МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних робіт
з навчальної дисципліни «ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Вступ

Основною формою занять студента-заочника є самостійна робота над теоретичним матеріалом і виконання практичних завдань.

Практичні завдання, які повинен виконати студент в межах програми навчальної дисципліни «Дослідження операцій і методи оптимізації», містить завдання, які безпосередньо пов'язані з питаннями організації і планування виробництва, оптимізації різних сфер його діяльності. Компетентності, які набуває студент під час роботи над навчальним матеріалом, також потрібні для створення у нього як у майбутнього фахівця теоретичної бази, яка потрібна сучасному економісту.

Перед виконанням практичних завдань студент повинен ознайомитися з теоретичним матеріалом, який викладається в методичних рекомендаціях кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, а також в рекомендованій літературі з даної дисципліни. Студенту треба виконати чотири завдання, номери яких визначаються відповідно до номеру, під яким прізвище студента знаходиться в списку навчальної групи. Допомогу у розв’язанні кожного завдання студент може отримати, розглянувши приклади виконання нульового варіанту.

Робота оформлюється в окремому зошиті, при цьому рішення кожного наступного завдання необхідно починати з нової сторінки. Рішення завдань наводяться в порядку зростання їх номерів. Безпосередньо викладу вирішення кожного завдання повинно передувати її умова.

Формування компетентностей сучасного фахівця передбачає оволодіння обчислювальною технікою, тому обчислення, які необхідно здійснювати в процесі виконання завдань, доцільно виконувати на комп'ютері із застосуванням програмного середовища MS Excel. Для перевірки результатів обчислення можна застосовувати вбудовані функції і надбудови MS Excel, однак це не виключає необхідності застосування алгоритму розрахунків, запропонованого в наведеному в даному посібнику зразку виконання нульового варіанту кожного завдання.

Завдання 1. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Використовуючи графічний метод, визначити оптимальний план і відповідне цьому плану значення цільової функції задачі лінійного програмування, математична модель має вигляд:

$$z = 2x_1 + 5x_2 \quad \to \quad \max; \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 - 5 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Розв'язання. Дана математична модель задачі лінійного програмування містить функцію двох змінних, яка досліджується на максимум (1.1), і систему нерівностей (1.2), яка описує обмеження, що накладається на значення аргументів цієї функції.

Множина розв'язків системи обмежень (1.2) є множиною планів задачі лінійного програмування. Ці розв'язки утворюють багатокутник планів. Оскільки аргументи цільової функції не можуть бути від'ємними, тобто існує обмеження на знак, то багатокутник планів задачі лінійного програмування знаходиться у І-ой чверті координатної площини. Оптимальним є той план, при якому цільова функція досягає екстремуму необхідного виду.

Побудуємо багатокутник планів, який визначається системою обмежень (1.2) даної моделі. Для цього нерівності основної системи обмежень перетворимо в рівняння і на координатної площині проведемо прямі, що відповідають цим рівнянням.

Координати двох точок, через які проводимо пряму, можна визначити, наприклад, привівши її рівняння до вигляду:

$$L: \quad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1,$$

де a та b – відрізки, що відтинає пряма L на осях $0x_1$ та $0x_2$.

За цим рівнянням отримуємо координати точок $(a;\,0)$ та $(0;\,b)$, що належать прямій L.

У розглянутому прикладі для знаходження багатокутника планів, який визначається системою обмежень (1.2), у І-ой чверті координатної площини (з урахуванням обмеження на знак: $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$) побудуємо прямі:

$$L_1: \quad 4x_1 + 5x_2 = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{8} = 1;$$

$$L_2: \quad 2x_1 + 3x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1;$$

$$L_3: \quad -x_1 + x_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{5} = 1;$$

$$L_4: \quad x_2 = 1.$$

Потім для кожної з цих прямих визначимо ту півплощину, в якій ця нерівність виконується. З цією метою в досліджувану нерівність підставимо координати будь-якої точки (за умови, що вона не належить даній прямій). Наприклад, для першого нерівності системи (1.2) вибираємо точку $O\ (0;\,0)$ і підставляємо її координати у першу нерівність. Отримуємо: $4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 40$. Оскільки ми отримуємо нерівність, що виконується як правильна числова нерівність, то ця точка належить тій півплощини, в якій ця нерівність є вірною. Зазначимо цю півплощину стрілками, перпендикулярними до прямої L_1 (рис. 1.1).

Повторивши цю операцію для кожного нерівності основної системи обмежень, знаходимо ту частину площині, де виконуються всі нерівності системи обмежень, вона і є багатокутником планів даного завдання лінійного програмування (на рис. 1.1 багатокутник планів заштриховано). Координатами точок $\mathbf{X}(x_1;\,x_2)$, які утворюють багатокутник планів, є всі можливі розв'язки системи обмежень (1.2).

Тепер серед цих планів потрібно вибрати оптимальний план $\mathbf{X}^*(x_1^*;\,x_2^*)$, при якому цільова функція (1.1) буде досягати максимального значення: $z_{\max} = z(\mathbf{X}^*)$.

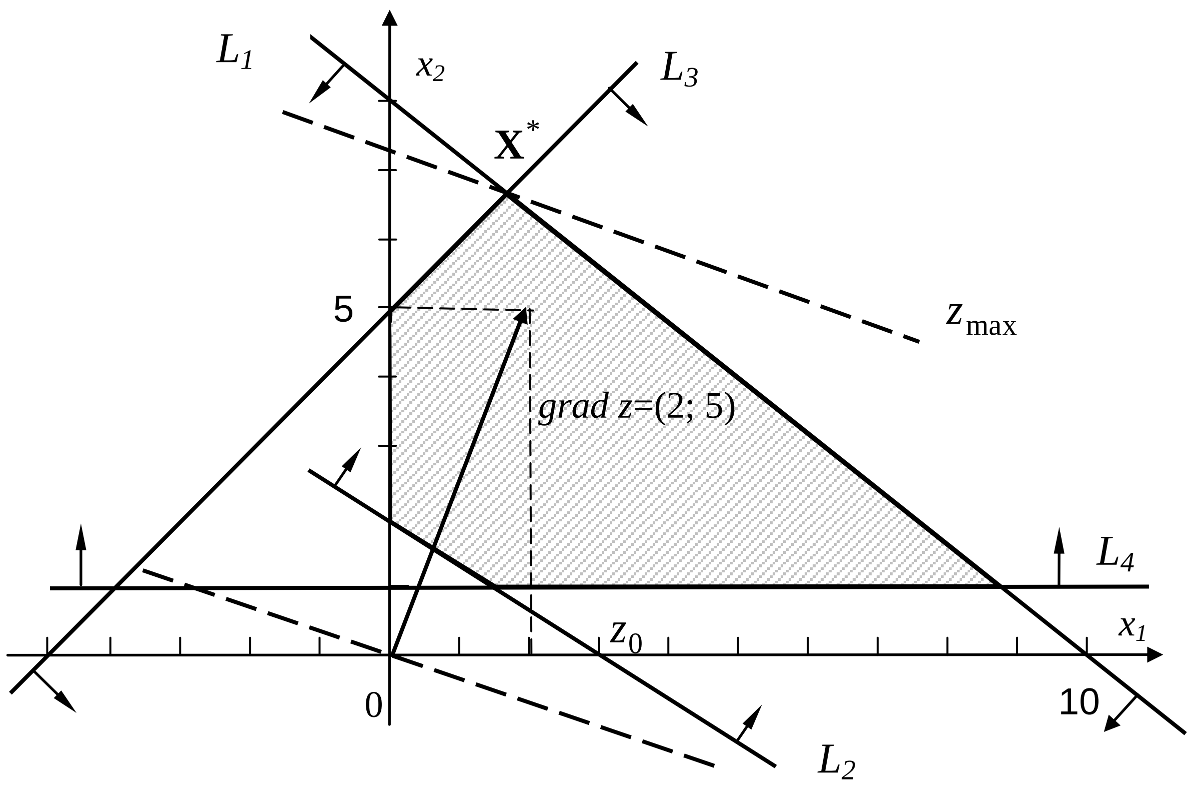

Рис. 1.1. **Графический метод решения задачи линейного программирования**

Критерієм ефективності, за яким будемо порівнювати всі можливі плани, є значення цільової функція $z(\mathbf{X}) = 2x_1 + 5x_2$. У даній задачі вона досліджується на максимум. Цільова функція досягає екстремального значення в одній з вершин багатокутника планів (або на його стороні, якщо таким умовам відповідають дві кутових точки).

Для визначення оптимального плану побудуємо $grad\, z$, тобто вектор, що вказує напрям найбільш швидкого зростання функції. Координатами цього вектора для лінійної функції є коефіцієнти перед її аргументами. Згідно з математичною моделлю задачі за коефіцієнтами цільової функції (1.1) маємо: $grad\, z = (2; 5)$. Тепер побудуємо лінію рівня цільової функції, тобто лінію, на якій функція z має стале значення. За властивостями градієнта цей вектор також є і вектором нормалі до лінії рівня функції. Отже, перпендикулярно вектору $grad\, z = (2; 5)$ проведемо пряму через початок координат (див. рис. 1.1). Підставимо координати будь-якої точки цієї прямої у вираз для цільової функції і визначимо відповідне їй значення функції. Так, для лінії рівня, що проходить через початок координат, маємо $z_0 = 0$.

Оскільки цільова функція досліджується на максимум, то треба пересувати лінію рівня паралельно самій собі в напрямку вектора $grad\, z = (2; 5)$ і визначити вершину, через яку лінія рівня виходить з багатокутника планів. Такою вершиною є точка перетину ліній L_1 та L_3. Саме цій точці і відповідає оптимальний план, за яким цільова функція сягає максимуму. Знайдемо координати цієї вершини $\mathbf{X}^*(x_1^*; x_2^*)$, розв'язавши систему рівнянь, які відповідають лініям L_1 та L_3:

$$\begin{cases} 4x_1^* + 5x_2^* = 40, \\ -x_1^* + x_2^* = 5. \end{cases}$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де визначники Δ, Δ_1 и Δ_2 дорівнюють:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 40 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 40 - 25 = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 40 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 40 = 60.$$

Отримуємо значення компонентів: $x_1^* = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$; $x_2^* = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$.

Оптимальний план можна записати у вигляді матриці-рядка: $\mathbf{X}^* = \left(\frac{5}{3}; \frac{20}{3}\right)$. Йому відповідає найбільше значення цільової функції:

$$z_{\max} = z(\mathbf{X}^*) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 5 \cdot \frac{20}{3} = \frac{110}{3}.$$

Завдання 2. Застосування симплексного методу до вирішення завдання про оптимальне використання ресурсів

Для виготовлення двох видів виробів A та B підприємство використовують три типи сировини, запаси яких обмежені і становлять відповідно $R_1 = 300$, $R_2 = 120$ та $R_3 = 252$ умовних одиниць. Прибуток, який отримує підприємство від реалізації одиниці продукції кожного виду, дорівнює $c_1 = 20$ та $c_2 = 40$ умовних одиниць. За технологією, яка використовується для виробництва продукції, кількість сировини кожного типу, яка необхідна для виготовлення одиниці продукції виду A, складає $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 4$ та $\alpha_3 = 3$ умовних одиниць, а кількість сировини кожного типу, яка необхідна для виготовлення одиниці продукції виду *B*, складає $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$ та $\beta_3 = 12$ умовних одиниць. За допомогою симплексного методу визначити оптимальний план виробництва, відповідно до якого підприємство отримало б максимальний прибуток.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 кількість одиниць виробу A та через x_2 – виробу B, які виготовляє підприємство. Тоді прибуток від реалізації готової продукції являє собою функцію двох змінних: $z = 20x_1 + 40x_2$. У даній задачі це і є цільова функція, яка досліджується на максимум:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \quad \to \quad \max.$$

Оскільки кількість сировини, що витрачається на виготовлення продукції, не може перевищувати її запасів, то по кожному з трьох видів сировини необхідно записати обмеження у вигляді нерівностей, які і утворюють основну систему обмежень:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

Крім того, кількість виробленої продукції не може бути від'ємною, тобто існує обмеження на знак: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Разом з основною системою обмежень обмеження на знак утворюють систему обмежень, яким повинні задовольняти аргументи цільової функції.

Отже, математична модель задачі у стандартній формі має вигляд:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \quad \to \quad \max, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Оскільки і цільова функція, і функції, що входять до складу основної системи обмежень є лінійними, то дана задача є задачею лінійного програмування. Розв'язком задачі є такі значення x_1^* та x_2^*, які задовольняють усім обмеженням і при яких цільова функція z досягає максимального значення.

Для знаходження оптимального плану $\mathbf{X}^*(x_1^*; x_2^*)$ застосуємо симплексний метод, оскільки він є універсальним методом розв'язання задач лінійного програмування.

Застосування симплексного методу передбачає, що математична модель задачі лінійного програмування повинна відповідати певним вимогам. Відповідно до цих вимог основну систему обмежень, яка записана у вигляді нерівностей, необхідно привести до канонічного виду. Для цього у ліву частину кожної з нерівностей основної системи обмежень введемо балансову змінну, яка має сенс залишку сировини даного виду. Позначимо ці змінні x_3, x_4 та x_5, відповідно. Для цих змінних також повинна виконуватись вимога невід'ємності. Зауважимо, що балансові змінні вводяться до лівої частини нерівностей зі знаком «+», оскільки за вихідною умовою ліва частина (витрати сировини) не перевищує запасів (правої частини). Кожна з балансових змінних входить лише до одного рівняння. Отже, ці змінні утворюють базис простору, оскільки коефіцієнти при цих змінних утворюють одиничну матрицю.

Зауважимо, що підприємство продає лише готову продукцію, а залишки сировини не підлягають реалізації, то балансові змінні входять в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

Введення додаткових змінних дозволяє записати математичну модель задачі в канонічній формі:

$$z = 20x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \quad \to \quad \max, \qquad (2.1')$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases} \qquad (2.2')$$

Тепер модель може бути записана у симплексну таблицю. Рядки I, II та III симплекс-таблиці (табл. 2.1) містять значення параметрів моделі, у наступному рядку записано значення цільової функції, а в останньому рядку таблиці – оцінки плану.

Таблиця 2.1

Симплексна таблиця, що відповідає першій ітерації

№ рядка	Базис	$\vec{C}_{баз.}$	c_j	20	40	0	0	0	Примітки
			$\overline{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\overline{P}_4$	$\overline{P}_5$	
I	$\vec{P}_3$	0	**300**	12	4	1	0	0	
II	$\overline{P}_4$	0	**120**	4	4	0	1	0	
III	$\overline{P}_5$	0	**252**	3	12	0	0	1	
$z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$			**0**	0	0	0	0	0	
$\Delta_j = z_j - c_j$				-20	-40	0	0	0	$\Delta_1 < 0,$ $\Delta_2 < 0.$

Змінні, які не входить в базис, є вільними. Знаходимо значення базисних змінних. Оскільки за базисним розв'язком вільним змінним надають нульові значення, то значення базисних змінних вихідного опорного плану визначаємо за стовпцем $\overline{P}_0$ симплексної таблиці (див. табл. 2.1). Отримуємо вихідний опорний план $\mathbf{X}_0 = (0; 0; 300; 120; 252)$. При цьому $Z(\mathbf{X}_0) = 0$. Цей план не є оптимальним, оскільки має від'ємні оцінки: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$. Для його поліпшення необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього в базис вводимо вектор $\overline{P}_2$, якому відповідає найбільша за абсолютною величиною від'ємна оцінка, а саме: $\Delta = \max\ 20; 40\ = 40$.

Для того щоб визначити рядок, за яким вектор $\overline{P}_2$ будемо вводити до базису, обчислимо симплексне відношення для координат цього вектора:

$$\Theta = \min\left\{\frac{300}{4}; \frac{120}{4}; \frac{252}{12}\right\} = 21.$$

За значенням Θ робимо висновок, що вектор $\overline{P}_2$ необхідно ввести до базису за III-им рядком, відповідно, із базису виходить вектор $\overline{P}_5$, який знаходився в базисі за цим рядком. Здійснивши перетворення, отримаємо нову симплексну таблицю, де в останньому стовпця (примітки) вказані дії над рядками (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Симплексна таблиця, що відповідає другій ітерації

№ рядка	Базис	$\vec{C}_{баз.}$	c_j	20	40	0	0	0	Примітки
			$\overline{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\overline{P}_4$	$\overline{P}_5$	
IV	$\vec{P}_3$	0	**216**	11	0	1	0	-1/3	I + (-4) · IV
V	$\overline{P}_4$	0	**36**	3	0	0	1	-1/3	II + (-4) · IV
VI	$\overline{P}_2$	40	**21**	1/4	1	0	0	1/12	III : 12
$z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$			**840**	10	40	0	0	10/3	
$\Delta_j = z_j - c_j$				-10	0	0	0	10/3	$\Delta_1 < 0$

Новому опорному плану $\mathbf{X}_1 = (0; 21; 216; 36; 0)$ відповідає значення цільової функції $z_1(\mathbf{X}_1) = 840$. Цей план не є оптимальним, оскільки має від'ємну оцінку $\Delta_1 = -10$. Звідси випливає, що в базис необхідно ввести вектор $\vec{P}_1$.

Визначимо для проекцій вектора $\vec{P}_1$ симплексне відношення:

$$\Theta = \min\left\{\frac{216}{11}; \frac{36}{3}; \frac{21}{1/4}\right\} = 12.$$

Отже, вектор $\vec{P}_1$ треба ввести до базису за другим рядком, в наслідок чого вектор $\overline{P}_4$ вийде із базису. В наслідок цього отримаємо новий опорний план (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Симплексна таблиця, що відповідає третій ітерації

№ рядка	Базис	$\vec{C}_{баз.}$	c_j	20	40	0	0	0	Примітки
			$\overline{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\overline{P}_4$	$\overline{P}_5$	
VII	$\vec{P}_3$	0	**84**	0	0	1	-11/3	8/9	IV + (-11) · VIII
VIII	$\vec{P}_1$	40	**12**	1	0	0	1/3	-1/9	V : 3
IX	$\overline{P}_2$	20	**18**	0	1	0	-1/12	1/9	VI + (-1/4) · VIII
$z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$			**960**	20	40	0	10/3	20/3	
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	10/3	20/3	$\Delta_j \geq 0$

Оскільки всі оцінки плану $\mathbf{X}_2$ невід'ємні ($\Delta_j \geq 0$), то цей план є оптимальним: $\mathbf{X}^* = (12; 18; 84; 0; 0)$. Перші два компоненти цього плану визначають кількість виробленої продукції, а решта три компоненти відповідають залишкам сировини. Цьому плану відповідає максимальне значення цільової функції: $z(\mathbf{X}^*) = 960$.

Висновок: використовуючи наявні запаси сировини, підприємство може отримати максимальний прибуток, який становитиме 960 умовних одиниць, якщо буде виробляти 12 одиниць продукції A та 18 одиниць продукції B. При цьому залишок сировини першого виду складе 84 одиниці, а сировину другого і третього видів буде витрачено повністю.

Завдання 3. Матрична гра «Покупець – Продавець».

Для матричної гри «Покупець – Продавець», яка задана платіжною матрицею $\mathbf{П}$:

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix},$$

визначити нижню та верхню ціни гри, оптимальні стратегії кожного з гравців і обчислити ціну гри.

Розв'язання. Згідно з платіжною матрицею гравець A має дві стратегії: A_1 та A_2, у той же час гравець B має п'ять стратегій: B_1, B_2, B_3, B_4 та B_5:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \mathbf{П} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2. \end{array} \end{array}$$

Кожний елемент платіжної матриці $\mathbf{П} = (\pi_{ij})_{2\times 5}$ визначає ціну, яку отримає продавець, якщо буде дотримуватися своєї i-ої стратегії, і заплатить покупець, якщо буде дотримуватися своєї j-ої стратегії.

Перевіримо, чи є ця гра грою в чистих стратегіях, іншими словами, чи має гра сідлову точку, коли обом гравцям вигідніше дотримуватися чистих стратегій. Для цього порівняємо значення нижньої і верхньої цін гри.

Продавець, який прагне максимізувати свій мінімальний гарантований виграш, аналізує платіжну матрицю і за кожним її рядком (стратегії гравця A) обирає найменші значення виграшем, а потім із них обирає найбільше значення. Така стратегія називається максимінною, а отримане значення є нижньою ціною гри:

$$\alpha = \max_i \left(\min_j (\pi_{ij}) \right) = \max_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = 1.$$

Покупець, прагнучи мінімізувати свій найбільший з можливих програшів, аналізує платіжну матрицю за стовпцями (стратегії гравця B) і порівнює найбільші значення по стовпцям і обирає серед цих значень найменше. Така стратегія називається мінімаксной, а отримане значення є верхньою ціною гри:

$$\beta = \min_j \left(\max_i (\pi_{ij}) \right) = \min_j \{2; 3; 5; 3; 4\} = 2.$$

Оскільки для даної платіжної матриці $\alpha \neq \beta$, то гра не має сідлової точки. Це означає, що гра матимемо розв'язок у мішаних стратегіях, при цьому ціна гри ν задовольняє нерівності: $\alpha < \nu < \beta$.

Визначимо активні стратегії гравців за допомогою графічного методу. Це можна зробити, оскільки гравець A має лише дві стратегії. У цьому випадку гра розглядається з позиції гравця A (рис. 3.1).

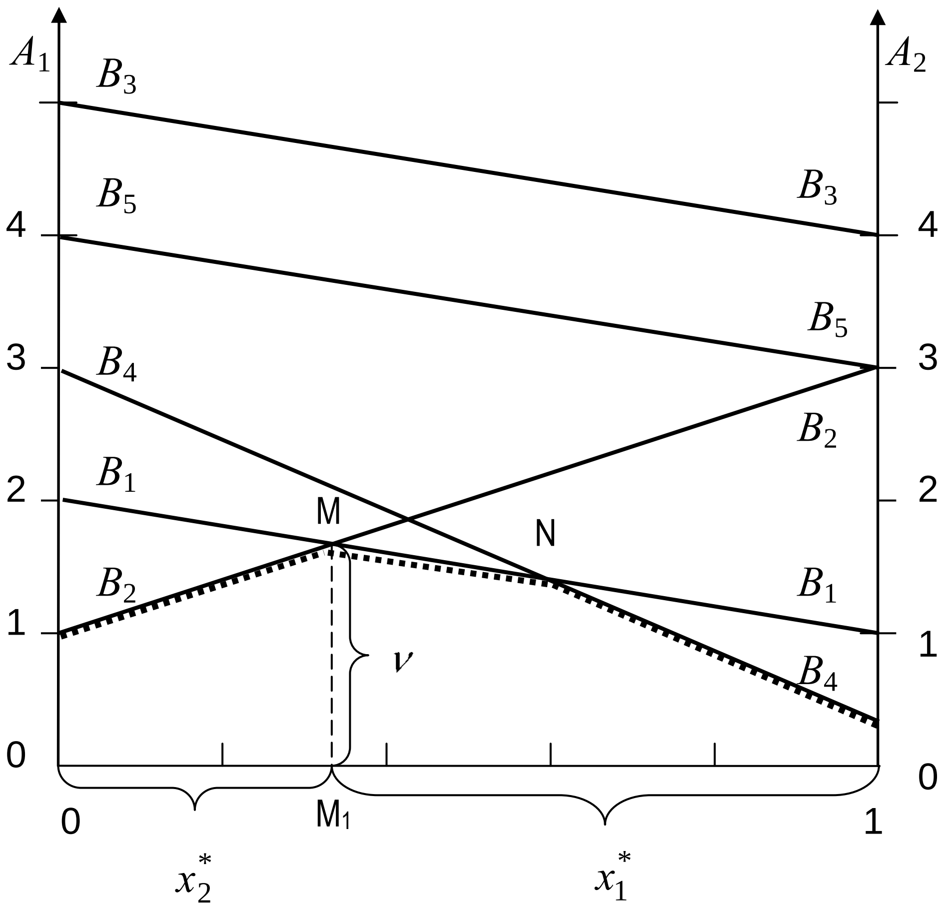

Рис. 3.1. **Розв'язування матричної гри графічним методом**

На координатній площині вздовж осі абсцис відкладається відрізок одиничної довжини. Це ось ймовірностей. Перпендикулярно їй проводять осі OA_1 та OA_2, на яких будемо відкладати виграші гравця A, що відповідають стратегіям A_1 та A_2 за умов, що гравець B буде дотримуватися однієї із своїх можливих стратегій.

Наприклад, якщо гравець B дотримується своєї 1-ої стратегії, то виграш, який отримає гравець A, може дорівнювати 2, якщо він буде дотримуватися своєї 1-й стратегії, або може дорівнювати 1, якщо гравець A буде дотримуватися своєї 2-ой стратегії. Відкладаємо ці значення по осям OA_1 та OA_2, відповідно, і з'єднуємо їх відрізком прямої, який підписуємо B_1B_1. Аналогічно будуємо відрізки прямих, відповідних іншим чотирьом стратегіям покупця. Ламана лінія B_2MNB_4 є нижньою границею можливого виграшу гравця A. На цій межі знаходимо точку, яка має максимальну ординату. Видно, що це точка M, яка утворюється при перетині ліній B_2B_2 та B_1B_1. Ці лінії відповідають стратегіям B_2 та B_1 гравця B, отже, стратегії B_1 та B_2 є активними стратегіями гравця B. Інші стратегії гравець B не застосовує. Ординатою точки M є ціна гри, а відрізки OM_1 та M_1O, на які проекція точки M поділяє одиничний відрізок оси абсцис, визначають ймовірності x_1^* та x_2^*, з якими гравець A буде застосовувати стратегії A_1 та A_2, відповідно. Метою графічного методу є визначення активних стратегій кожного з гравців, а далі задачу треба розв'язувати аналітично.

Оскільки точка M утворюється при перетині ліній B_2B_2 та B_1B_1, то в активних стратегіях платіжна матриці має вигляд:

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

За цією матрицею оптимальна стратегія гравця A визначається матрицею $\mathbf{X}^*(x_1^*; x_2^*)$, а гравця B – матрицею $\mathbf{Y}^* = (y_1^*; y_2^*; 0; 0; 0)$. Для обчислення компонентів матриці $\mathbf{X}^*$ розглянемо гру з позиції гравця A, тобто, складемо систему рівнянь, де невідомими є ймовірності x_1^* та x_2^*, з якими гравець A дотримується своїх активних стратегій, а також ціна гри ν . Перші два рівняння цієї системі в якості коефіцієнтів при невідомих x_1^* та x_2^* містять елементи платіжної матриці активних стратегій, які записані в стовпцях цієї матриці. Оскільки гравець A дотримується або стратегії A_1, або стратегії A_2, то вибір тієї чи іншої з цих стратегій є повною групою подій. Відповідно, сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Це й описує третє рівняння системи. Отримуємо математичну модель задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = \nu, \\ x_1^* + 3x_2^* = \nu, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.1) \\ \\ (3.2) \end{matrix}$$

Розв'язавши систему рівнянь (3.1-3.2), знаходимо оптимальний план щодо ймовірностей, з якими гравець A дотримується своїх стратегій, і ціну гри за цим планом:

$$\begin{cases} x_1^* = 2/3, \\ x_2^* = 1/3, \\ \nu = 5/3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathbf{X}^* = (2/3; 1/3), \\ \nu(\mathbf{X}^*) = 5/3. \end{matrix}$$

Для обчислення ймовірностей y_1^* та y_2^* , з якими гравець B дотримується своїх активних стратегій, запишемо систему рівнянь відносно невідомих компонентів y_1^* та y_2^* матриці $\mathbf{Y}^*$та ціни гри, тобто, розглянемо матричну гру з позиції гравця B. Коефіцієнтами в перших двох рівняннях системи є елементи платіжної матриці активних стратегій, які стоять в її рядках, а третє рівняння описує ймовірність повної групи подій, оскільки гравець B обирає або стратегію B_1 з ймовірністю y_1^*, або стратегію B_2 з ймовірністю y_2^* і не обирає інші свої стратегії. Отримуємо математичну модель задачі, яка є двоїстою до задачі (3.1-3.2):

$$\begin{cases} 2y_1^* + y_2^* = \nu, \\ y_1^* + 3y_2^* = \nu, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.1') \\ \\ (3.2') \end{matrix}$$

Розв’язавши систему рівнянь (3.1'-3.2'), знаходимо компоненти оптимального плану двоїстої задачі, що відповідають ймовірностям, з якими гравець B дотримується своїх активних стратегій, і значення цільової функції за цим планом:

$$\begin{cases} y_1^* = 2/3, \\ y_2^* = 1/3, \\ \nu = 5/3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathbf{Y}^* = (2/3; 1/3; 0; 0; 0), \\ \nu(\mathbf{Y}^*) = 5/3. \end{matrix}$$

Видно, що значення ціни гри, яке обчислювалося згідно з оптимальним стратегіям кожного з гравців, те ж саме і збігається з даними, які були отримані при аналізі графічного розв’язку.

Відповідь. Гравець A дотримується своїх стратегій з ймовірностями, що описуються матрицею $\mathbf{X}^* = (2/3; 1/3)$, а гравець B – з ймовірностями, що описуються матрицею $\mathbf{Y}^* = (2/3; 1/3; 0; 0; 0)$. Ціна гри становить $\nu(\mathbf{X}^*) = \nu(\mathbf{Y}^*) = 5/3$.

Зауваження. Якщо за вихідною умовою завдання платіжна матриця має індекс $^{\mathbf{T}}$, це означає, що її необхідно транспонувати, тобто, поміняти місцями рядки і стовпці цієї матриці. Наприклад,

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Саме матриця $\mathbf{\Pi}$ і є тією платіжною матрицею, яка описує вихідні умови завдання. Далі розв’язування задачі здійснюється за вже відомим алгоритмом.

Визначаємо нижню і верхню ціни гри для цієї матриці:

$$\alpha = \max_i \left(\min_j (\pi_{ij}) \right) = \max_i \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\beta = \min_j\left(\max_i(\pi_{ij})\right) = \min_j\{4; 5\} = 4.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то матрична гра не має сідлової точки і її розв’язок слід шукати у мішаних стратегіях. При цьому $2 < \nu < 4$.

У цьому випадку гравець B має дві стратегії, а гравець A – чотири. Отже, для виявлення активних стратегій гравця A матричну гру необхідно розв’язувати графічно з позиції гравця B, тобто, розглядати двоїсту задачу. Її розв’язок приведено на рис.3.2.

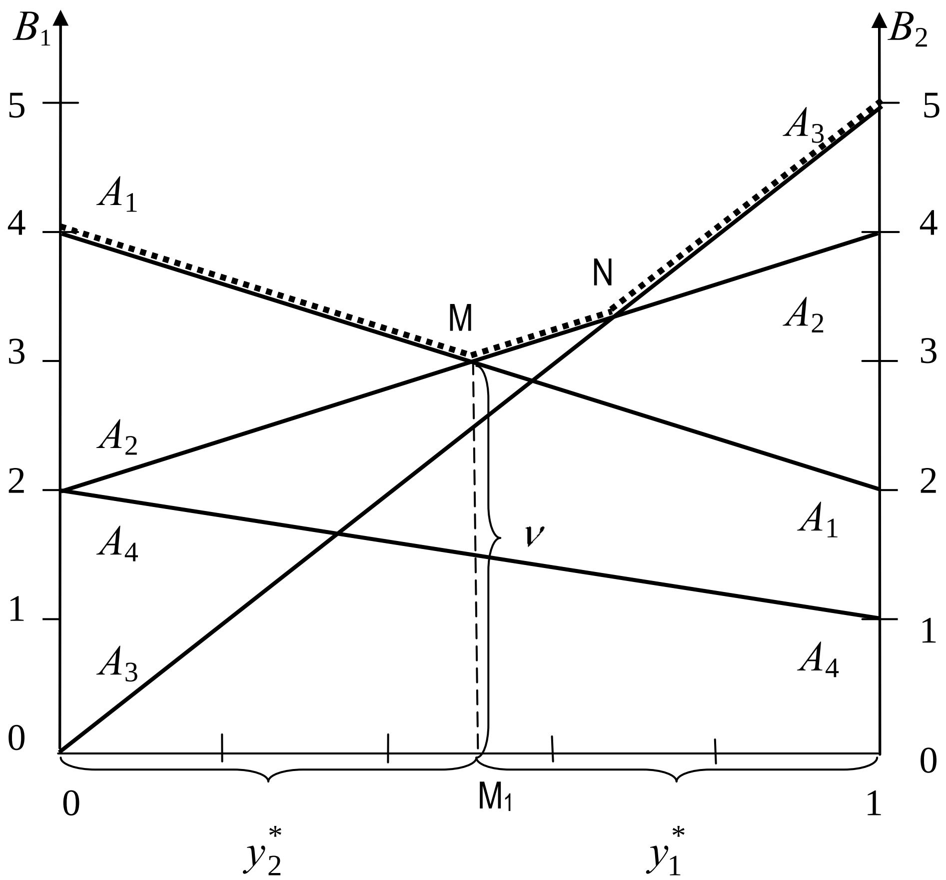

Рис. 3.2. **Розв’язання матричної гри з позиції гравця B**

Ломана A_1MNA_3 відповідає верхній межі програшу гравця B, її найменша ордината відповідає точці M і дорівнює значенню ціни гри ν. Отже, для гравця A активними є стратегії A_1 та A_2. Маємо матрицю активних стратегій:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тепер аналітично визначаємо ймовірності, з якими кожен з гравців буде дотримуватися своїх активних стратегій, а також ціну гри.

Так, для гравця A:

$$\begin{cases} 4x_1^* + 2x_2^* = \nu; \\ 2x_1^* + 4x_2^* = \nu; \\ x_1^* + x_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0,5; \\ x_2^* = 0,5; \\ \nu = 3, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{X}^* = (0,5;\, 0,5;\, 0;\, 0), \\ \nu(\mathbf{X}^*) = 3. \end{array}$$

Для гравця B:

$$\begin{cases} 4y_1^* + 2y_2^* = \nu; \\ 2y_1^* + 4y_2^* = \nu; \\ y_1^* + y_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 0,5; \\ y_2^* = 0,5; \\ \nu = 3, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{Y}^* = (0,5;\, 0,5), \\ \nu(\mathbf{Y}^*) = 3. \end{array}$$

Відповідь. Гравець A дотримується своїх стратегій з ймовірностями, що описуються матрицею $\mathbf{X}^* = (0,5;\, 0,5;\, 0;\, 0)$, а гравець B – з ймовірностями, що описуються матрицею $\mathbf{Y}^* = (0,5;\, 0,5)$. Ціна гри за оптимальним планом становить $\nu(\mathbf{X}^*) = \nu(\mathbf{Y}^*) = 3$.

Завдання 4. Транспортна задача за критерієм вартості.

На трьох складах A_1, A_2 та A_3 знаходиться однорідна продукція у кількості 180, 400 та 280 умовних одиниць, відповідно. Потреби споживачів B_1, B_2, B_3 та B_4 у цій продукції становить 240, 320, 120 та 180 умовних одиниць. Знайти план перевезень, за яким усі запаси продукції були би вивезені, потреби всіх споживачів – задоволені, а загальна вартість перевезень була би мінімальною, якщо тарифи перевезень одиниці вантажу задані матрицею вартостей:

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Транспортна задача має розв'zpjr, якщо вона збалансована, тобто, сумарні потреби рівні сумарними запасами. Так, сумарні запаси всіх постачальників складають:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 280 = 860.$$

Сумарні потреби всіх споживачів складають:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860.$$

Тобто для даної транспортної задачі

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j.$$

Транспортна задача, що розглядається, є закритою, отже, вона має розв'язок.

Для того, щоб розв'язати транспортну задачу, необхідно спочатку скласти її опорний план, який будемо розглядати як вихідний. Для складання вихідного опорного плану існує кілька методів, з них найбільш поширеними є метод північно-західного кута (діагональний метод) і метод мінімальної вартості.

В основу діагонального методу закладені такі принципи. Розподіл вантажу між споживачами починають з лівої верхньої клітини (північно-західного кута) таблиці перевезень. Розподіляємо запаси першого постачальника A_1. За їх рахунок спочатку задовольняємо потреби споживача B_1. Для цього в клітинку x_{11} записуємо менше з чисел a_1 та b_1, тобто $x_{11} = \min\ a_1; b_1$. Якщо $x_{11} = a_1$, то постачальник A_1 витратив увесь ресурс і в подальшому розподілі вантажу він не може брати участі, отже, цей постачальник виключається з розгляду. Якщо при цьому попит споживача B_1 не задовольнили у повному обсязі, тоді до клітинку, яка знаходиться у другому рядку першого стовпчика, направляють вантаж від постачальника A_2 у кількості: $x_{21} = \min\ a_2; b_1 - x_{11}$. Навпаки, якщо

$x_{11} = b_1$, то споживач B_1 отримує потрібний йому обсяг поставок, тоді з решти ресурсів постачальника A_1 підуть на задоволення потреб споживача B_2, вибираючи при цьому $x_{12} = \min(a_1 - x_{11}; b_2)$ і таке інше. Такий розподіл проводять доти, доки вся продукція зі складів не буде вивезена, а всі споживачі не будуть задоволені. Це можливо, оскільки попит дорівнює пропозиції, тобто, задача є збалансованою.

Клітинки відповідного стовпця або рядка, в яких потреби споживача задоволені або запаси продукції на складі витрачені, заповнюють нулями або прочерками або залишають порожніми.

Слід підкреслити, що при складанні опорного плану методом північно-західного кута не враховується вартість перевезення одиниці вантажу, тому цей план може бути далеким від оптимального.

На відміну від методу північно-західного кута метод мінімальної вартості побудований на аналізі матриці вартості перевезень, тому дозволяє побудувати вихідний опорний план, який є достатньо близьким до оптимального, або навіть відразу знайти оптимальний план. Алгоритм методу мінімальної вартості передбачає ряд однотипних кроків, на кожному з яких заповнюється саме так клітинка, якій відповідає мінімальна вартість перевезення одиниці вантажу c_{ij}.

Побудова вихідного опорного плану при застосуванні методу мінімальної вартості починають з визначення клітинки, яка має найменшу вартість перевезень c_{ij}, і туди роблять поставку, обсяг якої визначається співвідношенням: $x_{ij} = \min(a_i; b_j)$.

Після цього виключають рядок (тобто, заповнюють інші його клітинки нулями), якщо запаси постачальника витрачені, або виключають стовпець (тобто, заповнюють нулями), якщо потреби споживача повністю задоволені. Далі знову вибирають вільну клітинку з найменшою вартістю, і заповнюють її.

Процес триває доти, доки всі запасів не будуть вивезені та всі потреби – задоволені.

Якщо m та n достатньо великі, то застосовують такі різновиди методу мінімальної вартості:

метод мінімальної вартості за рядком, тобто, розподіляють запас a_1 послідовно за мінімальною вартістю першого рядка, потім запас a_2 – за мінімальною вартістю другого рядка і таке інше;

метод мінімальної вартості за стовпцем, тобто, задовольняють потреби b_1 за мінімальною вартістю першого стовпця, потім потреби b_2 – за мінімальною вартістю другого стовпця і таке інше;

метод подвійної переваги, згідно з яким виділяють клітинки з мінімальною вартістю в кожному рядку і клітинки з мінімальною вартістю в кожному стовпці і спочатку заповнюють клітини з подвійним відміткою, потім з одного відміткою. Решта клітини заповнюють будь-яким іншим методом.

Як правило найбільш близький до оптимального вихідний опорний план дає метод мінімальної вартості і метод подвійної переваги.

Перейдемо до розв'язання нашої задачі. Оформимо вихідні дані про запаси постачальників, потреби споживачів і вартості перевезень у вигляді таблиці і знайдемо вихідний опорний план $\mathbf{X}_0$, застосувавши для цього метод північно-західного кута (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Вихідний опорний план $\mathbf{X}_0$

Постачальники	**Споживачі**				**Запаси,** a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	22 180	15	40	18	180
A_2	9 60	12 320	32 20	16	400
A_3	11	38	10 100	14 180	280
Потреби, b_j	240	320	120	180	860 / 860

Загальна вартість перевезень за цим планом становить:

$$z(\mathbf{X}_0) = 22\cdot180 + 9\cdot60 + 12\cdot320 + 32\cdot20 + 10\cdot100 + 14\cdot180 = 12500.$$

Отриманий опорний план є не виродженим, оскільки кількість зайнятих клітинок таблиці за цим планом дорівнює $m+n-1=6$, де m – кількість постачальників ($m=3$), n – кількість споживачів ($n=4$).

За допомогою методу потенціалів перевіримо, чи є знайдений план оптимальним. Для цього кожному постачальнику поставимо у відповідність потенціал u_i, а кожному споживачеві – потенціал v_j. Потенціали учасникам надаються таким чином, щоб для кожної зайнятої клітинки таблиці виконувалась умова: $u_i+v_j=c_{ij}$. Різниця між сумою потенціалів і вартістю називається оцінкою плану:

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$$

Якщо при цьому для кожної вільної клітини таблиці виконується умова: $u_i+v_j\le c_{ij}$ ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$), тобто, ці клітинки не мають додатних оцінок, то знайдений план є оптимальним.

Складемо таблицю потенціалів (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Таблиця потенціалів, що відповідає плану $\mathbf{X}_0$

u_i \ v_j	$v_1=22$	$v_2=25$	$v_3=45$	$v_4=49$
$u_1=0$	22	15 / 25	40 / 45	18 / 49
$u_2=-13$	9	12	32	16 / 36
$u_3=-35$	11 / - 13	38 / - 10	10	14

Наприклад, надамо постачальнику A_1 потенціал $u_1=0$ (одному з учасників можна надати довільне значення). До клітинки $i=1$, $j=1$ зроблено поставку (клітинка зайнята). Для цієї клітинки $c_{11}=22$, і за цим значенням обчислюємо потенціал споживача B_1, який визначаємо за співвідношенням: $v_1=22-u_1=22$. Знаходимо наступну зайняту клітинку, для якої потенціал одного з учасників уже відомий. Такою є клітинка $i = 2$, $j = 1$, для неї $c_{21} = 9$. Відповідно $u_2 = 9 - v_1 = 9 - 22 = -13$. І так обчислюємо потенціали доти, доки за всіма зайнятими клітинкам не будуть знайдені потенціали всіх учасників. Потім для вільних клітинок обчислюємо оцінки плану.

Оскільки для плану $\mathbf{X}_0$ оцінка $\Delta_{13} = 24 > 0$ і оцінка $\Delta_{23} = 48 > 0$, то цей план не є оптимальним, і його треба поліпшити, перерозподіливши вантаж. Для цього до клітинки, якої відповідає найбільша додатна оцінка (це клітинка $i = 1$, $j = 4$), ставимо знак «+», і складаємо замкнений контур, вершини якого відповідають завантаженим клітинкам (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Поліпшення плану $\mathbf{X}_0$ шляхом перерозподілу вантажу за контуром

План $\mathbf{X}_0$	180 -Θ			+Θ
	+Θ 60	320	-Θ 20	
			+Θ 100	– Θ 180

Вершинам контуру перерозподілу, починаючи з клітинки, до якої необхідно здійснити постачання і яка позначена знаком «+», по черзі присвоюємо знаки «–» та «+».

Кількість вантажу, яку необхідно перерозподілити за цим контуром, визначається як найменша з поставок, що відповідають тим клітинкам, що позначені знаком «–»:

$$\theta = \min\{180; 20; 180\} = 20.$$

Таким чином, нам необхідно перерозподілити по замкнутому контуру 20 одиниць вантажу, додаючи їх до вже наявного обсягу постачання в тих клітинах, яким відповідають додатні вершини контуру перевезень, і віднімаючи в тих, яким відповідають від’ємні вершини. У результаті такого перерозподілу сумарні поставки за кожним з рядків і кожним зі стовпців залишаться незмінними, тому в подальшому з таблиць перевезень виключають останній рядок, в якому записані потреби кожного споживача, і останній стовпець, в якому записані запаси.

Після такого перерозподілу отримаємо новий план $\mathbf{X}_1$ (табл. 4.4), за яким загальна вартість перевезень дорівнює $Z(\mathbf{X}_1) = 12500 - 620 = 11880$.

Таблиця 4.4

План перевезень $\mathbf{X}_1$

План $\mathbf{X}_1$	160			20
	80	320		
			120	160

Перевіримо план $\mathbf{X}_1$ на оптимальність (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

Таблиця потенціалів, що відповідає плану $\mathbf{X}_1$

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22	15 / 25	40 / 14	18
$u_2 = -13$	9	12	32 / 11	16 / 5
$u_3 = -4$	11 / 18	38 / 21	10	14

План $\mathbf{X}_1$ не є оптимальним, оскільки він має додатні оцінки: $\Delta_{12} = 10$ та $\Delta_{31} = 8$. Визначаємо, що $\Delta = \max\{10; 8\} = 10$, тобто, необхідно робити постачання до клітинки $i = 1$, $j = 2$. Контур, за яким необхідно перерозподілити вантаж, представлено в табл. 4.6. За цим контуром перерозподіляємо вантаж $\Theta = \min\{160; 320\} = 160$ одиниць.

Перехід до нового плану дає виграш у значенні цільової функції $\Delta Z = \Delta \cdot \Theta = 10 \cdot 160 = 1600$, тобто, за новим планом цільова функція набуває такого значення: $Z(\mathbf{X}_2) = 11880 - 1600 = 10\,280$.

Таблиця 4.6

Поліпшення плану $\mathbf{X}_1$ шляхом перерозподілу вантажу за контуром

План $\mathbf{X}_1$	$-\Theta$ 160	$+\Theta$		20
	$+\Theta$ 80	$-\Theta$ 320		
			120	160

Отримаємо новий план перевезень $\mathbf{X}_2$ (табл. 4.7).

Таблиця 4.7

План перевезень $\mathbf{X}_2$

План $\mathbf{X}_2$		160		20
	240	160		
			120	160

За цим планом цільова функція приймає значення, яке дорівнює:

$$Z(\mathbf{X}_2) = 160 \cdot 15 + 20 \cdot 18 + 240 \cdot 9 + 160 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 14 = 10\,280.$$

Як бачимо, значення цільової функції, яке розраховане безпосередньо за цим планом, збігається з тим значенням вартості, яке було визначено як результат послідовного її перерахунку при переході від вихідного до кожного наступного опорного плану.

Перевіримо план $\mathbf{X}_2$ на оптимальність (табл. 4.8).

Таблиця 4.8

Таблиця потенціалів, що відповідає плану $\mathbf{X}_2$

u_i \ v_j	$v_1 = 12$	$v_2 = 15$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22 12	15	40 14	18
$u_2 = -3$	9	12	32 11	15 16
$u_3 = -4$	8 11	38 11	10	14

Оскільки серед оцінок плану $\mathbf{X}_2$ нема від'ємних, то цей план є оптимальним. Загальна вартість перевезень за цим планом мінімальна і дорівнює:

$$Z_{\min} = Z(\mathbf{X}^*) = 10\ 280.$$

Складемо вихідний опорний план цієї ж завдання методом мінімальної вартості.

Аналіз матриці $\mathbf{C}$ показує, що найменша вартість перевезень $c_{21} = 9$ відповідає клітинці $i = 2$, $j = 1$. Отже, до цієї клітинки робимо перше постачання. Кількість вантажу за цим постачанням визначаємо, порівнюючи потреби споживача B_1 і можливості постачальника A_2. Отримуємо: $x_{21} = \min\{240; 400\} = 240$.

Наступною клітинкою, відкритою для постачання, є клітинка $i = 3$, $j = 3$, оскільки для неї $c_{33} = 10$. Відповідно, у цю клітинку треба поставити вантаж у обсязі $x_{33} = \min\{120; 280\} = 120$.

Тепер клітинкою, яка відкрита для поставки, є клітинка $i = 2$, $j = 2$, оскільки для неї $c_{22} = 12$. Поставка до цієї клітинки можлива, однак постачальник A_2 частково вже витратив свої запаси. Враховуючи це при визначенні обсягу поставки до даною клітинки, отримаємо значення: $x_{22} = \min\{320; 400 - 240\} = 160$. Продовжуючи заповнення клітинок таблиці перевезень відповідно з результатами аналізу матриці вартостей, отримаємо вихідний опорний план, наведений в табл. 4.9. Його нема необхідності перевіряти на оптимальність, оскільки за результатами застосування методу північно-західного кута вже визначено, що цей план є оптимальним планом $\mathbf{X}^*$. Отже, для даної задачі при побудові вихідного опорного плану методом мінімальної вартості було відразу отримано оптимальний план.

Таблиця 4.9

Вихідний опорний план $\mathbf{X}_0$

Постачальники	**Споживачі**				**Запаси,** a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	22	15 160	40	18 20	180
A_2	9 240	12 160	32	16	400
A_3	11	38	10 120	14 160	280
Потреби, b_j	240	320	120	180	860 / 860

Таким чином, оптимальним для заданих умов є такий план перевезень:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 160 & 0 & 20 \\ 240 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 160 \end{pmatrix}.$$

Йому відповідає мінімальна загальна вартість перевезень вантажу, яка складає 10 280 умовних одиниць.

Рекомендована література

1. Егоршин А. А. Математическое программирование : Учебник / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Харьков : Изд «ИНЖЭК», 2006. – 438 с.
2. Економіко-математичні методи і моделі. Практичний посібник / Укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Є. Ю.Місюра – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 319 с.
3. Збірник вправ з навчальної дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів усіх галузей знань усіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.
4. Исследование операций в экономике: Учеб. пособ. для вузов / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 408 с.
5. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб. : Издательство «Питер», 2000. – 208 с.
6. Кучма М. І. Математичне програмування: приклади і задачі : навч. посібн. / М. І. Кучма. – Львів : «Новий світ 2000», 2008. – 344 с.
7. Малярець Л. М. Робоча програма навчальної дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів за напрямом підготовки 0501 «Економіка і підприємництво» всіх форм навчання / Укл. Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 44 с.
8. Малярець Л. М. Економіко-математичне моделювання: навч. посібн. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 312 с.
9. Малярець Л. М. Збірник вправ з навчальної дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів всіх галузей знань усіх форм навчання / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.
10. Экономико-математические методы и модели : Учеб. пособ. / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, В. Н. Жихар и др.; Под общ. ред.. А. В. Кузнецова. – Мн.: БГЭУ, 1999. – 413 с.