: $\int udv = uv - \int vdu$,
де u,v – диференційовані функції від x.

До числа інтегралів, які беруться частинами, відносяться, наприклад, інтеграли виду: $\int P(x)f(x)dx$,
де $P(x)$ – многочлен, а $f(x)$ – одна з наступних функцій:

$e^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\ln x$, $arctgx$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

При цьому в інтегралах такого виду за u слід брати $P(x)$, а за dv – $e^{\alpha x}dx$, $\cos\alpha xdx$, $\sin\alpha xdx$, якщо $f(x)$ – відповідно e^{ax}, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$. В останніх випадках за u приймають функції $ln\,x$, $arcsin x$, $arctgx$, $\arccos x$, а за dv – вираз $P(x)dx$.

Приклад. Знайти $\int\frac{ln\,x}{x^3}dx$.

Розв’язання.

$$\int\frac{ln\,x}{x^3}dx = \begin{vmatrix} u = ln\,x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^3} & v = -\frac{1}{2x^2} \end{vmatrix} = -\frac{ln\,x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{ln\,x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C\,.$$

Зауважимо, що в якості v беруть одну з множини первісних.

Приклад. Знайти $\int(x+1)sin\,xdx$.

Розв’язання.

$$\int(x+1)\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x+1, & du = dx, \\ dv = \sin xdx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1)\cos x + \int\cos xdx = \sin x - (x+1)\cos x + C.$$

Приклад. Знайти $\int arctgxdx$.

Розв’язання.

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,.$$

8.11. Визначений інтеграл та його властивості

Хай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин точками $x = a < x_1 < ... < x_n = b$. Оберемо в кожному частинному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ точку ξ_k и позначимо довжину такого відрізку через Δx_k.

Утворимо суму $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, яка називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Величина S_n залежить від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на частинні і від вибору точок в цих частинних відрізках. Хай $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$. Розглянемо таку послідовність інтегральних сум S_n, для якої $\lambda \to 0$ (при цьому $n \to \infty$).

Границя послідовності інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$, якщо він існує и не залежить від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на частинні і від вибору точок ξ_k в кожному частинному відрізку, називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Функцію $f(x)$ в цьому випадку називають інтегрованою на відрізку $[a;b]$.

Неперервні на $[a;b]$ функції – інтегровані. Серед розривних на $[a;b]$ функцій є також інтегровані.

За означенням:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Перечислимо властивості визначеного інтеграла, вважаючи, що усі підінтегральні функції – інтегровані на відповідних відрізках.

1. Властивість лінійності:

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x))dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx \pm k_2\int_a^b f_2(x)dx, \quad (k_1, k_2 - const).$$

2. Властивість адитивності:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Властивість позитивності:

$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, якщо $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$.

4. Властивість інтегрованості нерівності:

$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$, якщо $f(x) \geq \varphi(x)$ на $[a;b]$.

5. Теорема про оцінку інтегралу:

$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$,

де m,M – відповідно найменше і найбільше значення $f(x)$ на $[a;b]$.

6. Теорема про середнє:

$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, якщо $c \in [a;b]$, $f(x)$ неперервна на $[a;b]$.

Далі розглянемо питання обчислення визначеного інтегралу.

8.12. Формула Ньютона – Лейбниця для обчислення визначених інтегралів

Якщо $F(x)$ є деяка первісна для $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Таким чином, задача обчислення визначеного інтегралу фактично зводиться до задачі обчислення невизначеного інтегралу.

Приклад. Обчислити $I = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона – Лейбниця, маємо:

$$I = \int\limits_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} dx = \frac{(11+5x)^{-2}}{-2\cdot 5}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{360} + \frac{1}{10} = \frac{7}{72}.$$

8.13. Заміна змінної у визначеному інтегралі

При обчисленні інтегралу способом заміни змінної заміняють змінну інтегрування x новою змінною t за допомогою підстановки $t = \varphi(x)$ за умовою існування оберненої функції $x = \varphi(t)$. При цьому необхідно перейти від границь інтегрування a і b до нових границь інтегрування змінної t: $t_1 = \varphi(a)$, $t_2 = \varphi(b)$ або використовуючи співвідношення $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$.

Вибір підстановки визначається тими же міркуваннями, що і при находженні невизначеного інтегралу.

Приклад. Обчислити $I = \int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Розв'язок. Нехай $ln\, x = t$, тоді $\frac{dx}{x} = dt$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsin t\Big|_0^1 = arcsin 1 - arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

8.14. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі виконується за формулою: $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$.

Вибір u, dv у вихідному інтегралі визначається тими ж міркуваннями, що й при інтегруванні частинами у невизначеному інтегралі.

Приклад. Обчислити $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x dx$.

Розв'язання. Хай $u = 2 - x$, $dv = sin 3x dx$, тоді $du = -dx$, $v = -\frac{1}{3}cos 3x$.

$$I = -\frac{(2-x)\cos 3x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{3} dx = \frac{-(2-x)\cos 3x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sin 3x}{9}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \left(0 + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{9} - 0\right) = \frac{5}{9}.$$

8.17. Площа плоскої фігури

Площа криволінійної трапеції, тобто фігури, яка обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, прямими $x = a, x = b$ та віссю Ох (рис. 8.1), обчислюється за формулою $S = \int\limits_a^b f(x) dx$.

Площа фігури, яка обмежена двома неперервними кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $(f_1(x) \le f_2(x))$ та прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 8.2), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx,$$

незалежно від розташування фігури відносно осі абсцис.

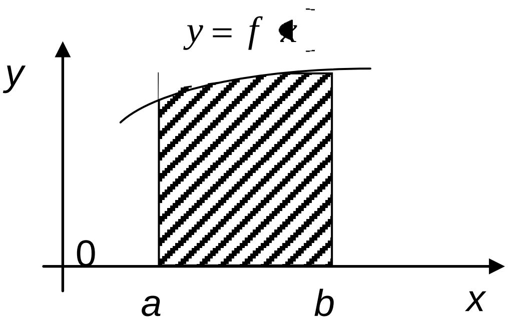


Рис. 8.1

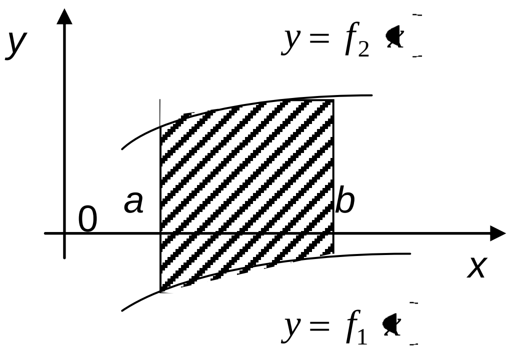


Рис. 8.2.

Приклад. Знайти площа фігури, яка обмежена лініями
$y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.

Розв'язок. Знайдемо точки перетину параболи і прямої, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2, \end{cases}$$

звідки $4 - x^2 = x + 2$, $x^2 + x - 2 = 0$. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Зробимо креслення до задачі (рис. 8.3).

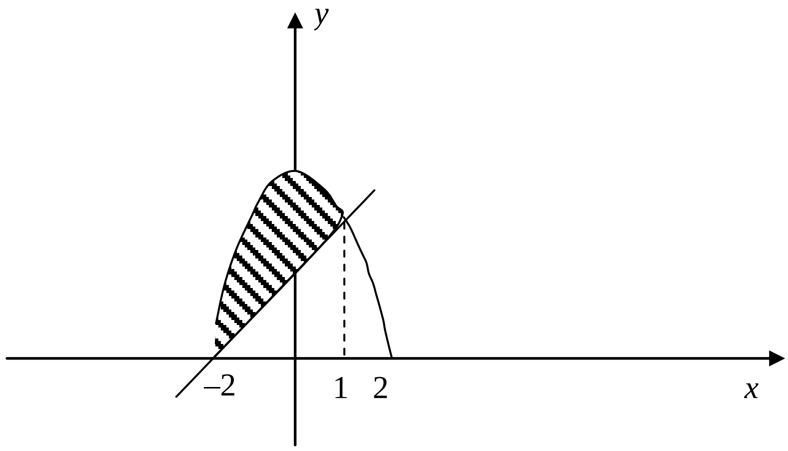


Рис. 8.3

Шукана площа:

$$S = \int_{-2}^{1} \left((4 - x^2) - (x + 2)\right)dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

Лекція 9.

Диференціальні рівняння

9.1. Основні поняття

Рівняння, яке пов'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідні або диференціали різних порядків, називається *звичайним диференціальним рівнянням.*

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, яка входить у дане рівняння.

Наприклад, рівняння $y' \sin x + y \cos x = 1$ і $(y')^2 - 2x = 0$ – першого порядку, а рівняння $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x$ – другого порядку.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку, $y' = f(x, y)$, називається функція $y = f(x, C)$ з довільною константою C, яка задовольняє цьому рівнянню. Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою рівняння (*інтеграл рівняння*).

Частинним *розв'язком диференціального рівняння* першого порядку є функція загального розв'язку, $y = f(x, C)$, з конкретною константою C, яка знаходиться з початкової умови: $y(x_0) = y_0$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку, $y'' = f(x, y, y')$, називається функція $y = f(x, C_1, C_2)$ з двома довільними константами, C_1, C_2, яка задовольняє цьому рівнянню.

Частинним *розв'язком диференціального рівняння* другого порядку є функція $y = f(x, C_1, C_2)$, з конкретними константами C_1, C_2, які знаходяться з початкових умов:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 .$$

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння.*

9.2. Диференціальне рівняння першого порядку

Загальні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ або } y' = f(x, y).$$

Загальним розв'язком рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x, C)$, де C –довільна постійна.

Рівняння із змінними, що розділяються.

Диференціальне рівняння із змінними, що розділяються, має вигляд:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 .$$

Розділивши обидві частини рівняння на $N_1(y)M_2(x)$, одержимо рівняння

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 ,$$

в якому змінні розділені. Почленно інтегруючи рівняння, одержимо загальний інтеграл:

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 .$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0 .$$

Розв'язання. Розділимо змінні в даному рівнянні, поділивши обидві його частини на $(4+x^2)\sqrt{9-y^2}$:

$$\frac{x}{4+x^2}dx - \frac{y}{\sqrt{9-y^2}}dy = 0 .$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо:

$$\int\frac{x}{4+x^2}dx - \int\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}dy = 0 ,\ \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + \sqrt{9-y^2} + \ln C = 0 ,$$

або

$$ln C^2(4+x^2) + 2\sqrt{9-y^2} = 0 .$$

Це і є загальний інтеграл даного рівняння.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = 2\sqrt{y}\,ln\,x$, який задовольняє початковим умовам: $y(e) = 1$.

Розв'язання. Поділяючи змінні у даному рівнянні, одержимо:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\,ln\,x , \quad \text{або} \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = ln\,xdx .$$

Інтегруючи, знаходимо загальний інтеграл рівняння:

$$\sqrt{y} = x \ln x - x + C,$$

де інтеграл $\int \ln x dx$ знаходиться інтегруванням частинами.

Використовуючи початкові умови $y(e)=1$, підставимо у загаль-ний інтеграл рівняння $x=e, y=1$ і знайдемо константу C:

$$1 = e \ln e - e + C, \text{ звідси } C = 1.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y = (x \ln x - x + 1)^2$.

Однорідні рівняння

Рівняння виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ називається *однорідним*, якщо $P(x,y), Q(x,y)$ – однорідні функції одного виміру. Однорідне рівняння завжди може бути приведено до вигляду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Підстановка $u = \frac{y}{x}$ приводить рівняння до рівняння із змінними, що розділяються.

Приклад. Проінтегрувати рівняння $2x^2 dy = (x^2 + y^2)dx$.

Розв'язання. Поділивши обидві частини рівняння на $x^2 dx$, одержимо:

$$2\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Положимо $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$, $y' = u'x + u$.

Тоді маємо:

$$2xu' + 2u = 1 + u^2, \; 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2 - 2u, \; \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи і підставляючи $\frac{y}{x}$ замість u, одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \; -\frac{2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln Cx, \; Cx = e^{-\frac{2x}{y-x}}.$$

При розділенні змінних ми ділили на x і це можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 1$.

Лінійні рівняння

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лі-нійно відносно шуканої функції y та її похідної y'.

Загальний вигляд лінійного рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$.

Розв'язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$, де $u(x)$ и $v(x)$ – дві невідомі функції. Підставляючи у дане рівняння $y = uv$ та $y' = u'v + uv'$ та групуючи доданки, одержуємо :

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Оскільки рівнянню задовольняє тільки додаток uv, то одна з функцій u або v може бути обрана довільно. Нехай v – частинний розв'язок рівняння $v' + P(x)v = 0$. Підставляючи одержаний з цього рівняння вираз $v = v(x)$, одержуємо рівняння відносно функції u:

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x),$$

яке є рівнянням з змінними, що розділяються. Знаходячи загальний розв'язок цього рівняння у вигляді $u = u(x,c)$, одержимо загальний розв'язок даного лінійного рівняння $y = u(x,c)v(x)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - yctgx = \frac{1}{sin\,x}$.

Розв'язання. Вважаємо $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$, і дане рівняння приймає вигляд:

$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{sin\,x},$$

$$u'v + u(v' - vctgx) = \frac{1}{sin\,x}. \qquad (*)$$

Розв'язуючи рівняння $v' - vctgx = 0$, знайдемо його простішій частинний розв'язок: $\frac{dv}{dx} = vctgx$, $\frac{dv}{v} = ctgxdx$, $ln|v| = ln|sin\,x|$.

Звідси випливає: $v = sin\,x$. Підставляючи це v у рівняння $(*)$, одержуємо наступне рівняння $u' sin\,x = \frac{1}{sin\,x}$, з котрого знаходимо u:

$$\frac{du}{dx}\sin x=\frac{1}{\sin x},\ du=\frac{dx}{\sin^2 x},\ u=-ctgx+C.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок:

$$y=uv,\ y=(C-ctgx)\sin x,\ y=C\sin x-\cos x.$$

9.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Однорідні рівняння

Рівняння вигляду $ay''+by'+cy=0$, де a, b, c – постійні, називається *лінійним однорідним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

Для визначення загального розв'язку рівняння складаємо характеристичне рівняння

$$ak^2+bk+c=0. \qquad (*)$$

В залежності від характеру коренів характеристичного рівняння будується загальний розв'язок даного рівняння:

а) якщо рівняння ($*$) має дійсні і різні корені,

$k_1\neq k_2$, то $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$;

б) якщо $k_1=k_2=k_0$, то $y=C_1e^{k_0x}+C_2e^{k_0x}x$;

в) якщо рівняння (*) має комплексно-спряжені корені

$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок наступних рівнянь:

а) $2y''+5y'+2y=0$; б) $y''+4y'+4y=0$; в) $y''-4y'+13y=0$.

Розв'язання. Для кожного з рівнянь складаємо характеристичне рівняння:

а) $2k^2+5k+2=0$, $k_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\dfrac{-5\pm 3}{4}$,

$k_1=-2$, $k_2=-\dfrac{1}{2}$; $\qquad y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$;

б) $k^2+4k+4=0$, $\qquad k_1=k_2=-2 \qquad y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$;

в) $k^2-4k+13=0$, $\qquad k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm 3i$,

$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

Загальний розв'язок даного рівняння $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

Для визначення частинного розв'язку використовуємо початкові умови $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

Знайдемо $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$.

Одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10, \end{cases} \text{ звідси витікає } \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Підставивши ці значення в загальний розв'язок та знайдемо його частинний розв'язок:

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

Лекція 10.
Ряди

10.1. Числові ряди. Основні поняття

Числовим рядом зветься вираз виду

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

де числа $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$, які звуться *членами ряду*, складають нескінченну послідовність.

Число u_n зветься *загальним членом ряду*.

Конечна сума $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$ зветься *$\underline{n}$-ю частковою су-мою ряду.*

Якщо існує конечна границя $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, то ряд зветься **збіжним**, а в протилежному випадку – **розбіжним**.

Якщо ряд збігається, то число $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ зветься сумою ряду.

Приклад. За загальним членом ряду $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ записати ряд та знайти его суму.

Рішення. Даючи n послідовно значення 1,2,3,…, отримаємо:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Для знаходження суми ряду необхідно знайти:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Перетворимо S_n наступним чином:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Ясно, що в цієї сумі попарно знищуються усі доданки, крім першого та останнього, тому $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$.

Відкіля: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$,

тобто ряд збігається та його сума дорівнює 1.

10.2. Признаки збіжності рядів з додатними членами. Необхідний признак збіжності рядів.

Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ - необхідний признак збіжності ряду.

Якщо ж $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається – достатній признак розбіжності ряду.

Якщо, однак, виконується умова $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то це ще недостатньо для ствердження про збіжність ряду. Для цього використовуються наступні достатні признаки збіжності.

Ознака порівняння числових рядів

Якщо члени додатного ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (1)$$

починаючи з деякого номера, не перевищують відповідних членів ряду

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (2)$$

то з факту збіжності ряду (2) випливає збіжність ряда (1), а з факту розбіжності ряда (1) – розбіжність ряда (2).

Для порівняння можна використати еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, який збігається при $\alpha>1$ та розбігається при $\alpha\le 1$. У випадку $\alpha=1$ ряд зветься *гармонічним*.

Гранична форма ознаки порівняння числових рядів

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ – є рядами з додатними членами та існує конечна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k \quad (k>0),$$

яка відрізняється від нуля, то дані ряди одночасно збігаються або розбігаються.

Ознака Даламбера

Якщо для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд збігається, а при $l>1$ – розбігається (при $l=1$ питання потребує додаткових досліджень).

Радикальна ознака Коши

Якщо для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то цей ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$ (при $l=1$ питання потребує додаткових досліджень).

Інтегральна ознака Коши

Нехай задано ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)+...,$$

причому функція $f(x)$ неперервна, додатна та монотонно спадна при $x\ge 1$. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)+...$$

та невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно. Звичайно позначають: $u_n = f(n)$.

Приклад. Використовуючи необхідну ознаку збіжності, показати, що ряд $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\ldots+\frac{2n}{2n+1}+\ldots$ розбігається.

Рішення. Знаходимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} = 1$.

Тобто, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тому даний ряд розбігається.

Приклад. дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ на збіжність за допомогою ознаки порівняння.

Рішення. Загальний член даного ряда:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} = v_n .$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається як гармонічний та $u_n > v_n$, то даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ теж розбігається.

Приклад. Використовуючи граничну форму порівняння, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

Рішення. 1. Як відомо, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$. Оскільки гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, то розбігається и даний ряд.

2. порівняємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$ зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^3}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=1.$$

Оскільки границя цього відношення відрізняється від нуля і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, то збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

Приклад. Використовуючи ознаку Даламбера, дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Рішення. Тут: $u_n=\frac{3^n n!}{n^n}$, $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$,

тому $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{3^n n!}{n^n}=\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Як слід, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$, оскільки $e\approx 2{,}7$,

і тому даний ряд розбігається.

Приклад. Використовуючи радикальну ознаку Коши дослідити збіжність ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Рішення. Для даного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3e}<1.$$

Як слід, ряд збігається.

Приклад. Використовуючи інтегральнуознаку, дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+5}.$$

Рішення. Тут $u_n=\frac{n}{n^2+5}$. Вважаючи $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$, застосуємо інтегральну ознаку збіжності:

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+5}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{xdx}{x^2+5}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)\Big|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left(b^2+5\right)-\ln 6\right)=\infty .$$

Таким чином, даний ряд розбігається.

Література

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 2002. – 384 с.

Вища математика. Ч. 1, 2 / за ред. проф. Кулініча. – К. : Либідь, 1994. – Ч. 1. – 308 с.; Ч. 2. – 276 с.

Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 440 с.

Данко П. Е. Висшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – М. : Висш. шк.. 1986. – Ч. 1. – 304 с.; Ч. 2. – 416 с.

Кудрявцев В. А.. Краткий курс висшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – М. : Наука, 1978. – 415 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : практичний посібник до розв’язання задач. Ч. 1, 2 / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – Ч. 1. – 304 с.; Ч. 2. – 476 с.

Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М. : Наука, 1999. – 464 с.

Шипачев В.С. Основи высшей математики / В. С. Щипачев. – М. : Высшая школа, 1998. – 480 с.

Зміст